МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 6 • 1997

УДК 532.527

© 1997 г. Ю.Д. ШМЫГЛЕВСКИЙ

О ВИХРЕВЫХ ОБРАЗОВАНИЯХ В ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПОТОКАХ ВЯЗКОЙ И ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Получено аналитическое представление одиночных вихревых образований с различными поперечными сечениями в плоскопараллельных потоках вязкой и идеальной жидкости. Найдено также течение, в котором одна из линий тока имеет точку возврата. Вихрь скорости в этих течениях постоянен, поэтому найденные решения уравнений, описывающих кинематические переменные в потоках идеальной жидкости, удовлетворяют одновременно и уравнениям Навье – Стокса.

Вихревым образованием в плоскости независимых переменных здесь называется конечная односвязная область, целиком заполненная замкнутыми линиями тока и содержащая из особых точек только центр.

Впервые вихревое образование идеальной жидкости (шаровой вихрь) было исследовано Хиллом в осесимметричном потоке [1, 2]. Найденное Хиллом решение удовлетворяет и уравнениям Навье – Стокса [3]. Крудели [4–6] получил для осесимметричных течений вязкой жидкости без закрутки вокруг оси симметрии и при линейной зависимости вихря от радиуса цилиндрической системы координат два класса решений, не включающих в себя шаровой вихрь Хилла. Примеров изолированных вихревых образований в [4–6] нет. В [7] найдено решение, описывающее сфероидальный вихрь в потоке идеальной или вязкой жидкости без закрутки вокруг оси симметрии. В случае идеальной жидкости это решение было известно еще Хиллу [2], установившему, что этот вихрь сопрягается с внешним потенциальным течением только при сферической форме вихря. В [8] приведены три класса осесимметричных течений идеальной и вязкой жидкости с закруткой вокруг оси симметрии также при линейной зависимости вихря скорости от радиуса. Составляющие вектора скорости в меридиональной плоскости течения не связаны в этом решении с закруткой, которая в решении потенциальна, и определяются в двух из трех классов формулами Крудели. Третий класс дает алгебраическое представление функции тока и определяет, в частности, сфероидальные вихревые образования [9]. Это решение позволило исследовать некоторые свойства "разрушения вихря" [10]. Один из классов решений [8] привел к обнаружению вихревых колец с различной формой поперечных сечений [9, 11], монолитного вихревого образования типа "разрушения вихря" и пару вихревых колец [11]. В работе [9] представлена также цепочка вихрей в плоскопараллельном потоке. Кинематические характеристики всех перечисленных здесь течений не зависят от числа Рейнольдса, но от него, вообще говоря, зависит давление.

Использование постоянного вихря скорости в плоскопараллельном случае выделит из решений уравнений Навье – Стокса узкий класс. Решение граничных задач в его рамках привело лишь к определению течений с прилипанием на квадратной параболе и на эллипсе [12]. В то же время серия вихревых образований, обнаруженных при осевой симметрии [8–11], вызывает желание найти подобные образы течений и в плоскопараллельном случае. Это оказывается возможным.

Такие течения описываются уравнениями

$$u_x + v_y = 0 \tag{1}$$

$$uu_x + vu_y + p_x = \varepsilon\Delta u,\ uv_x + vv_y + p_y = \varepsilon\Delta v \tag{2}$$

где x, y – декартовы координаты, u, v – соответствующие составляющие вектора скорости, p – давление, деленное на постоянную плотность, Δ – оператор Лапласа, ε – единица, деленная на число Рейнольдса. Исключая p из уравнения (2), а также вводя функцию тока ψ на основании (1) и вихрь скорости ω получаем

$$\Delta\psi = \omega \tag{3}$$

$$\psi_y\omega_x - \psi_x\omega_y = \varepsilon\Delta\omega \tag{4}$$

$$d\psi = udy - vdx,\quad u_y - v_x = \omega \tag{5}$$

При $\omega = \mathrm{const}$ уравнение (4) удовлетворено, а уравнению (3) удовлетворяет $\psi = \varphi(x, y) + \omega x^2/2$, где φ – гармоническая функция.

Очевидного пути поиска функции φ, приводящей к вихревым образованиям, нет. Набор решений в осесимметричном случае [8] позволил вести поиск среди явных выражений для функции тока. Здесь будет использован тот же подход.

Почленное дифференцирование уравнения (3) по x и использование (5) приводит к уравнению Лапласа $\Delta v = 0$. Разделение переменных в виде $v = X(x)Y(y)$ дает

$$X'' - \lambda X = 0,\quad Y'' + \lambda Y = 0,\quad \lambda = \mathrm{const}$$

Здесь будет рассмотрен только случай $\lambda = 0$. При этом

$$v = (c_1x + c_2)(c_3y + c_4) \tag{6}$$

В этой формуле и в дальнейшем буква c, отмеченная цифровым индексом, означает произвольную постоянную. Интегрирование уравнений (1) и второго (5) при этом значении v дает

$$u = -c_3(\tfrac{1}{2}c_1x^2 + c_2x + c_5) + c_1(\tfrac{1}{2}c_3y^2 + c_4y + c_6) + \omega y \tag{7}$$

Интегрирование первого соотношения (5) с использованием (6) и (7) приводит к равенству

$$\psi = -(\tfrac{1}{2}c_1x^2 + c_2x + c_5)(c_3y + c_4) + c_1(\tfrac{1}{6}c_3y^3 + \tfrac{1}{2}c_4y^2 + c_6y + c_7) + \tfrac{1}{2}\omega y^2$$

Из (6), (7) следует, что $\Delta u \equiv \Delta v \equiv 0$. Отсюда и из (2) вытекает, что p в этом решении не зависит от ε.

Для иллюстрации полученного решения принято $c_2 = c_4 = c_5 = c_7 = 0$, $c_1 = 2$, $c_3 = 1$, $c_6 = (n + 3)/2$, $\omega = 4$.

В этом случае

$$\psi = y[\tfrac{1}{3}(y+3)^2 - x^2 + n] \tag{8}$$

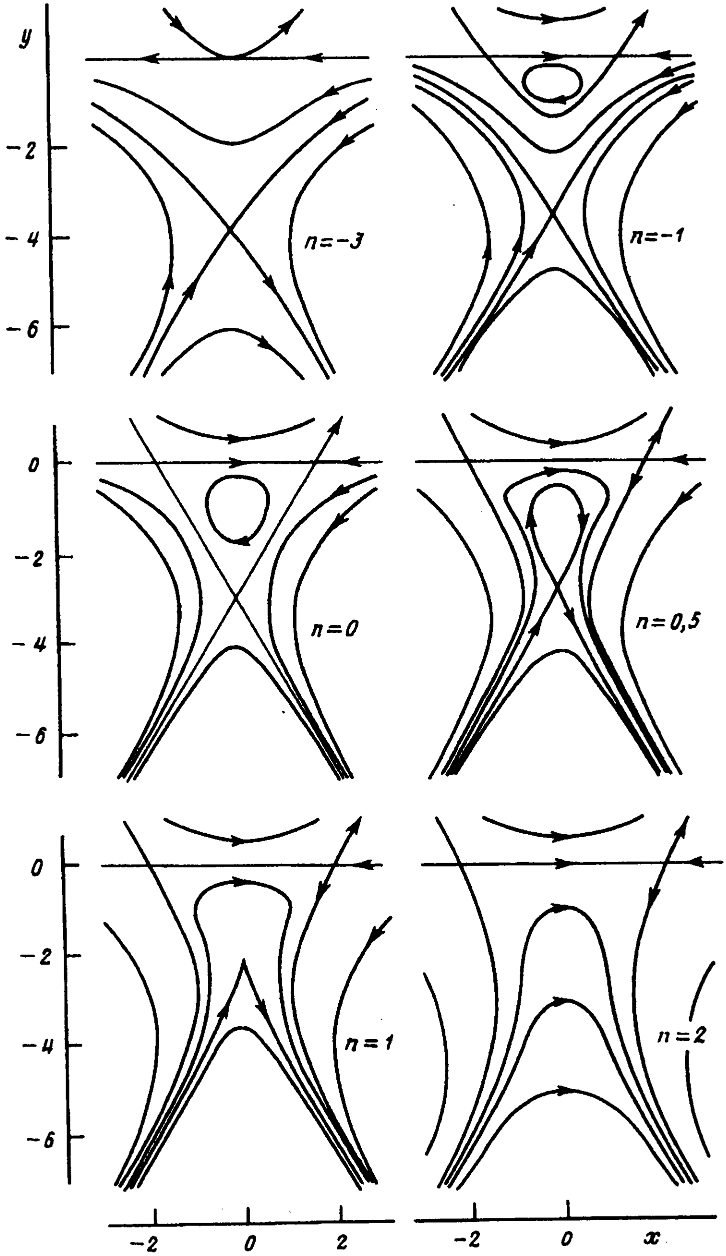
$$u = y^2 + 4y - x^2 + 3 + n,\quad v = 2xy \tag{9}$$

$$p = -\tfrac{1}{2}(x^4 + y^4) - x^2y^2 + (3+n)(x^2 - y^2) - 4y^2 + c_8$$

и примеры будут рассмотрены для различных значений n.

На фигуре изображены линии тока, стрелки указывают направление течения.

Из (8) следует, что при всех n прямая $y = 0$ является линией тока $\psi = 0$. При $n < -3$ вихревых образований нет. При $n = -3$ линия тока $\psi = 0$, имеющая уравнение $y = -3 + \sqrt{3(x^2 - n)}$, касается линии тока $\psi = 0$, имеющей уравнение $y = 0$, при $x = y = 0$. Как видно из (9), в этой точке имеет место торможение, $u = v = 0$. Другая точка торможения имеет координаты $x = 0$, $y = -4$.



Решение (8); линии тока при различных n

При $-3 < n < 0$ вихревое образование ограничено прямой $y = 0$ и дугой гиперболы $y = -3 + \sqrt{3(x^2 - n)}$, вдоль которой также $\psi = 0$. На фигуре картина линий тока показана при $n = -1$. Из точек торможения $x = \pm\sqrt{2}$, $y = 0$ и $x = 0$, $y = -2 - \sqrt{2}$ являются для функции ψ седловыми, а $x = 0$, $y = -2 + \sqrt{2}$ – центром.

При $n = 0$ вихревое образование ограничено равносторонним треугольником, образованным пересечением прямых линий тока $y = 0$ и $y = -3 \pm \sqrt{3}x$. Вершины треугольника $x = \pm\sqrt{3}$, $y = 0$ и $x = 0$, $y = -3$ являются для функции ψ седловыми точками, а точка $x = 0$, $y = -1$ – центром. Центр и точка пересечения биссектрис треугольника совпадают. Переход к полярным координатам r, ϑ с полюсом в точке $x = 0$, $y = -1$ по формулам $z = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta - 1$ преобразует функцию ψ к виду

$$\psi = \tfrac{1}{3}(r\sin\vartheta - 1)[(4\sin 2\vartheta - 3)r^2 + 4r\sin\vartheta + 4] = -\tfrac{1}{3}(r^3\sin 3\vartheta - 3r^2 + 4) \qquad (10)$$

Эта функция имеет период $2\pi/3$ по переменной ϑ.

При $0 < n < 1$ вихревое образование ограничено гладкой кривой с единственной точкой ее излома $x = 0$, $y = -2 - \sqrt{1-n}$. Эта седловая для функции ψ точка вместе с таковыми $x = \pm\sqrt{3+n}$, $y = 0$ и центром $x = 0$, $y = -2 + \sqrt{1-n}$ являются точками торможения. Картина линий тока этого типа на фигуре изображена при $n = {}^1/_2$.

Поведение линий тока $\psi = \mathrm{const}$, полученное при $n < 1$, топологически эквивалентно в изображенных на фигуре областях поведению линий тока осесимметричных течений, рассмотренных в [11], вне оси симметрии соответствующих областей.

При $n = 1$ вихревых образований нет. Линия тока $\psi = {}^8/_3$ имеет при $x = 0$, $y = -2$ точку возврата. Касательная к линии тока в этой точке вертикальна. Точки $x = \pm 2$, $y = 0$ являются седловыми.

При $1 < n$ вихревых образований также нет. Точки $x = \pm\sqrt{3+n}$, $y = 0$ являются для функции ψ седловыми. В них $u = v = 0$. Пример такого поведения линий тока изображен на фигуре при $n = 2$.

Наличие точек возврата линий тока, пример которого получен здесь при $n = 1$, было замечено в [11] при рассмотрении серии решений, содержащей, в частности, парные вихри. Обращают на себя внимание вихревые образования, ограниченные кривыми с точками излома при $n = -1, 0, {}^1/_2$. Подобные образования были получены в [11] при рассмотрении осесимметричных течений.

Выражение в полярных координатах для функции тока с треугольным вихревым образованием подсказывает вид решений с периодом по углу $2\pi/k$, где k – целое число. Первое и третье слагаемое в скобках формулы (10) являются гармоническими функциями, а лапласиан от второго слагаемого – постоянная величина. Равенство (3) определяет в этом случае постоянное ω, что приводит к удовлетворению и уравнения (4). В качестве гармонической функции можно взять $r^k\cos k\vartheta$. Тогда решение системы (3), (4) имеет вид

$$\psi = ar^k\cos k\vartheta + br^2 + c, \quad \omega = 4b \qquad (11)$$

где a, b, c – постоянные. Среди этих решений могут найтись такие, которые описывают вихревые образования, ограниченные криволинейными многоугольниками. Например, при $k = 4$, $a = -3 \mp \sqrt{8}$, $b = (-2 \mp \sqrt{8})m$, $c = m^2$, где $m = \mathrm{const}$, равенства (11) в декартовых координатах принимают вид

$$\psi = [x^2 - (3 \pm \sqrt{8})y^2 \pm m][y^2 - (3 \pm \sqrt{8})x^2 \pm m], \quad \omega = -(8 \pm 4\sqrt{8})m$$

В них берутся либо верхние, либо нижние знаки. Это решение дает пример четырехугольного вихревого образования, ограниченного при $m > 0$ двумя парами ветвей гипербол с соответствующими знаками в определяющих их равенствах

$$x^2 - (3 \pm \sqrt{8})y^2 \pm m = 0, \quad y^2 - (3 \pm \sqrt{8})x^2 \pm m = 0$$

Координаты четырех точек пересечения этих гипербол находятся из равенств

$$x^2 = \pm\frac{(2 \pm \sqrt{2})m}{8 \pm 6\sqrt{2}}, \quad y^2 = \pm\frac{(2 \pm \sqrt{2})m}{8 \pm 6\sqrt{2}}$$

В этом решении, как и в (8), вихрь ω постоянен, но оно в отличие от (8) не может быть получено разделением переменных.

Заключение. Найденные изолированные вихревые образования характерны тем, что возникают при аналитических краевых условиях, взятых, например, на окружности конечного радиуса с центром в начале координат. Они, как микроструктура потока, могут появляться в ламинарных течениях без видимых причин. Численные методы недостаточно высокого порядка точности не воспроизведут их, если они целиком располагаются внутри ячеек расчетной сетки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hill M.J.M.* On a spherical vortex // Brit. Ass. Rep. 1893. P. 696–698.
2. *Hill M.J.M.* On a spherical vortex // Phil. Trans. Ser. A. 1894. V. 185. P. 213–245.
3. *Berker R.* Intégration des équations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible // Handbuch der Physik. B. 8/2. Berlin: Springer-Verlag, 1963. S. 1–384.
4. *Crudeli U.* Sui moti di un liquido viscoso (omogeneo) simmetrici rispetto ad un asse // Atti Reale Accad. Naz. dei Lincei. Rend. 1927. Ser. 6. V. 5. N 7. P. 500–504.
5. *Crudeli U.* Una nuova categoria di moti stazionari dei liquidi (pesanti) viscosi entro tubi cilindrici (rotondi) verticali // Atti Reale Accad. Naz. dei Lincei. Rend. 1927. Ser. 6. V. 5. N 10. P. 783–789.
6. *Crudeli U.* Sopra una categoria di moti stazionari dei liquidi (pesanti) viscosi entro tubi cilindrici (rotondi) verticali // Atti Reale Accad. Naz. dei Lincei. Rend. 1927. Ser. 6. V. 6. N 10. P. 397–401.
7. *O'Brien V.* Steady spheroidal vortices – more exact solutions to the Navier – Stokes equation // Quart. Appl. Math. 1961. V. 19. N 2. P. 163–168.
8. *Шмыглевский Ю.Д.* О закрученных течениях идеальной и вязкой жидкостей // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1993. Т. 33. № 12. С. 1905–1911.
9. *Шмыглевский Ю.Д.* О вихревых образованиях в вязкой жидкости // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1994. Т. 34. № 6. С. 955–959.
10. *Шмыглевский Ю.Д.* О "разрушении вихря" // Изв. РАН. МЖГ. 1995. № 3. С. 167–169.
11. *Шмыглевский Ю.Д., Щепров А.В.* Об осесимметричных вихревых образованиях в вязкой жидкости // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1995. Т. 35. № 3. С. 472–476; № 7. С. 1150.
12. *Шмыглевский Ю.Д.* О течениях вязкой жидкости, не зависящих от числа Рейнольдса // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1990. Т. 30. № 6. С. 951–955.

Москва

Поступила в редакцию
4.IV.1996