

УДК 533.69:533.6.011.5

© 1998 г. М.К. АУКИН, Р.К. ТАГИРОВ

ПРИМЕНЕНИЕ ПРЯМОГО МЕТОДА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО КОНТУРА СВЕРХЗВУКОВОГО ВЫХОДНОГО УСТРОЙСТВА РЕАКТИВНОГО ДВИГАТЕЛЯ

С помощью прямого метода решена вариационная задача определения оптимального контура выходного устройства, состоящего из сверхзвукового сопла реактивного двигателя и хвостовой части летательного аппарата. Получены примеры расчета оптимальных контуров двумерных выходных устройств с учетом влияния внешнего обтекания, донного торца, угла атаки и других факторов.

Определению оптимальных контуров выходных устройств посвящены работы [1–8]. Основные теоретические результаты получены в [1, 2]. С их помощью решен ряд практических задач. В частности, в [3] определены оптимальные конфигурации осесимметричных выходных устройств с учетом условий полета. Аналогичные расчеты проведены и для плоских выходных устройств. Все эти результаты получены путем решения вариационных задач на основе использования метода характеристик и перехода к контрольному контуру.

Помимо этих традиционных подходов для определения оптимальных конфигураций могут быть использованы и прямые методы вариационного исчисления [4].

Вероятно, впервые прямой метод был использован для определения оптимального контура осесимметричного сверхзвукового сопла в [5]. Прямые методы использовались также для нахождения контуров пространственного [6, 7] и плоского [8] сопел. Во всех указанных работах, использующих прямые методы решения вариационной задачи, рассматривались только внутренние задачи, т.е. влияние внешнего потока и донного торца не учитывалось. В данной работе впервые прямой метод решения вариационной задачи применяется для определения оптимальной конфигурации выходного устройства реактивного двигателя с учетом режима полета, углов атаки, изопериметрических условий, неравномерностей входного потока, длин нижней стенки (обечайки).

1. Для описания прямого метода решения вариационной задачи рассмотрим наиболее простую задачу определения оптимальной кривой, соединяющей две точки. Пусть в системе координат x, y заданы длина сверхзвуковой части сопла x_2 , ординаты верхних точек входного (y_1) и выходного (y_2) сечений (ось x является осью симметрии двумерного сопла). Во входном сечении заданы все газодинамические параметры. Необходимо определить контур сопла, который проходит через заданные две точки и обеспечивает получение максимума интеграла сил давления в направлении оси x . Пусть $y = y(x)$ – искомая функция. Функционал для рассматриваемого сопла может быть записан в виде

$$R[y(x)] = \int_0^{x_2} p y' (2\pi y)^j dx$$

где функция $y = y(x)$ дает экстремум указанного функционала ($j = 0$ – плоский случай, $j = 1$ – осесимметричный случай). Суть прямого метода заключается в том, что искомая функция $y(x)$ аппроксимируется рядом

$$y = \sum_0^N a_i f_i(x)$$

где $f_i(x)$ – координатные функции, а a_i – коэффициенты. Функции $f_i(x)$ заданы так, что они не противоречат выполнению граничных условий.

При использовании такой аппроксимации функционал $R[y(x)]$ превращается в функцию $R(a_0, a_1, \dots, a_N)$. Коэффициенты a_i выбираются так, чтобы функция $R(a_i)$ достигала экстремума. Следовательно, a_0, a_1, \dots, a_N определяются в общем случае из системы уравнений, представляющих собой необходимые условия экстремума

$$\frac{\partial R}{\partial a_i} = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, N)$$

При решении конкретных задач часть искомых коэффициентов может быть найдена с помощью заданных граничных условий. Предполагается, что предельный переход при $N \rightarrow \infty$ приводит к получению полного решения вариационной задачи. Если не совершать предельного перехода, а ограничиться лишь $N + 1$ первыми членами суммы ряда, то получим приближенное решение вариационной задачи. В данной работе будем искать лишь приближенные решения. Для получения конкретных решений зададим координатные функции в виде членов полинома. Необходимые $N + 1$ коэффициентов a_i определим из приведенной выше системы $N - 1$ уравнений и двух граничных условий $y(0) = y_1, y(x_2) = y_2$.

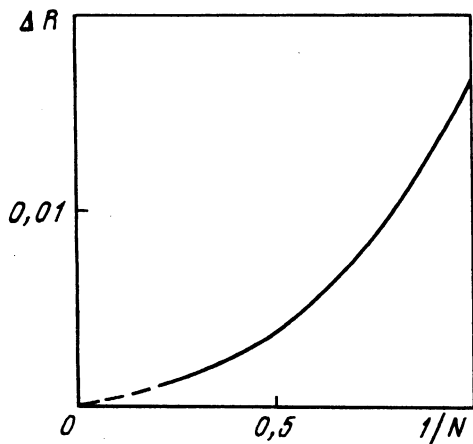
Процедура поиска оптимума R в многомерном пространстве a_0, \dots, a_N включает в общем случае следующие элементы. Вначале на основе предварительного анализа устанавливаются допустимые границы изменения каждого аргумента a_i . В пределах этих границ произвольно задаются начальные значения a_i . Для одного из аргументов, например a_1 , дается небольшое приращение и численно определяется производная $\Delta R / \Delta a_1$. Изменяя аргумент a_1 по специально разработанной методике, определяем искомое значение a_1 , для которого выполняется необходимое условие $\Delta R / \Delta a_1 \approx 0$. Затем даем приращение второму выбранному аргументу a_2 и повторяем указанную схему расчета с найденным выше значением a_1 .

Такие расчеты проводятся последовательно для каждого a_i . После нахождения значения a_N с помощью условия $\Delta R / \Delta a_N \approx 0$ все аргументы оказываются уже измененными по сравнению с начальными значениями. На этом завершается первая глобальная итерация ($j = 1$) и определяется функционал R_1 . После этого опять последовательно по указанной выше схеме изменяются аргументы a_i для удовлетворения необходимым условиям экстремума.

После каждой глобальной итерации j определяется изменение функционала $\Delta R = R_j - R_{j-1}$. Поиск оптимума R считается законченным после достижения $|\Delta R| \leq \epsilon$, где ϵ – заданная точность нахождения решения. Для проверки работоспособности алгоритма и программы были проведены методические расчеты для оптимальных плоских и осесимметричных сопел, для которых в литературе имеются все необходимые данные для сравнения.

В качестве первого примера рассмотрим сверхзвуковое осесимметричное сопло, в котором совершенный газ ($\gamma = 1,4$) расширяется от $M_1 = 1$ до $M_2 = 3$.

Контур такого сопла, рассчитанный методом характеристик для получения равномерного потока на выходе, дает максимальную тягу. Для этого заданного контура определим параметры течения и интеграл сил давления (тяги) с помощью разработанного ранее численного метода [9] (уравнения Эйлера, конечно-разностная схема второго порядка точности). В этом методе точность определения тяги зависит от



Фиг. 1. Относительное изменение тяги $\Delta R = 1 - R_x/R_e$ оптимального сопла в зависимости от количества членов ряда, аппроксимирующего контур сопла

выбора количества ячеек L по радиусу. Для анализа были проведены расчеты при $L = 10, 15, 30$ и 60 ячеек.

Полученные величины тяги построены в зависимости от относительной величины квадрата высоты ячейки, характеризуемой отношением $(10/L)^2$. Как и следовало ожидать для схемы второго порядка получена линейная зависимость. Экстраполяция на нулевой размер ячейки ($L = \infty$) дает тягу $R_e = 0,6363$. Для дальнейших расчетов выбираем $L = 30$, при этом заниженность тяги относительно эталонного значения R_e будет составлять всего $0,05\%$.

Определим этот же оптимальный контур осесимметричного сопла с помощью прямого метода решения вариационной задачи. Длину ($x_2 = 1$) и размеры входного ($y_1 = 0,11956$) и выходного ($y_2 = 0,2457$) сечений зададим такими же, как и у рассмотренного выше сопла. Для определения оптимального контура, соединяющего две заданные точки, проведем расчеты с использованием аппроксимирующего полинома при $N = 1, 2, 3, 4$ и 5 . Полученные в результате расчетов изменения тяги относительно R_e для соответствующих оптимальных контуров приведены на фиг. 1 в зависимости от параметра $1/N$. С уменьшением $1/N$ точность решения вариационной задачи прямым методом, как и следовало ожидать, возрастает, а отличие получаемой тяги от эталонной уменьшается. График показывает, что экстраполяция ΔR на $1/N = 0$ (штриховая линия) дает практически точное решение ($\Delta R = 0$). Целесообразно использовать меньшие значения N для предварительных приближенных исследований, а большие значения — для окончательных уточняющих расчетов. В данной работе с целью уменьшения объемов расчета будем брать $N = 3$, т.е. четыре члена ряда. Погрешность тяги, связанная с таким приближенным решением вариационной задачи, составляет около $0,2\%$. Найденный оптимальный контур хорошо согласуется с эталонным.

Проведенное сравнение показывает, что найденный с помощью прямого метода оптимальный контур дает хорошее согласие с имеющимися значениями ординат и тяги. Причем для сравнения специально выбрано сопло с наибольшей длиной, поскольку предполагалось, что выбранные в прямом методе координатные функции будут приводить к увеличению погрешностей с увеличением длины сопла. Методические расчеты и сравнения проведены и для плоских оптимальных сопел. При этом ордината выходного сечения задавалась как для полной длины сопла, обеспечивающей получение равномерного потока, так и для укороченных длин. Во всех рассмотренных случаях найденный с помощью прямого метода контур и интеграл сил давления хорошо согласуются с соответствующими данными, полученными на основе точного решения вариационной задачи с помощью метода характеристик.

Рассмотрим теперь все выходное устройство, содержащее сопло силовой установки

и хвостовую (кормовую) часть летательного аппарата применительно к плоскому летательному аппарату с нижним расположением реактивного двигателя.

Контур искомого оптимального выходного устройства задается в системе координат x, y : ось x совпадает с нижней стенкой камеры сгорания силовой установки, ось y – с начальным сечением сопла. Заданы y_1 – высота начального сечения сопла, y_m – высота корпуса летательного аппарата в этом же сечении. Также заданы все газодинамические параметры в сечении $x = 0$ для верхнего и нижнего внешних потоков и соплового потока. Для уменьшения объемов вычисления задаются длины x_2 выходного устройства и x_4 нижней стенки (обечайки) сопла. При необходимости эти длины могут быть определены на основе оптимизационных расчетов с учетом, например, влияния сил трения и веса.

Предполагается, что рассматриваемое выходное устройство состоит из верхней стенки кормовой части, донного торца, верхней стенки сопла и нижней стенки обечайки (нулевой толщины). Выбор такого семейства контуров сделан на основе анализа имеющихся экспериментальных данных и результатов решения вариационных задач. Такого типа контуры выходного устройства обычно рассматриваются при проведении практических исследований.

Для получения оптимального контура стенка сопла аппроксимируется полиномом ($N = 3$). Аналогично может аппроксимироваться и стенка нижней обечайки. Однако для уменьшения объема вычислений она здесь аппроксимируется прямой линией. Стенка плоской кормы также берется прямолинейной на основе имеющихся точных решений соответствующих вариационных задач. Для определения оптимального контура выходного устройства на основе выбранных выше семейств допустимых функций необходимо решить вариационную задачу с подвижными точками. Вариации концевых точек сопла и кормы допускаются только в направлении оси y . Функционалом для рассматриваемой задачи является сумма сил, действующих в направлении оси x

$$R_x = R_2 + R_3 + R_{4u} + R_{4d} + R_b$$

$$R_2 = \int_{y_1}^{y_2} p dy, \quad R_3 = \int_{y_3}^{y_m} p dy$$

$$R_{4u} = \int_{y_4}^0 p dy, \quad R_{4d} = \int_0^{y_4} p dy, \quad R_b = p_b (y_3 - y_2)$$

Здесь индексы u и d относятся к верхней и нижней поверхностям обечайки, b – к донному торцу. Необходимо найти контур, для которого R_x достигает максимума. При использовании указанного выше семейства допустимых кривых рассматриваемый функционал превращается в функцию пяти аргументов

$$R_x = R(\zeta_1, \zeta_2, y_2, y_3, \zeta_4) = R(a_i)$$

где ζ_1 и ζ_2 – тангенсы углов наклона верхней стенки сопла в начальном и конечном сечениях, y_2 и y_3 – ординаты контура сопла и кормы в конечном сечении, ζ_4 – тангенс угла наклона обечайки.

При этом первые три аргумента связаны с искомыми коэффициентами полинома ($N = 3$), а последние два аргумента являются искомыми параметрами, определяющими наклоны кормы и обечайки.

Эти аргументы определяются из системы пяти уравнений, представляющих необходимые условия экстремума

$$\frac{\partial R_x}{\partial a_i} = 0 \quad (i = 1 - 5)$$

Вариант	ζ_1	ζ_2	y_2	R_x	R_b
1	0,5155	0,1724	1,374	0,025987	0,00046
2	0,5155	0,1724	1,374	0,025969	0,00050
3	0,5185	0,1841	1,414	0,025976	0,00048

Для методических исследований выбраны следующие начальные данные: $y_1 = 0,11$, $y_3 = y_m = 1,82$, $x_2 = 3,8$, $x_4 = 0,7$, $M_1 = 2,067$, $\gamma_1 = 1,277$, $M_H = 12$, $\gamma_H = 1,4$. Кроме того, заданы отношения полных давлений и энтальпий внешнего и внутреннего потоков $p_H^*/p_1^* = 81$, $i_H^*/i_1^* = 0,7$. Для возможности расчета донного давления p_b были приняты следующие параметры перед торцом: толщины турбулентных пограничных слоев $\delta_2 = 0,07$, $\delta_3 = 0,1$, числа Рейнольдса $Re_2 = 1,7 \cdot 10^6$, $Re_3 = 1,7 \cdot 10^7$.

Указанные числа Рейнольдса оценены на основе использования соответствующих параметров невязкого потока перед торцом и длины рассматриваемой стенки. Донное давление за торцом, обтекаемого двумя сверхзвуковыми потоками, определялось с помощью интегрального метода [10].

Предварительно для этих начальных данных получено совместно с Тилляевой Н.И. точное решение вариационной задачи с использованием метода характеристик и определен оптимальный контур. Затем расчет течения в этом контуре проведен с использованием конечно-разностной схемы. После этого повторно получен оптимальный контур выходного устройства, но уже с использованием разработанного здесь прямого метода. Основные результаты, полученные с помощью указанных трех вариантов расчета, приведены в табл. 1.

Вариант 1 – точное решение вариационной задачи с использованием метода характеристик, 2 – расчет течения в заданном контуре с помощью конечно-разностной схемы, 3 – приближенное решение вариационной задачи с помощью прямого метода.

Видно, что тяги R_x оптимальных контуров выходного устройства, полученных на основе точного решения вариационной задачи и прямого метода, различаются всего на 0,04%.

Рассмотренное выше оптимальное выходное устройство получено при наличии ограничений $y_3 \leq y_m$, $\zeta_4 = 0$. Известно, что любое ограничение либо уменьшает тягу выходного устройства, либо не изменяет ее. Для подтверждения проведены расчеты оптимального выходного устройства с использованием прямого метода при произвольных вариациях $y_3 = \text{var}$ и $\zeta_4 = \text{var}$.

Результаты расчетов приведены в табл. 2 для вариантов: 1 – $y_3 \leq y_m$, $\zeta_4 = 0$; 2 – $y_3 = \text{var}$, $\zeta_4 = 0$; 3 – $y_3 = \text{var}$, $\zeta_4 = \text{var}$.

Видно, что снятие ограничений приводит к увеличению тяги выходного устройства.

Следует отметить, что на геометрическую форму оптимального выходного устройства и тягу могут оказать влияние и газодинамические параметры перед донным торцом. Так, например, увеличение толщины верхнего пограничного слоя δ_3 от 0,04 до 0,08 при сохранении $\delta_2 = 0,04$ приводит к увеличению y_3 от 1,81 до 1,83 и тяги на 0,2%.

Таким образом, приведенные методические расчеты и сравнения с точными решениями показали практическую применимость прямого метода решения вариационных задач.

2. С использованием разработанного метода оптимизации получены примеры расчета контуров выходного устройства применительно к плоскому гиперзвуковому летательному аппарату в диапазоне чисел M_H полета 8–14. В соответствии с этим диапазоном M_H изменялись число $M_1 = 1,5$ –2,1 и перепад давлений $p_H^*/p_1^* =$

Таблица 2

Вариант	ζ_1	ζ_2	ζ_4	y_2	y_3	R_x
1	0,5186	0,1841	0	1,414	1,82	0,025976
2	0,5199	0,1846	0	1,418	1,846	0,025980
3	0,5309	0,1922	0,015	1,436	1,851	0,026004

= 26–161. Приняты также $y_1 = 0,11$, $y_m = 1,82$, $x_2 = 3,8$. Для всех рассматриваемых режимов полета при расчете донного давления за торцом задавались: $\delta_2 = 0,07$, $\delta_3 = 0,1$, $Re_2 = 1,7 \cdot 10^6$, $Re_3 = 1,7 \cdot 10^7$. Расчеты оптимальных контуров выходного устройства проводились для заданных длин x_2 и x_4 .

Для иллюстрации оптимальные контуры выходного устройства для $M_H = 12$ и разных длин обечайки x_4 показаны на фиг. 2. С уменьшением x_4 оптимальный угол отклонения обечайки меняет знак с отрицательного на положительный, а высота донного торца уменьшается. Стенка кормы (верхняя линия на фиг. 2) практически не изменяется с изменением x_4 . Представление об изменении оптимального контура выходного устройства с ростом M_H при $x_4 = 0,7$ дает график на фиг. 3. С увеличением M_H степень раскрытия сопла уменьшается, угол наклона стенки кормы меняет знак с отрицательного на положительный, высота донного торца растет. Тангенс угла наклона обечайки при этом меняется незначительно (от $\zeta_4 = 0,0351$ при $M_H = 8$ до $0,0377$ при $M_H = 14$), сохраняя положительное значение, т.е. течение в сопле оптимального выходного устройства осуществляется с образованием скачков уплотнения.

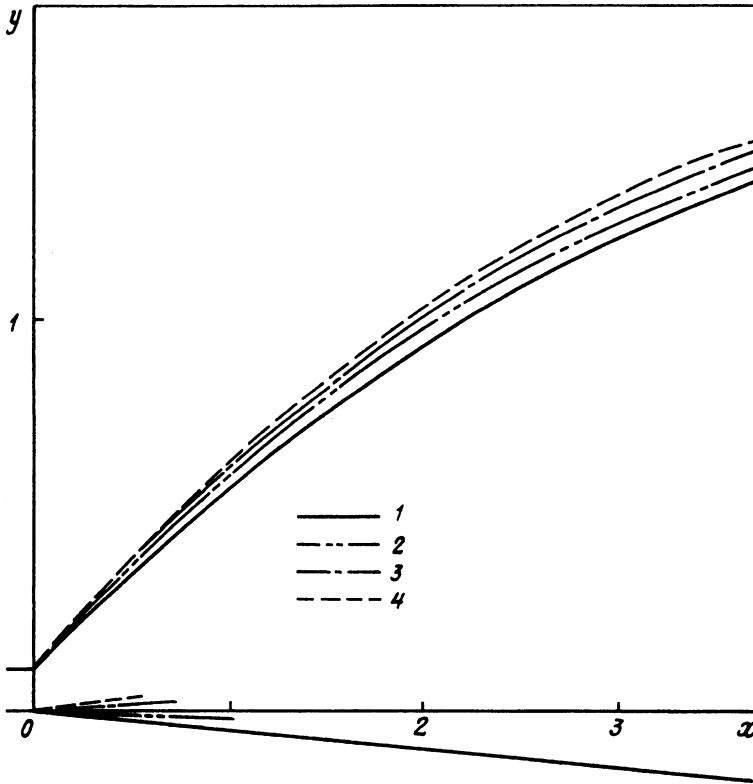
Далее рассматривается решение задачи определения оптимального выходного устройства с учетом дополнительных факторов и ограничений.

Выше рассмотрены примеры определения оптимальных выходных устройств, дающих максимальную тягу в направлении оси x . Обычно полет летательного аппарата совершается под некоторым углом атаки α_∞ .

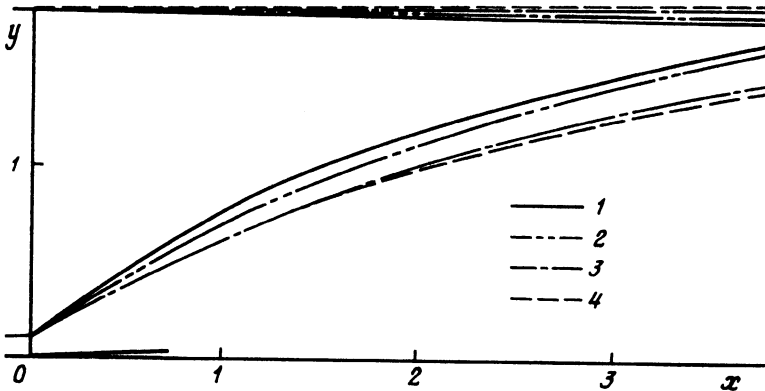
В этом случае возникает необходимость определения оптимального контура выходного устройства, дающего максимальную тягу в направлении полета. Для решения этой задачи в качестве функционала берется сила P , действующая на выходное устройство в направлении полета. Для примера проведены расчеты оптимального выходного устройства при $M_H = 12$, $x_4 = 0,7$, $x_2 = 3,8$ и $\alpha_\infty = 0,4, 8^\circ$. Для простоты предполагалось, что газодинамические параметры в начальных сечениях внутреннего и внешнего потоков не зависят от α_∞ . Полученные оптимальные контуры показаны на фиг. 4. Небольшое возрастание α_∞ приводит к сильному изменению контура оптимального выходного устройства. С увеличением угла атаки α_∞ от 0 до 8° сила P возрастает примерно на 6%.

На оптимальное выходное устройство может быть наложено дополнительное ограничение в виде изопериметрического условия (например, задана подъемная сила Y или объем, или момент). Решение такой задачи рассмотрено для $M_H = 12$, $\alpha_\infty = 0$, $x_4 = 0,7$, $x_2 = 3,8$. Полученные оптимальные контуры для различных заданных значений Y показаны на фиг. 5. Аналогичным образом найдены оптимальные выходные устройства для заданного объема и заданного момента сил.

Во всех рассмотренных выше демонстрационных примерах предполагалось наличие равномерного потока во входном сечении сопла. В общем случае этот поток является неравномерным. Необходимо было убедиться, что разработанный прямой метод оптимизации будет давать однозначное решение и при наличии неравномерного потока. В качестве примера рассмотрено влияние на решение вариационной задачи наличия неравномерного профиля скорости. Следует подчеркнуть, что здесь не ставилась задача исследования влияния неравномерностей и степени важности их учета, а дан лишь демонстрационный пример, показывающий возможность получения решения с учетом заданной неравномерности потока в начальном сечении сопла.



Фиг. 2. Влияние длины обечайки сопла x_4 на форму оптимального контура выходного устройства, кривые 1-4: $x_4 = 3,8; 1; 0,7; 0,5$

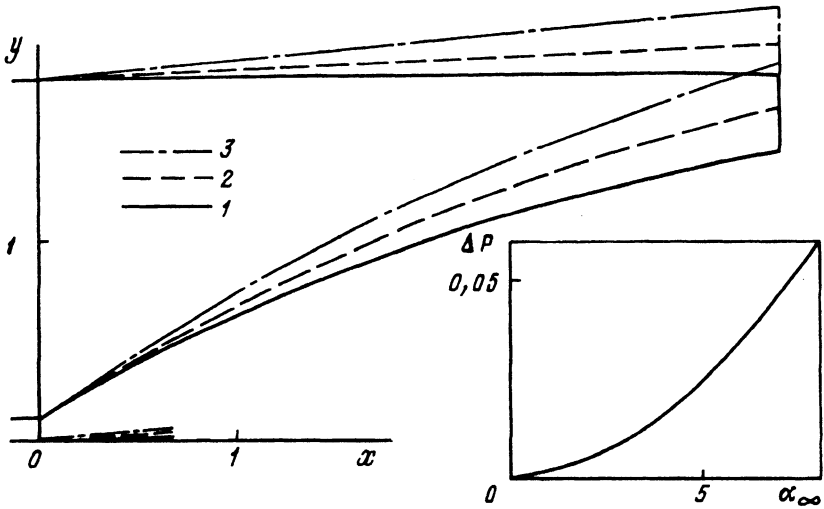


Фиг. 3. Влияние числа M_H полета на форму оптимального контура выходного устройства, кривые 1-4: $M_H = 8; 10; 12; 14$

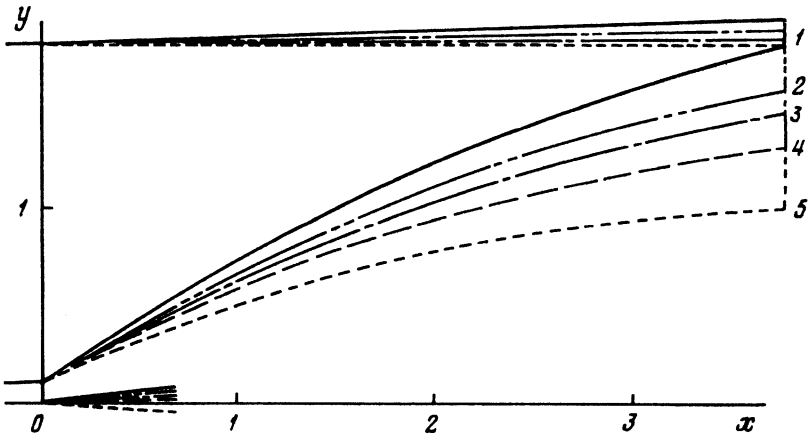
Для конкретного расчета было принято линейное изменение профиля скорости по высоте входного сечения сопла

$$u(y) = u_a [1 + \Delta u_1 (2y/y_1 - 1)]$$

где u_a – среднее значение скорости, соответствующее равномерному потоку, ордината y меняется от 0 до $y_1 = 0,11$, $\Delta u_1 = 1 - u_1/u_a$ – заданное отклонение скорости на верхней стенке от среднего значения.



Фиг. 4. Изменение формы оптимального контура выходного устройства (кривые 1-3) для различных углов атаки α_∞ : 0; 4; 8°; зависимость действующей на него относительной силы ΔP от α_∞ .

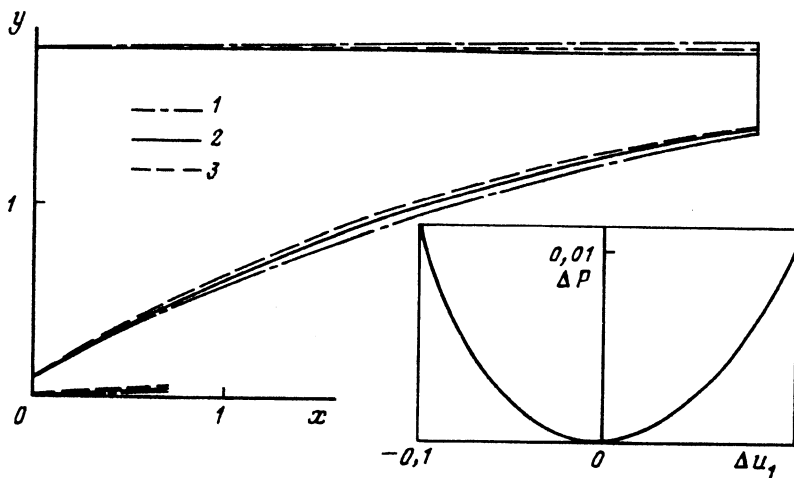


Фиг. 5. Оптимальные контуры выходного устройства (кривые 1-5) для различных заданных значений подъемной силы Y : - 0,01417; - 0,0058; - 0,00098; 0,00529; 0,01708

Вначале был проведен расчет оптимального контура выходного устройства для равномерных условий на входе и заданных значений расхода, полной энтальпии и скорости $u = u_a = \text{const}$. Затем решалась задача определения оптимального выходного устройства для заданной неравномерности профиля скорости Δu_1 и тех же значений расхода и полной энтальпии, которые были приняты для рассмотренного выше равномерного потока. При этом предполагалось, что статическое давление по высоте входного сечения постоянно.

Исследования проведены для $M_H = 12$, $x_4 = 0,7$, $x_2 = 3,8$, $\alpha_\infty = 0$ и значений $\Delta u_1 = -0,1-0,1$.

Рассчитанные оптимальные контуры выходного устройства для трех значений Δu_1 показаны на фиг. 6. В правой части графика дано относительное изменение тяги



Фиг. 6. Оптимальные контуры выходного устройства для трех значений неравномерности скорости потока Δu_1 в начальном сечении сопла, кривые 1–3: $\Delta u_1 = -0,1; 0; 0,1$

оптимальных выходных устройств от Δu_1 . Для рассмотренных неравномерных профилей скоростей на входе в сопло геометрическая форма оптимальных выходных устройств меняется слабо.

Получаемые оптимальные выходные устройства содержат донный торец. Если в этот торец осуществлять дув газ, то произойдет изменение оптимального контура и тяги выходного устройства. В качестве примера приведены расчеты оптимального выходного устройства ($M_H = 12$, $x_4 = 0,7$, $x_2 = 3,8$, $y_1 = 0,11$, $y_m = 1,82$) при задании относительного расхода (по отношению к расходу сопла) вдвухаемого в торец газа $m_b = 0-0,005$. Установлено, что при увеличении m_b от 0 до 0,005 относительное донное давление возрастает от 0,281 до 0,349, ордината выходного сечения сопла уменьшается от 1,5 до 1,46, а ордината концевой точки кормы возрастает от 1,78 до 1,84. Тяга при этом увеличивается на 0,7%.

Рассмотрим некоторые вопросы эффективности разработанного прямого метода, использующего итерационный процесс поиска экстремума функции многих переменных. Для сравнения взяты результаты [5], где с помощью прямого метода определен оптимальный контур сверхзвуковой части осесимметричного сопла за 52 итерации ($y_1 = 1$, $x_2 = 3$, $M_1 = 1$, $\gamma = 1,14$). Аналогичный расчет проведен с помощью прямого метода настоящей работы и решение получено за 66 итераций, его эффективность немного уступает эффективности [5], однако итерационный процесс имеет резервы для ускорения. Время расчета типичного оптимального контура двумерного выходного устройства на ЭВМ (Hewlett Packard 9000/75) составляет около 10 мин.

Заключение. На основе разработанного прямого метода определения оптимального контура сверхзвукового выходного устройства реактивного двигателя проведены методические расчеты. Продемонстрировано хорошее согласие полученных результатов с имеющимися точными решениями соответствующих вариационных задач. Исследовано влияние внешнего обтекания, донного торца, угла атаки и других факторов на форму оптимальных контуров двумерных выходных устройств.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крайко А.Н. Вариационные задачи газовой динамики. М.: Наука, 1979. 447 с.
2. Крайко А.Н., Тилляева Н.И., Щербаков С.А. Сравнение интегральных характеристик и формы профилированных контуров сопел Лаваля с "плавным" и с "внезапным" сужениями // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 4. С. 129–1397.

3. *Иванов М.Я.* Об одной вариационной задаче сверхзвуковой газовой динамики // Изв. АН СССР. МЖГ. 1968. № 1. С. 97–100.
4. *Эльсгольц Л.Э.* Вариационное исчисление. М.: Гостехиздат, 1958. 163 с.
5. *Бутов В.Г., Васенин И.М., Шелуха А.И.* Применение методов нелинейного программирования для решения вариационных задач газовой динамики // ПММ. 1977. Т. 41. Вып. 1. С. 59–64.
6. *Борисов В.М., Михайлов И.Е.* Об оптимизации сверхзвуковых частей пространственных сопел // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1981. Т. 21. № 2. С. 517–519.
7. *Куриленко Ю.В., Левин М.П.* Об итерационных алгоритмах решения задач профилирования пространственных каналов // Уч. зап. ЦАГИ. 1990. Т. 21. № 6. С. 117–122.
8. *Burgreen G.W., Baysal O., Eleshaky M.E.* Improving the efficiency of aerodynamic shape optimization // AIAA Journal. 1994. V. 32. № 1. P. 69–76.
9. *Аукин М.К., Тагиров Р.К.* Конечно-разностная схема второго порядка точности для расчета трехмерных сверхзвуковых течений идеального газа // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1989. Т. 29. № 7. С. 1057–1066.
10. *Масалов В.К., Тагиров Р.К.* Расчет донного давления и энтальпии за уступом, обтекаемым двумя сверхзвуковыми потоками, с учетом влияния пограничных слоев и тепловых потоков // Изв. АН СССР. МЖГ. 1991. № 5. С. 167–176.

Москва

Поступила в редакцию
28.V.1996