

УДК 532.52.013.4

© 1997 г. Н.М. АСТАФЬЕВА

## АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЙ ВО ВРАЩАЮЩИХСЯ СФЕРИЧЕСКИХ СЛОЯХ (линейная теория)

Представлены методика и результаты линейного анализа устойчивости течений вязкой несжимаемой жидкости в слое между концентрическими коаксиальными сферами, возникающих в результате вращения одной внутренней сферы. Показано, что характер неустойчивости основного течения в слоях разной толщины различается не только количественно, но и качественно. Критическим для основного течения в тонких слоях является монотонное возмущение в виде системы занимающих всю область течения от полюса до полюса осесимметричных, но несимметричных относительно плоскости экватора кольцевых вихрей со спадающей к полюсам интенсивностью. Критическим в толстых слоях оказывается немонотонное трехмерное возмущение, несимметричное относительно плоскости экватора. Форма критического возмущения зависит от толщины слоя. Проведено сравнение с экспериментом.

Сдвиговое течение несжимаемой вязкой жидкости между концентрическими сферами, вращающимися вокруг общей оси, принято называть сферическим течением Куэтта по аналогии с классическими плоским и цилиндрическим течениями Куэтта.

Аналогия неполная. При малых значениях числа Рейнольдса  $Re$  течение между вращающимися сферами состоит из азимутальной циркуляции вокруг оси вращения и симметричной относительно плоскости экватора меридиональной циркуляции, занимающей всю область течения от полюса до полюса (вид ее определяется соотношением между угловыми скоростями вращения граничных сфер). Естественная замкнутость области движения, неоднородность основного течения и существенная зависимость его от числа Рейнольдса (от  $Re$  зависит не только амплитуда, но и форма основного течения) отличают сферическое течение Куэтта.

Эти отличия приводят к большому разнообразию движений и механизмов возникновения неустойчивости течений во вращающихся сферических слоях.

Экспериментальные и теоретические исследования (см., например, обзор [1]) выявили основные закономерности сферического течения Куэтта. Замкнутость области движения делает толщину слоя критическим параметром и при описании потери устойчивости принято различать "тонкие", "средние" и "толстые" слои. Эксперименты [2–5] показали, что механизмы потери устойчивости и формирующиеся вторичные течения в тонких и толстых сферических слоях существенно различны.

Так, в случае вращения одной внутренней сферы в тонких сферических слоях выполняются условия, необходимые для наступления центробежной неустойчивости, аналогичные условиям в цилиндрическом течении Куэтта (с тем отличием, что здесь они выполняются только в приэкваториальной области). Основное течение теряет устойчивость с соблюдением принципа смены устойчивости. Вторичное течение в виде пары кольцевых вихрей в приэкваториальной области стационарно и обладает теми же симметриями, что и основное. После потери устойчивости основного течения в толстых слоях формируются нестационарные трехмерные вторичные течения.

Изучение устойчивости движений во вращающихся сферических слоях заметно усложняют следующие факторы: отсутствие аналитического решения для основного течения, его существенная зависимость от числа Рейнольдса и неоднородность (даже при малых значениях  $Re$  основное течение имеет все три компоненты скорости и зависит от двух координат). Линейный анализ их устойчивости относительно нормальных возмущений сводится к решению спектральной задачи на собственные значения для системы уравнений в частных производных и представляет собой сложную проблему.

В настоящей работе представлена постановка задачи об устойчивости основного течения по отношению к малым возмущениям. Используется подход, заключающийся в анализе асимптотики возмущения при  $t \rightarrow \infty$  и позволяющий исследовать устойчивость течения без решения спектральной задачи. Эта методика уже использовалась ранее, например при изучении устойчивости колебательной конвекции. Опыт показал эффективность применения такого подхода к задаче об устойчивости движений в сферическом слое [6].

Линейный анализ устойчивости имеет дело с бесконечно малыми экспоненциально растущими возмущениями. Он позволяет найти критическое значение числа Рейнольдса  $Re_L$ , такое, что при числах  $Re$  больше числа  $Re_L$  основное течение неустойчиво, и определить форму наиболее быстро растущего, наиболее опасного возмущения. Однако экспоненциально возмущения растут только на начальном этапе, очень скоро они перестают быть малыми и их поведение не подчиняется линейным уравнениям. Остается вопрос о форме реализуемого течения. Оно является не суперпозицией наиболее опасного возмущения и основного течения, а результатом их нелинейного взаимодействия, в процессе которого наиболее опасное возмущение может потерять свое доминирующее воздействие.

Таким образом, линейный анализ оставляет открытой проблему отбора решения для вторичного течения. К тому же методами линейной теории нельзя получить информацию об устойчивости течения по отношению к возмущениям произвольной амплитуды. Эволюция конечных возмущений, форма и амплитуда вторичного течения могут быть определены только нелинейными методами.

**1. Постановка задачи.** Движение вязкой несжимаемой жидкости в слое между концентрическими коаксиальными сферами, возникающее вследствие вращения одной или обеих граничных сфер относительно их общей оси, описывается решением начально-краевой задачи для системы нелинейных нестационарных уравнений гидродинамики (уравнение непрерывности и система уравнений Навье – Стокса с соответствующими условиями на границах и начальными условиями).

Решение задачи (для краткости будем называть ее "нелинейной") определяется значениями трех характерных параметров

$$Re = \omega_1 r_1^2 / \nu, \quad \delta = (r_2 - r_1) / r_1, \quad \omega = \omega_2 / \omega_1$$

При докритических значениях числа Рейнольдса решение  $U(r, \theta)$ ,  $P(r, \theta)$  стационарно и осесимметрично, его принято называть основным течением. В работе представлены результаты анализа устойчивости основного течения в случае вращения одной внутренней сферы, т.е. при  $\omega = 0$ .

Здесь приняты обозначения:  $\{U, V, W\}$  – компоненты вектора скорости основного течения  $U$  в сферической системе координат  $\{r, \theta, \phi\}$ ,  $P$  – давление,  $t$  – время,  $r_i$ ,  $\omega_i$  – радиусы и угловые скорости вращения внутренней ( $i = 1$ ) и внешней ( $i = 2$ ) сфер;  $Re$ ,  $\delta$ ,  $\omega$  – число Рейнольдса, толщина слоя жидкости и отношение угловых скоростей вращения граничных сфер – параметры подобия, определяющие характер течения; за характерные масштабы длины, времени, скорости и давления приняты  $r_1$ ,  $\omega_1^{-1}$ ,  $r_1 \omega_1$ ,  $r_1^2 \omega_1^2$  соответственно;  $\nu$  и  $\rho$  – постоянные коэффициент кинематической вязкости и плотность жидкости.

В области промежуточных значений определяющих параметров (когда задача не

имеет малого параметра) невозможны никакие упрощения уравнений и приходится численно решать начально-краевую задачу. Полученное при заданных значениях параметров ( $Re$ ,  $\delta$ ,  $\omega$ ) стационарное осесимметричное основное течение  $\mathbf{U}(r, \theta)$ ,  $\mathbf{P}(r, \theta)$  исследуется на устойчивость относительно малых возмущений  $\mathbf{u}(r, \theta, \varphi, t)$ ,  $\mathbf{p}(r, \theta, \varphi, t)$ . Из-за неоднородности основного течения поведение малых возмущений также описывается начально-краевой задачей для системы уравнений в частных производных с заданными граничными и начальными условиями

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{U} \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{U} &= -\nabla p + Re^{-1} \Delta \mathbf{u}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \\ u = v = w = 0, \quad r = 1 \\ u = v = w = 0, \quad r = 1 + \delta \\ u = u^0, v = v^0, w = w^0, \quad t = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Вывод об устойчивости основного течения делается на основании анализа асимптотического поведения возмущения при  $t \rightarrow \infty$ . Для каждого нового значения числа Рейнольдса задачу приходится решать заново, так как от  $Re$  зависит не только амплитуда, но и форма основного течения. Такой подход позволяет определить критическое значение числа Рейнольдса  $Re_L$  и вид самого опасного, наиболее быстро растущего возмущения.

**2. Метод решения.** Всякий соленоидальный вектор может быть представлен суммой полоидального и тороидального полей

$$\mathbf{u}(r, \theta, \varphi, t) = \operatorname{rot}^2 \mathbf{S} + \operatorname{rot} \mathbf{T}.$$

Запишем их потенциалы  $\mathbf{S} = \{S, 0, 0\}$  и  $\mathbf{T} = \{T, 0, 0\}$  в виде рядов по сферическим гармоникам  $Y_l^m = P_l^m(x) \exp(im\varphi)$ ,  $x = \cos\theta$ , и получившиеся ряды

$$\begin{aligned} u &= \sum_{l,m} \frac{l(l+1)}{r^2} S_l^m P_l^m \exp(im\varphi) \\ v &= \sum_{l,m} \left( \frac{1}{r \sin \theta} T_l^m \partial_\varphi P_l^m + \frac{1}{r} \partial_r S_l^m \partial_\theta P_l^m \right) \exp(im\varphi) \\ w &= \sum_{l,m} \left( -\frac{1}{r} T_l^m \partial_\theta P_l^m + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_r S_l^m \partial_\varphi P_l^m \right) \exp(im\varphi) \end{aligned} \quad (2.1)$$

подставим в систему (1.1). Комплексные амплитуды  $T_l^m, S_l^m$  потенциалов  $\mathbf{S}$  и  $\mathbf{T}$  – функции только  $r$  и  $t$ .

Коэффициентами в уравнениях (1.1) являются компоненты скорости основного течения  $\mathbf{U}$  и их производные по  $r$  и  $\theta$ . Они не зависят от азимутальной координаты  $\varphi$  и в результате подстановки рядов (2.1) переменные по  $\varphi$  разделяются. Для каждого значения азимутального волнового числа  $m$  получается отдельная система уравнений.

Однако из-за неоднородности основного течения  $\mathbf{U}$  члены уравнений  $(\mathbf{U} \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{U}$  остаются нелинейными по  $\theta$  и уравнения невозможно преобразовать так, чтобы переменные разделились полностью. Переменные по волновому полоидальному числу  $l$  разделяются только в линейных частях уравнений.

Опять, как и при решении нелинейной задачи, возникает проблема преобразования нелинейных по  $\theta$ , неоднородных частей уравнений.

Оба метода нахождения коэффициентов разложения нелинейных частей по соответствующим полиномам, использованные при решении нелинейной задачи (см., например, [6]), здесь оказываются неудобными. Аппроксимация многочленом требует своей системы лучей  $\theta_j$  для каждого  $m$ ; промежуточное переразложение по функциям

Чебышева не может быть использовано, поскольку простой их связи с присоединенными функциями Лежандра (как при  $m = 0, 1$ ) для более высоких порядков ( $m > 1$ ) уже не существует. Для нахождения неоднородных частей уравнений (1.1) используются квадратуры интерполяционно-ортогонального типа следующим образом [7].

Воспользуемся свойством ортогональности присоединенных функций Лежандра. После подстановки рядов (2.1) в систему (1.1), умножения уравнений на  $P_n^m(x)$  и интегрирования по  $x$  на  $[-1, 1]$  получим для каждого значения тороидального волнового числа  $m$  систему уравнений для комплексных амплитуд потенциалов полондального и тороидального полей. Для краткости выпишем уравнение для  $T_l^m$

$$\partial_l T_l^m - \text{Re}^{-1} \Delta_l T_l^m = N_l^m \int_{-1}^1 f^m(r, x, t) P_n^m(x) dx \quad (2.2)$$

$$N_l^m = \frac{2(l+m)!}{(2l+1)(l-m)!}$$

Здесь  $N_l^m$  – норма,  $f^m$  – комбинация нелинейных по  $\theta$  членов уравнений (1.1), включающая и их производные по  $\theta$ .

Большая точность вычисления правых частей уравнений очень существенна. Используются квадратуры типа  $\int_1^1 f(x)h(x)dx \approx \sum_{j=1}^N A_j f(x_j) + R_N(f)$ . Минимизировать остаточный член можно разными способами. Нам удобно зафиксировать систему узлов  $x_j$  (лучей  $\theta_j$ ) и минимизировать  $R_N$ , варьируя квадратурные веса  $A_j$ .

Известно [8], что наивысшую алгебраическую степень точности, равную  $2N - 1$ , имеют квадратурные формулы интерполяционно ортогонального типа. Последовательность ортогональных на сегменте интегрирования многочленов уже есть – полиномы Лежандра. Тогда с единичной весовой функцией  $h$  на  $[-1, 1]$  узлами квадратурной формулы интерполяционно ортогонального типа являются нули полинома  $P_N^0(x)$ .

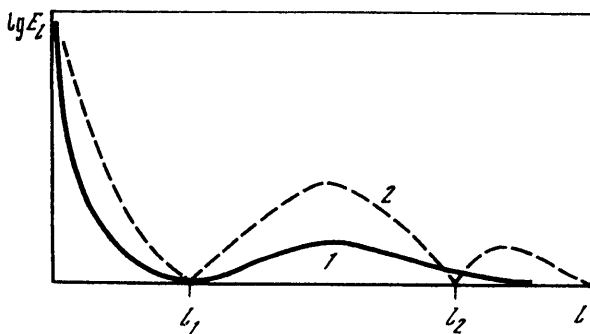
Подынтегральные выражения в уравнениях вида (2.2) есть суммы произведений типа

$$U_l P_k^m = \sum_{l=0}^L U_l P_l^0 \sum_{n=m}^M n(n+1) S_n^m P_n^m P_k^m$$

Максимальный порядок многочлена под интегралом есть  $L + 2(M - m) = N1$ . Чтобы квадратурная формула была интерполяционно ортогональной (т.е. точной для подынтегральных многочленов степени вплоть до  $N1 = 2N - 1$ ), достаточно [8] в качестве узлов взять нули полинома Лежандра гораздо меньшей степени  $N = (N1 + 1)/2 = [L + 2(M - m) + 1]/2$ . Квадратурные веса  $A_j$  вычисляются по известным рекуррентным формулам. Таблицы узлов и весов для квадратурных формул некоторых порядков  $N$  можно найти в [9].

Получившаяся начально-краевая задача для системы из  $3(L - m)$  линейных дифференциальных уравнений для амплитуд возмущений, являющихся функциями  $r$  и  $t$ , решается численно методом, аналогичным примененному при решении нелинейной задачи. Используется явно-неявная (нелинейные по  $\theta$  части уравнений вычисляются по значениям скорости на предыдущем временном шаге) двухслойная по времени и второго порядка точности по радиусу разностная схема.

На каждом временном шаге красивая задача для системы линейных алгебраических уравнений решается методами скалярной и матричной прогонки. Находится асимптотическое поведение решения при  $t \rightarrow \infty$ .



Фиг. 1. Пространственные спектры кинетической энергии  $E_l$ , типичные для основного (кривая 1) и вторичного двухвихревого (режим 1 – кривая 2) течений в тонких слоях при  $\omega = 0$  на границе устойчивости

Отметим, что необходимо с большой осторожностью относиться к ограничению количества членов в рядах, т.е. к точности описания основного течения и возмущения. На фиг. 1 схематически представлены пространственные спектры кинетической энергии

$$E_l = \frac{2}{2l+1} \int_1^{1+\delta} (U_l^2 + l(l+1)(V_l^2 + W_l^2)) r^2 dr$$

течений, полученных в тонких слоях в случае вращения одной внутренней сферы при решении нелинейной задачи. Это спектры, типичные для основного течения (кривая 1) и вторичного двухвихревого (кривая 2) кольцевого режима. На графике отмечены наиболее характерные полоидальные волновые числа  $l_1$  и  $l_2$ . В зависимости от толщины слоя они принимают разные значения, например при  $\delta = 0,11$  и  $0,19$  получены  $l_1 \approx 20$  и  $10$ ,  $l_2 \approx 60$  и  $35$  соответственно.

Первый максимум энергетического спектра на малых  $l$  практически полностью определяется азимутальным течением. Меридиональная циркуляция начинает его искажать только с появлением более сложных режимов с интенсивным меридиональным течением. Второй максимум (между  $l_1$  и  $l_2$ ) почти целиком определяется меридиональной циркуляцией.

Вычисления показали, что при недостаточном точном описании основного течения – с числом членов до  $l_1$  или немного больше – заметно занижается предел его линейной устойчивости и изменяется форма критического возмущения (даже при условии удержания достаточного числа членов в рядах (2.1), описывающих возмущение).

В случае точного описания основного течения (до  $l_2$ ), но с недостаточным числом членов в рядах (2.1) для возмущения можно неустойчивость не обнаружить вообще. Неучет в рядах (2.1) гармоник, соответствующих третьему максимуму, приводит к неточному определению критического значения числа Рейнольдса  $Re_L$ .

**3. Поиск критического возмущения.** Для исследования устойчивости течения в слое толщины  $\delta$  относительно возмущения с азимутальным волновым числом  $m$ , характеризующим периодичность возмущения в направлении вращения, при переходе к очередному значению числа Рейнольдса бралось соответствующее основное течение, численно полученное при выбранном  $Re$ . Заключение об устойчивости основного течения делалось на основании анализа асимптотического поведения амплитуд возмущения при  $t \rightarrow \infty$ .

Отметим, что скорость роста возмущения вычислялась отдельно для полоидальной и тороидальной компонент скорости ( $v_l$  и  $\mu_l$  соответственно), для антисимметричной и

симметричной по отношению к плоскости экватора их составляющих  $(\mu_{2l}, \nu_{2l+1})$  и  $(\mu_{2l+1}, \nu_{2l})$ .

Зависимость малых возмущений от времени вблизи порога устойчивости заключена в экспоненциальном множителе  $\exp(\lambda t)$ , где  $\lambda$  – декремент, определяющий развитие возмущения во времени. Если декремент принимает вещественное значение, возмущение монотонно затухает при  $\lambda < 0$  и растет при  $\lambda > 0$ . Если  $\lambda = \lambda^{re} + i\lambda^{im}$ , возмущение осциллирует с частотой  $\lambda^{im}$ , знаком  $\lambda^{re}$  определяется, затухает оно или растет. Для устойчивости течения необходимо, чтобы вещественные части декрементов всех нормальных возмущений были отрицательными. Появление в спектре возмущения с положительным  $\lambda^{re}$  означает неустойчивость течения по отношению к этому возмущению.

В случае замкнутой полости спектр нормальных возмущений дискретен; есть счетная последовательность характеристических декрементов – собственных значений и соответствующих им собственных функций [10]. Пусть амплитуды возмущения, временную асимптотику которых мы нашли, представлены в виде рядов по собственным функциям спектральной задачи, например  $T_l^m(r, t) = \sum T_n^*(r) \exp(\lambda_n t)$ . Перенумеровав собственные функции так, что  $\lambda_n^{re} > \lambda_{n+1}^{re}$ , получим условие неустойчивости течения  $\lambda_1^{re} > 0$ . Зная асимптотическое поведение  $T_l^m$  при  $t \rightarrow \infty$ , эту величину легко определить. Например, если  $\lambda_1^{im} = 0$ , то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} T_l^m \approx T_1^* \exp(\lambda_1 t)$$

и тогда

$$\lambda = \lambda_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{T_l^m} \partial_t T_l^m$$

В случае  $\lambda_1^{im} \neq 0$  определение  $\lambda_1^{re}$  несколько более громоздко.

Применяемая методика позволяет при каждом заданном значении азимутального волнового числа  $m$  определить скорость роста наиболее быстро растущего возмущения, его осцилляции и форму, т.е. форму и поведение во времени наиболее опасной при выбранном  $m$  меридиональной структуры возмущения. Информацию о других меридиональных структурах с тем же  $m$  получить нельзя, так как с ростом  $t$  они поглощаются наиболее быстро растущей. Однако считаем такой, не дающий полной информации подход оправданным, поскольку в присутствии вращения широтная и радиальная зависимости в уравнениях не разделяются и решение полной задачи на собственные значения требует гораздо более сложной вычислительной процедуры.

Найдя нейтральное (с нулевой скоростью роста) возмущение с заданным азимутальным волновым числом  $m$ , получим критическое значение числа Рейнольдса  $\text{Re}_L(\delta, \omega, m)$ , соответствующее возникновению неустойчивости относительно возмущения с длиной волны в азимутальном направлении, равной  $2\pi/m$ . Предел устойчивости основного течения определится минимальным по всем  $m$  значением

$$\text{Re}_L(\delta, \omega) = \text{Re}_L(\delta, \omega, m_c) = \min_m \text{Re}_{L,m}(\delta, \omega, m)$$

Значение  $m_c$ , обеспечившее минимум, есть критическое значение азимутального волнового числа; частота нейтральных колебаний определится значением мнимой части декремента критического возмущения.

**4. Результаты вычислений и сравнение с имеющимися данными.** Так как основное течение качественно различно в тонких и толстых слоях, его устойчивость изучалась в слоях разной толщины:  $\delta = 0,07; 0,11; 0,19; 0,24; 0,50; 1,00; 1,5; 2,00$ . Для сравнения

изучалась устойчивость не только основного течения  $U(r, \theta)$ , полученного при решении нелинейной задачи, но и течения  $U^0(r, \theta) = \{0, 0, \omega^0 r P_1^1(x)\}$  – стационарного решения нелинейной задачи при  $Re \rightarrow 0$  (нулевой член в разложении решения по степеням  $Re$ ).

1. В тонких слоях минимальные критические значения  $Re_L$  линейной неустойчивости основного течения получены для монотонных осесимметричных антисимметричных по отношению к плоскости экватора возмущений [6, 11].

Симметричное (или антисимметричное) по отношению к плоскости экватора возмущение будем называть симметричным (или антисимметричным) в отличие от осесимметричного (или неосесимметричного, трехмерного).

Критические значения  $Re_L^0$  для течения  $U^0$  оказались более низкими, чем  $Re_L$ , – наличие меридиональной циркуляции стабилизирует течение. С уменьшением толщины слоя жидкости значения  $Re_L$  и  $Re_L^0$  сближаются, поскольку влияние меридиональной циркуляции на распределение угловой скорости (и на центробежную неустойчивость) с уменьшением  $\delta$  ослабевает.

На фиг. 2 представлена зависимость  $\lambda$  от  $Re$  для основного течения при  $\delta = 0,19$  (получено  $Re_L = 616$ ); показана скорость роста только осесимметричной  $m = 0$  (кривая 4) и первой неосесимметричной  $m = 1$  (кривая 5) моды. Моды с большими азимутальными волновыми числами  $m$  имеют всюду отрицательные скорости роста. Цифрами отмечены следующие критические значения числа Рейнольдса: 1 –  $Re_c = 594$  – полученный в эксперименте [2] предел глобальной устойчивости основного течения, 2 –  $Re_L^0 = 609$  – предел линейной устойчивости течения  $U^0$ , 3 –  $Re_N = 615$  – критическое значение, полученное при решении нелинейной задачи [12].

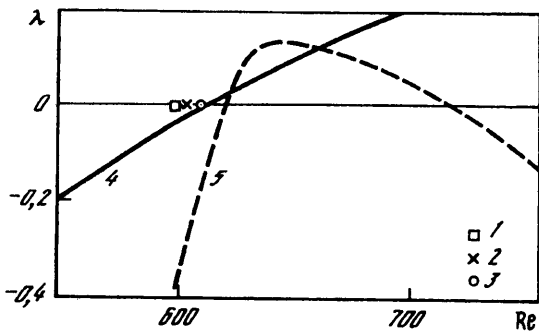
Точность описания основного течения влияет на форму наиболее опасного возмущения. Так, для течения  $U^0$  (и для основного течения с недостаточным количеством членов в рядах – с учетом только первого максимума на фиг. 1) симметричное и антисимметричное возмущения почти равноправны. Критическим является значение числа  $Re_L^0$ , полученное для осесимметричного симметричного возмущения.

Критическое для  $U^0$  возмущение представляет собой систему четного числа осесимметричных симметричных относительно плоскости экватора кольцевых вихрей, занимающих всю область течения от экватора до полюсов. Функция тока критического возмущения равна нулю на экваторе, интенсивность вихрей плавно падает от экватора к полюсам. Эти же результаты получены в [13], где методом Галеркина исследовалась устойчивость  $U^0(r, \theta)$  относительно осесимметричных возмущений (в рядах для возмущений бралось до 30 членов ряда) для  $\delta = 0,1; 0,07$  и  $\omega = 0$ .

На самом деле для основного течения наиболее быстро растущим оказалось возмущение, имеющее тороидальную компоненту с четными  $l$  и полоидальную – с нечетными, т.е. антисимметричное относительно плоскости экватора. Оно представляет собой систему нечетного числа осесимметричных кольцевых вихрей, интенсивность которых резко падает от экватора к полюсам. Функция тока на экваторе имеет максимальное значение.

Скорости роста и критические значения числа  $Re$  симметричной и антисимметричной частей решения заметно различаются при  $\delta = 0,19$ . С уменьшением толщины слоя различие между симметричной и антисимметричной модами уменьшается, с ее ростом – увеличивается.

Таким образом, критическим для основного течения в тонких слоях является монотонное осесимметричное, но экваториально антисимметричное возмущение. Вторичное двухвихревое течение, как было показано при решении нелинейной задачи [12], образуется в результате нестационарного нелинейного переходного режима; оно, как и основное течение, симметрично относительно плоскости экватора.



Фиг. 2. Зависимость  $\lambda(\text{Re})$  критического возмущения в слое толщины  $\delta = 0,19$  при  $\omega = 0$  для осесимметричной ( $m = 0$  – кривая 4) и первой неосесимметричной ( $m = 1$  – кривая 5) мод

В [14] показано, что неустойчивость основного течения в тонком слое  $\delta = 0,11$  обусловлена ростом монотонных осесимметричных антисимметричных возмущений и в случае вращения обеих граничных сфер в широком диапазоне значений  $\omega$  (при  $-646 < \text{Re}_2 < 1881$ , где  $\text{Re}_2 = \omega_2 r_2^2 / \nu$ ). Вне этого диапазона наиболее опасные возмущения имеют вид бегущих азимутальных волн, симметричных относительно плоскости экватора при вращении сфер в одну сторону и антисимметричных при вращении в разные стороны.

В слоях средней толщины ( $0,21 < \delta < 0,43$ ) основное течение оказалось устойчивым относительно осесимметричных (и неосесимметричных с небольшими значениями азимутального волнового числа  $m < 10$ ) возмущений в той области значений определяющих параметров ( $\text{Re}$  и  $\delta$ ), где можно было ожидать их неустойчивости, экстраполируя результаты для тонкого слоя.

2. Критическим для основного течения в толстых слоях оказалось немонотонное неосесимметричное возмущение антисимметричное относительно плоскости экватора.

Форма критического возмущения зависит от толщины слоя жидкости; азимутальное волновое число, определяющее периодичность возмущения в направлении вращения, уменьшается с ростом толщины слоя жидкости. На фиг. 3 представлены нейтральные кривые в плоскости  $(\text{Re}, m)$ , полученные в слоях толщины  $\delta = 0,5; 1$  и  $2$ .

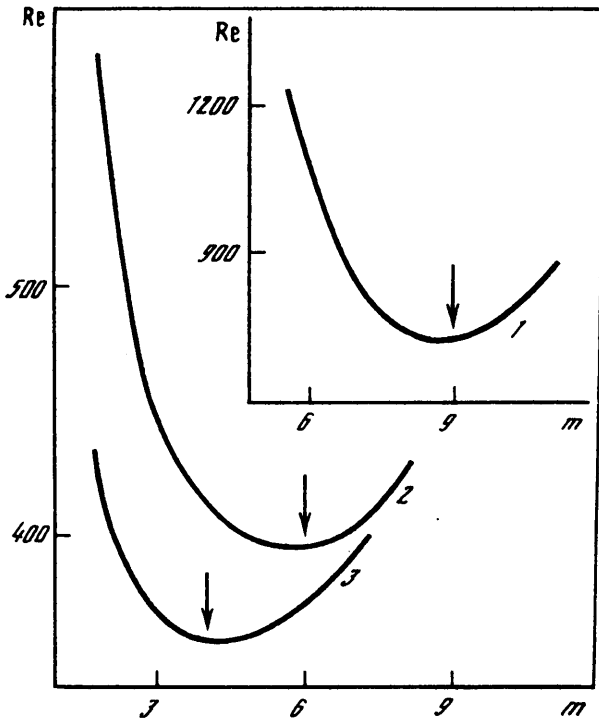
Критические возмущения имеют вид бегущих азимутальных волн с  $m = 6; 4$  и  $3$  соответственно, со сложной полоидальной структурой;  $\text{Re}_L = 1150; 493; 417$ .

Сравнение с экспериментом [5] дает хорошее согласие критических значений числа Рейнольдса, полученных из эксперимента и по линейной теории. Следует отметить, что номер азимутальной моды вторичного течения, полученного в эксперименте, при  $\delta = 0,54$  меньше номера моды наиболее опасного возмущения, который дает линейная теория в слое  $\delta = 0,5$ . Наиболее быстро растущим оказалось возмущение с азимутальным волновым числом  $m = 6$ , тогда как в эксперименте после потери устойчивости основного течения устанавливалось вторичное течение с  $m = 5$  (то же при  $\delta = 0,398$ ).

Причина такого несоответствия линейной теории и эксперимента пока не выяснена. Это может быть, например, различие решаемых задач. Так, эксперимент всегда трехмерен. Кроме того, в эксперименте возможно влияние шероховатостей сферических поверхностей, наличие небольшого эксцентриситета, влияние оси, на которой держится внутренняя сфера (слабое в тонких слоях, оно может оказаться не таким уж малым в толстых). При численном решении возможно появление схемной вязкости или недостаточно точное описание решения. Так, при дискретизации решения по радиусу бралось 20 равномерно распределенных точек, которых для описания сложных течений в толстом слое может оказаться недостаточно.

Другой причиной может быть то, что, как уже упоминалось, реализуемое вторичное течение есть результат нелинейного взаимодействия наиболее быстро растущего возмущения и основного течения, а не их суперпозиция. Причем в процессе





Фиг. 3. Нейтральные кривые 1, 2, 3 устойчивости основного течения в толстых слоях  $\delta = 0,5$ ; 1 и 2 соответственно в случае вращения одной внутренней сферы

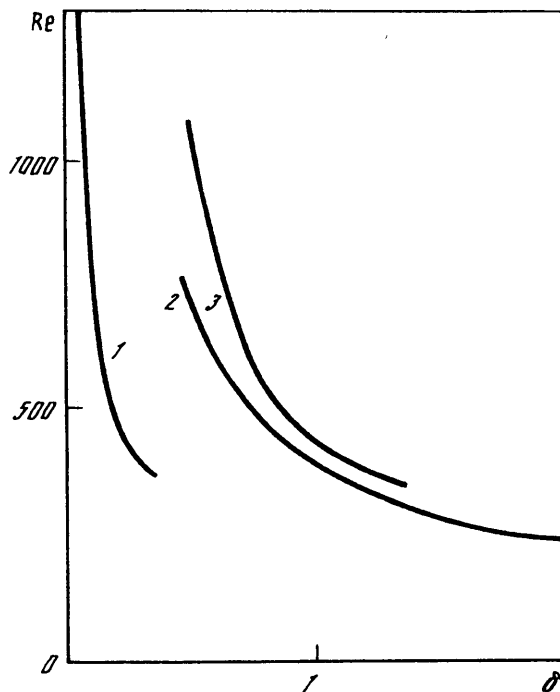
нелинейного взаимодействия наиболее опасное возмущение может потерять свое доминирующее воздействие.

Подобная ситуация описана выше: в тонких сферических слоях наиболее опасное возмущение экваториально антисимметрично. Вторичный режим (симметричный, как и основное течение) [12] устанавливается в результате нелинейного нестационарного перехода. Анализ пространственных спектров энергии показывает, что крупномасштабная часть решения в процессе всего перехода описывается симметричной составляющей пространственного спектра. Антисимметричная составляющая участвует лишь в быстрой перестройке спектра мелкомасштабных движений от вида, типичного для основного течения (симметричного), к виду, характерному для вторичного режима (также симметричного), а затем исчезает.

На фиг. 4 показаны кривые устойчивости  $Re(\delta)$  течения в случае вращения одной внутренней сферы. Кривая линейной устойчивости течений в тонких слоях (1) в этом масштабе практически совпадает с экспериментальной кривой глобальной устойчивости и нижней границей распада двухкольцевого вторичного режима, полученной при решении нелинейной задачи (не показаны). Кривая линейной устойчивости (2) и экспериментальная кривая глобальной устойчивости (3) основного течения в толстых слоях расположены в области гораздо более высоких значений числа Рейнольдса, чем можно было ожидать, экстраполируя кривую устойчивости для тонких слоев.

**Заключение.** На основе изучения асимптотического поведения решения линейной задачи при  $t \rightarrow \infty$  исследована устойчивость основного течения в сферических слоях. Показано, что в случае вращения одной внутренней сферы характер неустойчивости зависит от толщины слоя жидкости (не только количественно, но и качественно).

В тонких слоях с ростом  $Re$  возникают условия, необходимые для наступления центробежной неустойчивости, как в цилиндрическом течении Куэтта.



Фиг. 4. Кривые устойчивости основного течения в тонких и толстых слоях при  $\omega = 0$ : кривые 1 и 2 линейной устойчивости и экспериментальная кривая 3 глобальной устойчивости

Основное течение в тонких слоях неустойчиво по отношению к монотонному возмущению в виде системы занимающих всю область течения от полюса до полюса осесимметричных, но антисимметричных относительно плоскости экватора кольцевых вихрей. Полоидальное волновое число, определяющее периодичность наиболее быстро растущего возмущения в меридиональном направлении (число вихрей), тем больше, чем тоньше слой жидкости.

В толстых слоях меридиональная циркуляция с ростом  $Re$  опускается к плоскости экватора, становится все более интенсивной и заметно перераспределяет угловой момент в жидкости. На сферах образуются пограничные, а в плоскости экватора — свободный сдвиговые слои; в центре меридионального вихря в маловязком ядре течения формируются перегибы в азимутальной скорости, которые могут служить причиной потери устойчивости основного течения.

Критическим для основного течения в толстых слоях оказалось немонотонное неосесимметричное возмущение, антисимметричное относительно плоскости экватора. Форма критического возмущения зависит от толщины слоя: азимутальное волновое число, определяющее периодичность наиболее опасного возмущения в направлении вращения, уменьшается с ростом толщины слоя жидкости.

На одной из конференций Г. Думас (G. Dumas) высказал предположение, что причиной потери устойчивости в толстых слоях является неустойчивость "радиально-экваториальной струи" (по-видимому, по аналогии с экваториальной струей, формирующейся при вращении сферы в безграничной жидкости). Вопрос о том, ответствен ли за неустойчивость в толстых слоях механизм вязкой неустойчивости экваториального свободного сдвигового слоя или механизм невязкой неустойчивости течения с перегибом скорости в маловязком ядре, достаточно принципиален.

Известно, что первая неустойчивость в безграничной жидкости действительно

связана с потерей устойчивости экваториальной струи с образованием вторичного течения в виде вихрей Стюарта, наблюдавшихся на вращающемся диске. Ясно, что в сферическом слое с ростом  $\delta \rightarrow \infty$  должно произойти изменение механизма неустойчивости. Однако в безграничной жидкости вихри Стюарта возникают при гораздо больших значениях  $Re \approx 65000$  и известные результаты позволяют предположить, что неустойчивость такого типа в сферическом слое произойдет при гораздо больших  $\delta$ , чем рассмотренные  $\delta = 0,5; 1$  и  $2$ .

Автор благодарит С.Я. Герценштейна за внимание к работе и полезное обсуждение. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-00340).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Беляев Ю.Н., Яворская И.М.* Течения вязкой жидкости во вращающихся сферических слоях и их устойчивость // Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа. М.: ВИНТИ, 1980. Т. 15. С. 3–80.
2. *Яворская И.М., Беляев Ю.Н., Монахов А.А.* Экспериментальное изучение сферического течения Куэтта // Докл. АН СССР. 1975. Т. 221. № 5. С. 1059–1062.
3. *Minson B.R., Menguturk M.* Viscous incompressible flow between concentric rotating spheres. Pt. 3. Linear stability and experiments // J. Fluid Mech. 1975. V. 69. Pt. 4. P. 705–719.
4. *Яворская И.М., Беляев Ю.Н., Монахов А.А.* Исследование устойчивости и вторичные течения во вращающихся сферических слоях при произвольных числах Россби // Докл. АН СССР. 1977. Т. 237. № 4. С. 804–807.
5. *Беляев Ю.Н., Монахов А.А., Яворская И.М.* Устойчивость сферического течения Куэтта в толстых слоях при вращении внутренней сферы // Изв. АН СССР. МЖГ. 1978. № 2. С. 9–15.
6. *Астафьева Н.М.* Численное решение задачи о малых возмущениях сферического течения Куэтта: Препринт № 1027. М.: ИКИ АН СССР, 1985. 42 с.
7. *Астафьева Н.М., Паршев В.А.* К вопросу о численном решении уравнений Навье – Стокса в задачах со сферической геометрией // Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1978. Т. 9. № 7. С. 12–18.
8. *Суетин П.К.* Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, 1976. 327 с.
9. *Кронрод А.С.* Узлы и веса квадратурных формул. М.: Наука, 1964. 143 с.
10. *Сорокин В.С.* Нелинейные явления в замкнутых потоках вблизи критических чисел Рейнольдса // ПММ. 1961. Т. 25. Вып. 2. С. 248–258.
11. *Marcus P.S., Tuckerman L.S.* Simulation of flow between concentric rotating spheres. Pt 2. Transitions // J. Fluid Mech. 1987. V. 185. P. 31–65.
12. *Астафьева Н.М.* Численное моделирование несимметричного относительно плоскости экватора сферического течения Куэтта // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 3. С. 56–62.
13. *Якушин В.И.* О неустойчивости движения жидкости в тонком шаровом слое // Изв. АН СССР. МЖГ. 1969. № 1. С. 119–123.
14. *Зиканов О.Ю.* Численное моделирование неустойчивостей и вторичных режимов в сферическом течении Куэтта // Изв. РАН. МЖГ. 1995. № 1. С. 3–15.

Москва

Поступила в редакцию  
18.IV.1996