

УДК 532.5.013.4:536.25

© 1998 г. Р.В. БИРИХ, Т.Н. КАТАНОВА

ВЛИЯНИЕ ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ ВИБРАЦИЙ НА УСТОЙЧИВОСТЬ АДВЕКТИВНОГО ТЕЧЕНИЯ

Рассматривается устойчивость плоскопараллельного конвективного течения в горизонтальном слое с продольным градиентом температуры, подверженного продольным вибрациям. Исследовано поведение малых нормальных плоских и спиральных возмущений. Показано, что вибрации повышают устойчивость практически относительно всех типов возмущений. Исключение представляют плоские тепловые волны, область существования которых раздвигается в сторону малых значений числа Прандтля.

Адвективное течение в плоском горизонтальном слое жидкости, вызванное горизонтальным градиентом температуры [1], является удобной моделью течений, возникающих в различных технологических процессах. Структура гидродинамического и температурного полей течения сделали его очень интересным с точки зрения теории устойчивости. Точка перегиба в профиле скорости приводит к существованию чисто гидродинамической моды неустойчивости. В слоях жидкости с неустойчивой тепловой стратификацией может возникнуть конвективная рэлей-бенаровская неустойчивость, а в устойчиво стратифицированной средней части слоя могут генерироваться внутренние волны. Области существования незатухающих возмущений разного типа и структуры определялись разными исследователями. Подробный анализ проблемы и список литературы имеются в [2].

В настоящей работе изучается влияние высокочастотных продольных вибраций на различные моды неустойчивости, которые возникают в адвективном течении. Продольные высокочастотные вибрации, создавая в неизотермической жидкости осредненные массовые силы, влияют на устойчивость течения, изменяя профили скорости и температуры основного течения [3], а также непосредственно действуя на возмущения поля скорости и температуры.

1. Стационарное состояние. Рассмотрим замкнутую прямоугольную полость с большими горизонтальными размерами, полностью заполненную несжимаемой жидкостью и совершающую линейные гармонические колебания вдоль вектора n , лежащего в горизонтальной плоскости, с частотой Ω и амплитудой b . Вдоль направления колебаний в хорошо проводящих тепло границах полости ($x = \pm h$) создано линейное распределение температуры ($T = Az$). В поле тяжести и вибрационных сил инерции из-за теплового расширения жидкости возникает конвективное течение. При исследовании структуры этого течения и его устойчивости будем предполагать, что период колебаний сосуда существенно меньше всех характерных гидродинамических масштабов времени и применимо высокочастотное приближение, в котором методом осреднения можно получить замкнутую систему уравнений для медленной (осредненной) компоненты движения [4]. При этом следует помнить, что на частоту вибраций Ω имеется ограничение сверху, связанное с предположением о изотермической несжимаемости жидкости. Данное ограничение сводится к требованию, чтобы размер сосуда в направлении вибраций был существенно меньше длины звуковой волны. Уравнения для осредненного конвективного течения в приближении Буссинеска могут быть записаны в виде [4]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + G(\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V} &= -\nabla p + \Delta \mathbf{V} + T\gamma + \frac{G_v}{G}(\mathbf{W}\nabla)(T\mathbf{n} - \mathbf{W}) \\ \frac{\partial T}{\partial t} + G\mathbf{V}\nabla T &= \frac{1}{\text{Pr}} \Delta T \\ \text{rot } \mathbf{W} &= \nabla T \times \mathbf{n}, \quad \text{div } \mathbf{V} = 0, \quad \text{div } \mathbf{W} = 0 \\ G &= \frac{g\beta Ah^4}{\nu^2}, \quad G_v = \frac{(b\omega\beta Ah^2)^2}{2\nu^2}, \quad \text{Pr} = \frac{\nu}{\chi} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь \mathbf{V} , T , p – осредненные скорость, температура и давление, \mathbf{W} – соленоидальная часть векторного поля $T\mathbf{n}$, определяющая амплитуду пульсационной компоненты скорости. В качестве единиц измерения расстояния, времени, скорости, температуры и давления выбраны соответственно h , h^2/ν , $g\beta Ah^3/\nu$, Ah , $\rho g\beta Ah^2$; g – ускорение свободного падения, ρ – плотность жидкости, ν , χ , β – коэффициенты кинематической вязкости, температуропроводности и теплового расширения.

Система уравнений (1.1) содержит три безразмерных параметра: G – число Грасгофа, характеризующее интенсивность термогравитационного воздействия на элемент жидкости, G_v – вибрационный аналог числа Грасгофа, определяющий интенсивность термовибрационного воздействия, Pr – число Прандтля.

Рассматривая конвекцию в средней части протяженной в горизонтальном направлении полости, будем считать справедливым приближение плоского бесконечного слоя, а влияние на движение жидкости вертикальных границ полости учтем требованием замкнутости для осредненной и пульсационной компонент течения.

Таким образом, имеем граничные условия

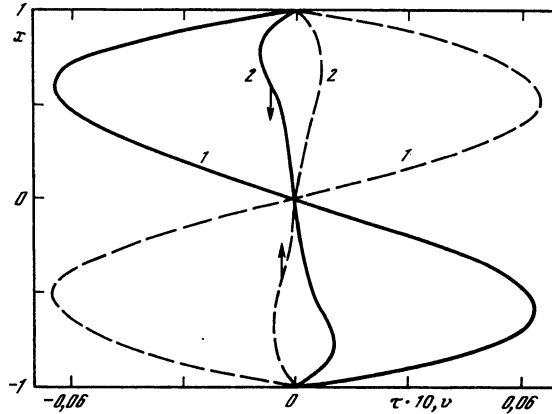
$$x = \pm 1: \quad \mathbf{V} = 0, \quad T = z, \quad W_x = 0 \quad (1.2)$$

$$\int_{-1}^1 V_z dx = 0, \quad \int_{-1}^1 W_z dx = 0 \quad (1.3)$$

Система (1.1)–(1.3) для продольных вибраций $n = (0, 0, 1)$ допускает решение в виде стационарного плоскопараллельного течения [3]

$$\begin{aligned} V_z(x) &= v_0 = \frac{1}{2\delta r^2} \left(\frac{\text{ch } rx \sin rx}{\text{ch } r \sin r} - \frac{\text{sh } rx \cos rx}{\text{sh } r \cos r} \right) \\ V_x &= 0, \quad V_y = 0, \quad W_x = 0, \quad W_y = 0 \\ W_z(x) &= \tau = \frac{1}{4r^4} \left[x - \frac{1}{\delta} \left(\frac{\text{ch } rx \sin rx}{\text{sh } r \cos r} + \frac{\text{sh } rx \cos rx}{\text{ch } r \sin r} \right) \right] \\ T_0 &= z + G \text{Pr} \tau(x), \quad r^4 = \frac{G_v \text{Pr}}{4}, \quad \delta = \frac{\text{tg } r}{\text{cth } r} + \frac{\text{ctg } r}{\text{th } r} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Типичные профили скорости и температуры приведены на фиг. 1. Случай $G_v = 0$ описывает адвективное течение, устойчивость которого исследована в [2]. При малых значениях $G_v \text{Pr}$ течение состоит из двух встречных потоков с профилем скорости, близким к кубическому. С увеличением G_v интенсивность течения падает, а максимум скорости смещается к ограничивающим слой плоскостям, в центре слоя образуется застойная зона. Вместе с падением интенсивности движения уменьшается вертикальный градиент температуры. Такие изменения адвективного течения, естественно, сильно влияют на его устойчивость. Учитывая, что это влияние на разные моды устойчивости оказывается разным, проведем анализ устойчивости стационарного состояния (1.4), рассматривая те же типы возмущений, которые изучались в [2].



Фиг. 1. Стационарные профили скорости (сплошные) и температуры (штриховые) для $G_v Pr = 0$, $G_v Pr = 1000$ (кривые 1, 2)

2. Плоские возмущения. Рассмотрим вначале малые нормальные возмущения в виде валов с осями, перпендикулярными вектору скорости основного потока

$$(v_x, v_z, T, w_x, w_z) \sim \exp(-\lambda t + ikz), \quad v_y = 0, \quad w_y = 0$$

Вместо векторов \mathbf{v} и \mathbf{w} удобно ввести функции тока Ψ и F . Тогда, исключив давление из системы (1.1), для амплитуд возмущений функций тока $\varphi(x)$ и $f(x)$ и температуры $\theta(x)$ в линейном приближении получим (штрих означает дифференцирование по x) следующую задачу:

$$\Delta^2 \varphi + ikG(v_0'' \varphi - v_0 \Delta \varphi) - ik\theta + ikG_v Pr \tau'(\theta - f') + \frac{G_v}{G} f'' = -\lambda \Delta \varphi$$

$$\frac{1}{Pr} \Delta \theta + ikG(T_0' \varphi - v_0 \theta) - G\varphi' = -\lambda \theta$$

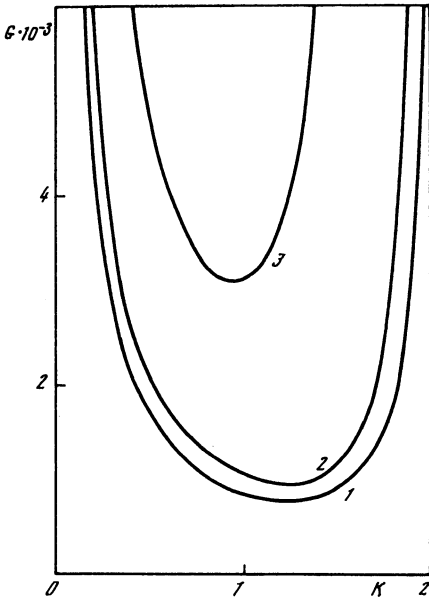
$$\Delta f = \theta', \quad \Delta \equiv \frac{d^2}{dx^2} - k^2 \tag{2.1}$$

$$x = \pm 1: \quad \varphi = \varphi' = \theta = f = 0 \tag{2.2}$$

Краевая задача (2.1), (2.2) для нейтральных возмущений ($\text{Re}(\lambda) = 0$) решалась численно методом дифференциальной прогонки. Была прослежена эволюция нейтральных кривых при изменении вибрационного числа Грасгофа для всех мод неустойчивости, рассмотренных в [2].

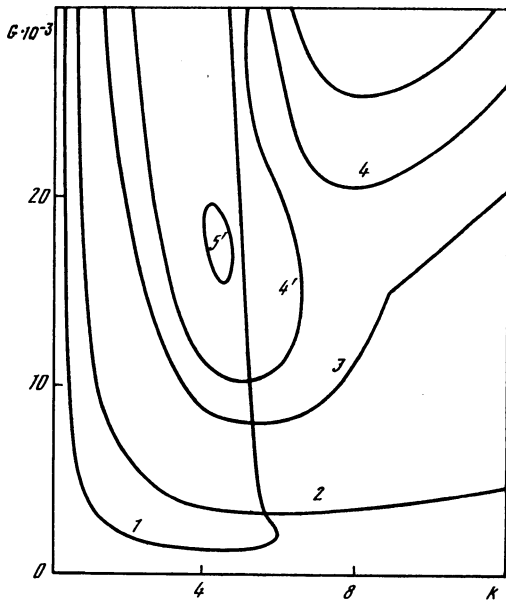
В области малых чисел Прандтля неустойчивость основного состояния имеет гидродинамическую природу и развивается в виде неподвижных вихрей на границе встречных потоков. Нейтральные кривые для этих возмущений приведены на фиг. 2 ($Pr = 0,1$). Кривая 1, выделяющая область неустойчивости при отсутствии вибраций, совпадает с соответствующей кривой в [5]. Кривые 2 и 3 ($G_v = 100$ и 500) показывают заметное повышение устойчивости течения с увеличением интенсивности вибраций. Это повышение устойчивости можно связать с уменьшением интенсивности основного течения при увеличении вибрационного воздействия, а увеличение длины волны критических возмущений – со сдвигом максимума скорости основного течения к границам слоя.

Неустойчивость адвективного течения в области умеренных значений числа Прандтля имеет рэлей-бенаровскую природу и формируется в двух сравнительно тонких неустойчиво стратифицированных слоях жидкости у твердых границ.



Фиг. 2

Фиг. 2. Нейтральные кривые для плоских возмущений при малых числах Прандтля ($Pr = 0, 1$) $G_v = 0; 100; 500$ (кривые 1–3)



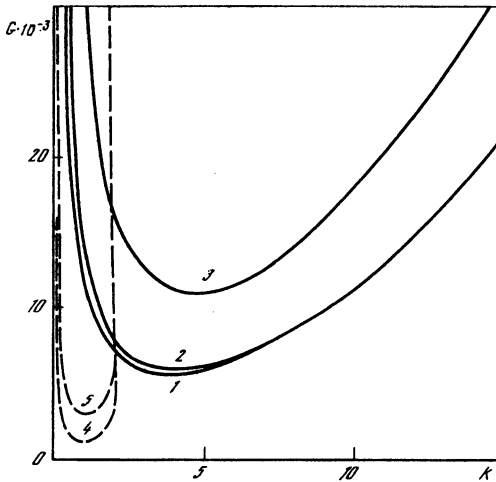
Фиг. 3

Фиг. 3. Нейтральные кривые для плоских возмущений при умеренных числах Прандтля. $G_v = 0, Pr = 1$ – кривая 1; $G = 1000, Pr = 1; 0, 25; 0, 21; 0, 188$ – кривые 2, 3, 4, 5

Критические возмущения имеют малую длину волны и, локализуясь вблизи границы слоя в областях с отличной от нуля средней скоростью, сносятся основным потоком. При заданном волновом числе имеются два нейтральных возмущения, различающиеся знаком фазовой скорости, с одним и тем же критическим значением числа Грасгофа. Нейтральные кривые для этих колебательных возмущений при различных значениях числа Прандтля приведены на фиг. 3.

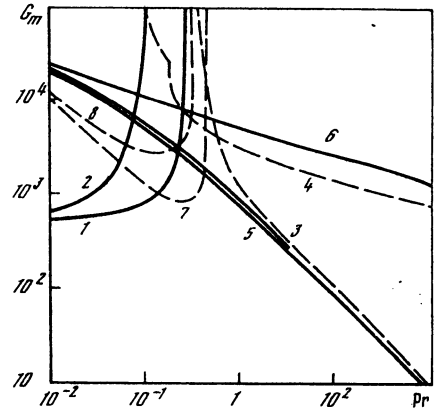
Кривая 1 задает область неустойчивости относительно бегущих волн в отсутствие вибраций, линия 2 показывает деформацию этой области неустойчивости при вибрационном воздействии с $G_v = 1000$. Порог устойчивости повышается, но область неустойчивости значительно расширяется в сторону коротких волн и заметно увеличивается волновое число критического возмущения.

Следует напомнить, что в рассматриваемом высокочастотном приближении частота колебательных возмущений должна быть много меньше частоты колебаний сосуда. Поскольку частота возмущений растет примерно пропорционально k , в области очень коротковолновых возмущений принятое приближение может потребовать более высокой частоты колебаний сосуда. Ситуация остается, однако, благополучной в связи с тем, что нестационарность возмущений связана со сносом их основным потоком, т.е. колебания скорости и температуры происходят с обычными гидродинамическими временами. Так, безразмерная частота возмущений с $k = 8$ и $Pr = 7$ для $G_v = 1000$ равна 44,6 и для слоя воды толщиной 2 см размерная частота возмущений оказывается менее 0,5 Гц. Для слоя воздуха ($Pr = 0,7$) условия реализации высокочастотного приближения менее благоприятны – размерная частота оказывается порядка 20 Гц. Для возмущений, волновые числа которых несущественно изменились под влиянием вибрационного воздействия, проблемы применимости высокочастотного приближения не возникает, так как фазовая скорость возмущений под влиянием вибраций несколько уменьшается вместе со скоростью основного течения.



Фиг. 4

Фиг. 4. Нейтральные кривые для спиральных возмущений $Pr = 0,1$, $G_v = 0$ (линии 1 – четные, 2 – нечетные, 4 – колебательные возмущения), $G = 1000$ (линии 3 – монотонные, 5 – колебательные возмущения)



Фиг. 5

Фиг. 5. Карта устойчивости, сплошные линии монотонные, штриховые – колебательные возмущения. Линии 1, 3, 5, 7 – $G = 0$; линии 2, 4, 6, 8 – $G = 1000$

Особенно сильно вибрации влияют на длинноволновые возмущения при малых числах Прандтля. Этот эффект иллюстрируют кривые 3–5', которые показывают изменение области неустойчивости для $G_v = 1000$ с уменьшением числа Прандтля. При Pr , близком к 0,21, нейтральная кривая разделяется на две (кривые 4 и 4'). С дальнейшим изменением числа Прандтля на плоскости kG образуется замкнутая область неустойчивости (кривая 5'), которая при $Pr < 0,188$ схлопывается. Ветвь нейтральной кривой 5 с уменьшением числа Прандтля сдвигается в область больших значений G и k .

3. Спиральные возмущения. Рассмотрим влияние вибраций на пространственную спиральную моду неустойчивости. Возмущения теперь имеют отличные от нуля все три компонента скорости и периодичны в перпендикулярном к основному потоку направлению ($k_y = k$, $k_z = 0$). Линеаризованные около плоскопараллельного течения уравнения (1.1) после исключения давления и v_y дают для амплитуд нормальных возмущений следующие уравнения:

$$\Delta^2 v_x - k^2 \theta = -\lambda \Delta v_x, \quad \Delta v_z - G v_0' v_x = -\lambda v_z - \frac{G_v}{G} \theta$$

$$\frac{1}{Pr} \Delta \theta - G T_0' v_x - G v_z = -\lambda \theta \quad (3.1)$$

На ограничивающих твердых плоскостях поставим условия

$$x = \pm 1: \quad v_x = v_x' = v_z = 0, \quad \theta = 0 \quad (3.2)$$

Система уравнений (3.1) содержит четные по x операторы и симметричные граничные условия, поэтому все решения (3.1), (3.2) можно разделить на два класса: четные и нечетные решения. В связи с несамосопряженностью вещественных операторов задачи (3.1), (3.2) возможны нейтральные возмущения с ненулевой фазовой скоростью. Решение краевой задачи строилось методом ортогонализации отдельно для четных и нечетных решений с постановкой граничных условий при $x = 0$.

На фиг. 4 приведены нейтральные кривые спиральных возмущений для $G_v = 0$ (линии 1, 2 и 4) и $G_v = 1000$ (линии 3, 5) и $Pr = 0,1$. Штриховой линией показаны нейтральные кривые для колебательных возмущений.

Даже в отсутствие вибраций нейтральные кривые монотонных четных (линия 1) и нечетных (линия 2) возмущений различаются слабо [6]. Кривая для нечетных возмущений всегда лежит несколько выше. При наличии вибрационного воздействия различие в положении нейтральных кривых для четных и нечетных возмущений быстро исчезает с ростом G_v . Этот эффект хорошо понятен с точки зрения локализации спиральных монотонных возмущений, порожденных неустойчиво стратифицированными слоями жидкости вблизи границ. С увеличением G_v эти слои раздвигаются и различие в условиях для возмущений разной четности в центре слоя исчезает. Одновременно с увеличением G_v наблюдается заметное повышение устойчивости относительно монотонных возмущений.

Возникновение колебательной спиральной моды неустойчивости связано с вертикальными колебаниями устойчиво стратифицированного слоя жидкости, расположенного в центральной части полости. Поэтому естественно существование только четных нейтральных возмущений, имеющих отличную от нуля вертикальную компоненту скорости при $x = 0$. Возмущения появляются в виде пары волн с разными знаками фазовой скорости. С увеличением вибрационного числа Грасгофа величина фазовой скорости волн уменьшается: $c = 0,035$ при $G_v = 0$ и $c = 0,018$ при $G_v = 1000$ ($Pr = 0,3$).

В отсутствие вибраций колебательная мода существует в области малых чисел Прандтля до $Pr < 0,456$. С увеличением G_v этот интервал уменьшается.

4. Карта устойчивости. Минимизированные по волновому числу пороговые значения числа Грасгофа для всех рассмотренных типов возмущений приведены на фиг. 5. Сплошные линии отмечают границу устойчивости относительно монотонных возмущений, штриховые – относительно колебательных. Линии 1, 3, 5 и 7 являются соответственно границами устойчивости относительно плоской гидродинамической моды, плоской колебательной моды, спиральной монотонной и спиральной колебательной моды для $G_v = 0$. Эти результаты хорошо согласуются с результатами [2], кроме кривой для нечетной спиральной монотонной моды (верхняя линия 5, соответствующая нечетной моде, не пересекает нижнюю линию четной моды). Смена устойчивости относительно четной и нечетной мод при больших числах Прандтля, обнаруженная в [2, 6], связана с недостаточной точностью счета в этой области параметров.

Для $G_v = 1000$ линии, определяющие границу устойчивости относительно возмущений разного типа, отмечены четными номерами, на единицу большими соответствующих кривых в отсутствие вибраций.

В области малых чисел Прандтля по-прежнему наиболее опасной остается плоская гидродинамическая мода. Стабилизация течения при вибрационном воздействии оказывается более сильной для больших значений числа Прандтля и при $Pr = 0,07$ более опасными становятся спиральные колебательные возмущения.

Как указывалось, колебательные спиральные возмущения связаны с вертикальными колебаниями устойчиво стратифицированного среднего слоя жидкости и представляют собой две волны, различающиеся знаком фазовой скорости и распространяющиеся в поперечном к потоку направлении. С увеличением вибрационного числа Грасгофа область существования этих волн в сторону больших чисел Прандтля уменьшается. При $G_v = 1000$ колебательная спиральная неустойчивость существует при $Pr < 0,34$. Примерно при этом же числе Прандтля более опасной становится плоская колебательная мода (кривая 4). Вибрации более эффективно подавляют спиральную релей-бенаровскую моду (кривые 5 и 6) и для $G_v = 1000$ (в отличие от $G_v = 0$) критические числа Грасгофа плоских тепловых волн лежат ниже для всех $Pr > 0,26$. Вибрационное воздействие раздвигает область существования плоских тепловых волн в сторону меньших чисел Прандтля.

Заключение. Продольные высокочастотные вибрации повышают порог устойчивости адвективного течения для всех чисел Прандтля. Однако стабилизирующее влияние на разные моды неустойчивости оказывается не одинаковым и при больших Rr наиболее опасной оказывается плоская тепловая мода, которая в отсутствие вибраций не была самой опасной ни при каких значениях числа Прандтля.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (код проекта 94-01-01730).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бирх П.В. О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости // ПМТФ. 1966. № 3. С. 69–72.
2. Gershuni G.Z., Laure P., Myznikov V.M. et al. On the stability of plane parallel advective flows in long horizontal layers // Microgravity Q. 1992. V. 2. № 3. P. 141–151.
3. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Плоскопараллельные адвективные течения в вибрационном поле // Инж.-физ. журн. 1989. Т. 56. № 2. С. 238–242.
4. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Непомнящий А.А. Устойчивость конвективных течений. М.: Наука, 1989. 319 с.
5. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Мызников В.М. Об устойчивости плоскопараллельного конвективного течения жидкости в горизонтальном слое // ПМТФ. 1974. № 1. С. 95–100.
6. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Мызников В.М. Устойчивость плоскопараллельного конвективного течения жидкости в горизонтальном слое относительно пространственных возмущений // ПМТФ. 1974. № 5. С. 145–147.

Пермь

Поступила в редакцию
18.V.1996