МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 1 • 1998

УДК 532.59:532.527

© 1998 г. А.Х. СЕКОЯН, А.М. ТЕР-КРИКОРОВ

ВНУТРЕННИЕ ВОЛНЫ ОТ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ВИХРЕЙ

Получено линеаризированное уравнение внутренних волн, возникающих в идеальном стратифицированном газе под воздействием потенциальных вихрей, сосредоточенных в вертикальном цилиндре. Задача Коши для уравнения внутренних волн с правой частью, зависящей от интенсивности вихря, решается методом интегральных преобразований. Для случая вихревой нити найдено точное решение. Когда вихрь экспоненциально стратифицирован по вертикали, приближенные асимптотические формулы получены методом стационарной фазы. Найдены выражения для фазовой скорости и амплитуды радиальной волны, бегущей от цилиндрического вихря.

1. Основные уравнения. Рассматривается движение идеального газа, заполняющего в поле силы тяжести трехмерное пространство. Ось z декартовой системы координат x, y, z направлена вертикально вверх. Стратификация устойчива.

Пусть ζ – отклонение по вертикали жидкой частицы от положения равновесия, u, v – горизонтальные компоненты вектора скорости, p – давление, ρ – плотность, g – ускорение силы тяжести, t – время, a – локальная скорость звука; $\alpha(z)$, $\rho_0(z)$, $p_0(z)$ – энтропия, плотность и давление в состоянии равновесия. Если в качестве независимых переменных принять x, y, ζ, t, то энтропия $\alpha = p/\rho^\varkappa$ сохраняется в частице, и поэтому

$$\alpha = \alpha(\zeta) = p_0(\zeta)/\rho_0^\varkappa(\zeta)$$

Обобщенный потенциал и функция тока вводятся при помощи равенств

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x}$$

Уравнения движения в осесимметричном случае при отсутствии источников и стоков принимают следующий вид [1]:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\partial t} + \Omega\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial r}D^2 z = -\frac{\partial H}{\partial r} \tag{1.1}$$

$$\left(\frac{N^2}{g} - \frac{\partial}{\partial\zeta}\right)\frac{V^2}{2} + gz + z_\zeta D^2 z = \left(\frac{N^2}{g} - \frac{\partial}{\partial\zeta}\right)H \tag{1.2}$$

$$\Delta_2\psi = -\Omega \tag{1.3}$$

$$\Delta_2\varphi + D\ln(z_\zeta a^{2/(\varkappa-1)}) = 0 \tag{1.4}$$

$$\frac{V^2}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)^2, \quad D = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{\partial}{\partial r}$$

$$H=\frac{a^2}{\varkappa-1}+\frac{V^2}{2}+gz,\quad r^2=x^2+y^2,\ a^2=\varkappa\frac{p}{\rho},\quad \varkappa=\frac{c_p}{c_v}$$

$$N^2(\zeta)=\frac{g}{\varkappa}\frac{\alpha'(\zeta)}{\alpha(\zeta)}>0,\ \Delta_2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}$$

Справедлив закон сохранения потенциального вихря [1]

$$D\Gamma=0,\quad \Gamma=\left(\frac{\Omega}{z_\zeta a^{2/(\varkappa-1)}}\right) \tag{1.5}$$

Функция Γ с точностью до множителя, зависящего от ζ, пропорциональна проекции вектора вихря на нормаль к поверхности постоянной энтропии [1].

2. Линеаризация уравнений в случае, когда потенциальные вихри сосредоточены в цилиндре. Пусть

$$\Gamma=\Gamma_0(\zeta)(1-\theta(r-r_0)),\quad \Omega_0(\zeta)=\Gamma_0(\zeta)(a_0(\zeta))^{-2/(\varkappa-1)} \tag{2.1}$$

где $\Gamma_0(\zeta)$ – известная непрерывно дифференцируемая функция, а $\theta(x)$ – функция Хевисайда, равная единице при $x>0$ и нулю при $x\leqslant 0$.

Для достаточно медленных движений, когда акустические колебания малы по сравнению с колебаниями плавучести, можно считать, что локальная скорость звука сохраняется в точке и поэтому $a=a_0(\zeta)$. Линеаризируя уравнение (1.5) и подставляя в него (2.1), получаем

$$\Omega=\Omega_0(\zeta)(1-\theta(r-r_0)) \tag{2.2}$$

Подставляя (2.2) в уравнение (1.3), получаем

$$\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\right)=-\Omega_0(\zeta)\theta(r_0-r) \tag{2.3}$$

Интегрируя уравнение (2.3) при условии, что тангенциальная скорость $\partial\psi/\partial r$ непрерывна и обращается в нуль на бесконечности, получаем

$$\frac{\partial\psi}{\partial r}=-\frac{\Omega_0(\zeta)}{2}\eta(r),\quad \eta(r)=r\theta(r_0-r)+\frac{r_0^2}{r}\theta(r-r_0) \tag{2.4}$$

В пределе при $r_0\to 0$ можно получить вихревую нить. Пусть $\Gamma_0^*(\zeta)$ – циркуляция вектора скорости по сечению цилиндра $r=r_0$ горизонтальной плоскостью $\zeta=\text{const}$. Предположим, что циркуляция сохраняет свое значение при $r_0\to 0$. В силу теоремы Стокса

$$\Omega_0(r,\zeta)\pi r_0^2=\Gamma_0^*(\zeta) \tag{2.5}$$

Подставляя (2.5) в (2.4), получаем при $r_0\to 0$ для случая вихревой нити

$$\frac{\partial\psi}{\partial r}=-\frac{\Gamma_0^*(\zeta)}{2\pi r},\quad r>0 \tag{2.6}$$

Предположим, что радиальная скорость $\partial\varphi/\partial r$ мала по сравнению с единицей. Тогда из (1.5) и (2.6) получаем

$$\frac{V^2}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)^2=\frac{\Omega_0^2(\zeta)}{8}\eta^2(r),\quad \eta^2=r^2\theta(r_0-r)+\theta(r-r_0)\frac{r_0^4}{r^2} \tag{2.7}$$

Вычислим $\Delta_2(V^2/2)$, учитывая, что $h'(x) = \delta(x)$, $x\delta(x) = 0$, где $\delta(x)$ – дельта-функция. Из (2.7) получаем

$$\Delta_2 \frac{V^2}{2} = \frac{\Omega_0^2(\zeta)}{2}(\beta(r) - r_0), \quad \beta(r) = \theta(r_0 - r) + \frac{r_0^4}{r^4}\theta(r - r_0) \tag{2.8}$$

Линеаризируя уравнение (1.1) и используя (2.2), получаем

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial t} + \Omega \frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{\partial H}{\partial r}$$

В силу (1.1) и (2.4)

$$-\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial t} - \frac{\Omega_0^2(\zeta)}{2} r\theta(r_0 - r)$$

Применяя операцию $r^{-1}\partial/\partial r(rH)$, получаем

$$-\Delta_2 H = \frac{\partial(\Delta_2 \varphi)}{\partial t} - \Omega_0^2(\zeta)\left(\theta(r_0 - r) - \frac{r_0}{2}\right) \tag{2.9}$$

Уравнение (1.2) после линеаризации принимает вид

$$\Delta_2 \varphi = -\frac{\partial^2 w}{\partial \zeta \partial t}, \quad w = z - \zeta \tag{2.10}$$

Подставляя (2.10) в (2.9), получаем

$$\Delta_2 H = -\frac{\partial^3 w}{\partial \zeta \partial t^2} + \Omega_0^2(\zeta)\left(\frac{r_0}{2} + \theta(r_0 - r)\right) \tag{2.11}$$

Линеаризуя уравнение (1.4), преобразуем его к виду

$$\left(\frac{N^2}{g} - \frac{\partial}{\partial \zeta}\right) H = \left(\frac{N^2}{g} - \frac{\partial}{\partial \zeta}\right)\frac{V^2}{2} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + N^2(\zeta + w) \tag{2.12}$$

Применяя оператор Δ_2 к равенству (2.12), получаем

$$\left(\frac{N^2}{g} - \frac{\partial}{\partial \zeta}\right)\Delta_2 H = \left(\frac{N^2}{g} - \frac{\partial}{\partial \zeta}\right)\Delta_2\left(\frac{V^2}{2}\right) + \frac{\partial^2 \Delta_2 \omega}{\partial t^2} + N^2 \Delta_2 \omega \tag{2.13}$$

Подставляя в (2.13) равенства (2.11) и (2.8), получаем

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\Delta w - \frac{N^2}{g}\frac{\partial w}{\partial \zeta}\right) + N^2 \Delta_2 w = \frac{\gamma(r)}{2}\left(\frac{N^2}{g} - \frac{\partial}{\partial \zeta}\right)\Omega_0^2(\zeta) \tag{2.14}$$

$$\gamma(r) = \theta(r_0 - r) - \frac{r_0^4}{r^4}\theta(r - r_0) \tag{2.15}$$

Рассматриваются движения, начинающиеся из состояния покоя

$$w = \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \quad (t = 0) \tag{2.16}$$

3. Случай N = const, Ω_0 = const. В этом случае можно искать решение уравнения (2.14) при начальных условиях (2.16), не зависящие от ζ. Из (2.15) и (2.16)

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\Delta_2 w) + N^2 \Delta_2 w = \frac{N^2 \gamma(r)}{2g}\Omega_0^2, \quad w = \frac{\partial w}{\partial t} = 0; \quad t = 0 \tag{3.1}$$

Уравнение (3.1) с учетом выражения (2.15) для $\gamma(r)$ легко интегрируется сначала по t, а затем по r. Воспользовавшись еще формулой (2.5), получим

$$w = \frac{(\Gamma_0^*)^2}{8\pi^2 g}(1-\cos(Nt))\left(\frac{r^2}{r_0^4}\theta(r_0 - r) - \frac{1}{r^2}\theta(r - r_0)\right)$$

В случае вихревой нити при $r > 0$

$$w = -\frac{\Gamma_0^2}{8\pi^2 g r^2}(1-\cos(Nt)) \tag{3.2}$$

где Γ_0 – циркуляция вектора скорости по контуру, охватывающему вихревую нить. Из формулы (3.2) следует, что цилиндры $r = \text{const}$ совершают вертикальные колебания около положения равновесия с частотой Брента – Вяйсяля N.

4. Экспоненциально стратифицированный вихрь. Пусть

$$\Omega_0(\zeta) = C_0 \exp(\varepsilon\zeta), \quad \varepsilon > 0$$

Если искать решение задачи (2.14)–(2.16) в виде

$$w = \omega(r, \zeta, t)\exp(\varepsilon\zeta)$$

то получим уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\Delta_2\omega - \delta^2\omega) + N^2\Delta_2\omega = \frac{\delta^2}{2\varepsilon}C_0^2\gamma(r) \tag{4.1}$$

$$\delta^2 = \varepsilon\left(\frac{N^2}{g} - \varepsilon\right) > 0$$

Уравнение (4.1) при нулевых начальных условиях будем решать, применяя преобразование Ханкеля

$$\gamma(r) = \int_0^{+\infty} \rho J_0(\rho r)\gamma^*(\rho)d\rho, \quad \gamma^*(\rho) = \int_0^{+\infty} r J_0(\rho r)\gamma(r)dr \tag{4.2}$$

$$\omega = \frac{\delta^2}{2\varepsilon}C_0^2 \int_0^{+\infty} \gamma^*(\rho)\rho J_0(\rho)\omega^*(\rho, t)d\rho \tag{4.3}$$

После подстановки выражений (4.2) в уравнение (4.1) получаем уравнение для определения функции ω^*

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(-\rho^2\omega^* - \delta^2\omega^*) - N^2\rho^2\omega^* = 1$$

и после интегрирования этого уравнения с нулевыми начальными условиями получаем

$$\omega^* = -\frac{1}{N^2\rho^2}\left(1 - \cos\left(\frac{N\rho t}{\sqrt{\rho^2 + \delta^2}}\right)\right) \tag{4.4}$$

Подставляя (4.4) в (4.3) и делая замену переменной $\rho = \delta u$, получаем

$$\omega = -\frac{\delta^2}{2\varepsilon N^2}C_0^2 \int_0^{+\infty} \gamma^*(u\delta)J_0(ur\delta)\left(1 - \cos\left(\frac{Ntu}{\sqrt{u^2+1}}\right)\right)\frac{du}{u} \tag{4.5}$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}=-\frac{\delta^2}{2\varepsilon N}C_0^2\int_0^{+\infty}\frac{\gamma^*(u\delta)J_0(ur\delta)}{\sqrt{u^2+1}}\sin\left(\frac{Ntu}{\sqrt{u^2+1}}\right)du \qquad (4.6)$$

Найдем асимптотику интеграла (4.6) при

$$Nt\to\infty,\quad 1<\lambda=\frac{Nt}{r\delta}<\lambda_0<+\infty \qquad (4.7)$$

Заменяя в формуле (4.5) функцию Бесселя ее интегральным представлением, после простых преобразований получим

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}=-\frac{\delta^2}{2\pi\varepsilon N}C_0^2\int_0^{\pi/2}\int_0^{+\infty}\frac{\gamma^*(u\delta)}{\sqrt{u^2+1}}\sin Nt\left(\frac{u}{\sqrt{u^2+1}}+\frac{u}{\lambda}\cos\varphi\right)dud\varphi-$$

$$-\frac{\delta^2}{2\pi\varepsilon N}C_0^2\int_0^{\pi/2}\int_0^{+\infty}\frac{\gamma^*(u\delta)}{\sqrt{u^2+1}}\sin Nt\left(\frac{u}{\sqrt{u^2+1}}-\frac{u}{\lambda}\cos\varphi\right)dud\varphi \qquad (4.8)$$

В силу условия (4.7) стационарная точка имеется только у функции

$$\Phi=\frac{u}{\sqrt{u^2+1}}-\frac{u}{\lambda}\cos\varphi$$

и эта точка (u_0, φ_0) определяется из системы уравнений

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u}=\frac{1}{(u^2+1)^{3/2}}-\frac{u}{\lambda}\cos\varphi=0,\quad \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}=\frac{u}{\lambda}\sin\varphi=0$$

Причем, при $\alpha>1$

$$\varphi_0=0,\quad u_0^2+1=\lambda^{2/3},\quad u_0=\sqrt{\lambda^{2/3}-1}$$

Найдем значение фазы и ее вторых производных в точке (u_0, φ_0)

$$\Phi(u_0,\varphi_0)=u_0\left(\frac{1}{\sqrt{u_0^2+1}}-\frac{1}{\lambda}\right)=\frac{(\lambda^{2/3}-1)^{3/2}}{\lambda},\quad \frac{\partial^2\Phi(u_0,\varphi_0)}{\partial u\partial\varphi}=0$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2}(u_0,\varphi_0)=-\frac{3u_0}{\lambda^{5/3}},\quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}(u_0,\varphi_0)=\frac{u_0}{\lambda}$$

$$D=\frac{\partial^2\Phi(u_0,\varphi_0)}{\partial u}\frac{\partial^2\Phi(u_0,\varphi_0)}{\partial\varphi^2}-\left(\frac{\partial^2\Phi(u_0,\varphi_0)}{\partial u\partial\varphi}\right)^2=\frac{3u_0^2}{\lambda^{8/3}}$$

Применяя к интегралу (4.8) метод стационарной фазы [2], получаем

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}=\frac{\delta^2\Omega_0^2}{2\pi\varepsilon N}\frac{\gamma^*(u_0\delta)}{\sqrt{u_0^2+1}}\frac{\lambda^{4/3}}{u_0\sqrt{3}}\frac{2\pi}{Nt}\sin Nt\left(\frac{(\lambda^{2/3}-1)^{3/2}}{\lambda}-\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=-\frac{\delta\Omega_0^2\gamma^*(u_0\delta)}{\varepsilon Nu_0r\sqrt{3}}\sin\left(\sqrt{(Nt)^{2/3}-r\delta^{2/3}}-\frac{\pi}{4}\right) \qquad (4.9)$$

Вычислим теперь приближенное значение для $\gamma^*(u_0\delta)$ при малых значениях параметра $\alpha=r_0u_0\delta$. В силу (4.2) и (2.15) получаем

$$\frac{\gamma^*(u_0\delta)}{r_0^2}=\frac{1}{\alpha^2}\int_0^{\alpha}xJ_0(x)dx-\alpha^2\int_{\alpha}^{+\infty}J_0(x)\frac{dx}{x^3},\quad \alpha=u_0r_0\delta$$

Интегрируя по частям и воспользовавшись формулами [3]

$$J_0(x)=1-\frac{x^2}{4}-\frac{x^4}{64}+\ldots,\quad J_1(x)=\frac{x}{2}-\frac{x^3}{16}+\ldots,\quad J_2=\frac{x^2}{8}-\ldots$$

$$\int\limits_{\alpha}^{+\infty}\frac{J_0(x)}{x}dx=-C-\ln\frac{\alpha}{2}+O(\alpha^2),\quad \int\limits_{\alpha}^{+\infty}J_2(x)dx=\frac{1}{2}+O(\alpha^2),\quad J_0'(z)=J_1(x)$$

$$\int\limits_0^{\alpha}xJ_0(x)dx=\alpha J_1(\alpha)=\frac{\alpha^2}{2}-\frac{\alpha^4}{16}+\ldots$$

где $C = 0{,}5772...$ – постоянная Эйлера, получаем

$$\gamma^*(u_0\delta)=r_0^4u_0^2\delta^2\left(\frac{3}{16}-\frac{C}{4}-\frac{1}{4}\ln\frac{r_0u_0\delta}{2}\right)+O((r_0u_0\delta)^2) \tag{4.10}$$

Подставляя (4.10) в уравнение (4.9) и полагая $\pi r_0^2C_0 = \Gamma_0^*$, получаем

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}=-\frac{(\Gamma_0^*)^2\delta^{8/3}}{16\varepsilon N\sqrt{3}}\frac{A(Nt,r\delta)}{r^{1/3}}\times$$

$$\times(3-4C+4\ln 2-4\ln(r_0\delta^{2/3}r^{-1/3}A(Nt,r_0,\delta)))\sin\left(A^3(Ntr\delta)-\frac{\pi}{4}\right) \tag{4.11}$$

$$A(Nt,r\delta)=\sqrt{(Nt)^{2/3}-(r\delta)^{2/3}},\quad \delta=\sqrt{\varepsilon\left(\frac{N}{g}-\varepsilon\right)}$$

Заметим, что в силу (4.11) амплитуда колебаний зависит от r_0 и стремится к бесконечности при $\Gamma_0^* = \mathrm{const}$, $r_0 \to 0$, так что в этом случае невозможен переход к вихревой нити. Поверхность постоянной фазы есть цилиндр

$$(Nt)^{2/3}-(r\delta)^{2/3}=\mathrm{const}$$

Фазовая скорость распространения волны по радиусу определяется формулой

$$c=\frac{dr}{dt}=\sqrt[3]{\frac{N^2r}{\delta^2t}}$$

Представляет интерес исследование различных новых частных случаев распределения вихря по вертикали, а также исследование асимптотики в общем случае.

Заключение. Если в покоящейся стратифицированной жидкости в начальный момент времени возникает цилиндрическая область, заполненная потенциальными вихрями, то это приводит к развитию внутренних волн, причем волны стоячие в том случае, когда значение вихря внутри цилиндра постоянно, и прогрессивные, если вихрь стратифицирован по высоте.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-04599).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тер-Крикоров А.М.* Вихри и внутренние волны в стратифицированной жидкости // ПММ. 1995. Т. 59. № 4. С. 599–606.
2. *Федорюк М.В.* Метод перевала. М.: Наука, 1977. 368 с.
3. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Наука, 1977. 830 с.

Москва

Поступила в редакцию
16.IX.1996