

УДК 532.516:532.59

© 1997 г. Г.М. СИСОЕВ, В.Я. ШКАДОВ

РАЗВИТИЕ ДОМИНИРУЮЩИХ ВОЛН ИЗ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В СТЕКАЮЩИХ ПЛЕНКАХ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

В статье обоснован принцип отбора реализуемых в экспериментах в виде регулярных волн периодических решений уравнений волновых пленок жидкости. Численными методами проведены систематические исследования бифуркаций семейств установившихся периодических волн и аттракторов соответствующей нестационарной задачи. Сопоставлением бифуркаций и аттракторов показано, что в тех случаях, когда при заданном волновом числе существует несколько периодических решений, из малых начальных возмущений развивается решение с наибольшей амплитудой волны и наибольшей фазовой скоростью (доминирующий волновой режим). Переход аттрактора с одного семейства на другое при изменении волнового числа происходит скачком вблизи точек бифуркации и сопровождается появлением двухпериодических решений в малых окрестностях этих точек. Соотношения между вычисленными параметрами доминирующих волн хорошо согласуются со всеми имеющимися экспериментальными результатами.

Капиллярные течения пленок жидкости проявляют многообразие неустойчивостей и формирующихся волновых структур. Внимание исследователей привлекает то, что имеются технические возможности зафиксировать волны в экспериментах и измерить их параметры, что не всегда возможно в других неустойчивых течениях жидкости. Обнаружены периодические волны двух типов, перемещающиеся с разными фазовыми скоростями: медленные волны с одним максимумом толщины пленки на периоде и быстрые волны с крутым передним фронтом с предшествующей капиллярной рябью и постепенно спадающим задним фронтом [1]. Профили поверхности первого типа напоминают гармоническую волну, профили второго типа более похожи на уединенные волны. Четко фиксируемые регулярные волны развиваются при наложении малых периодических колебаний в начальной зоне течения.

Теоретическое истолкование экспериментальных фактов о регулярных нелинейных волнах в пленках при конечных расходах жидкости было дано на основе уравнений, выведенных в [2]. В этой работе построено первое семейство нелинейных периодических решений и вычислены параметры волн первого типа, наблюдавшихся в экспериментах. В последующих исследованиях [3–6] класс нелинейных волновых решений был существенно расширен. Семейство периодических решений второго типа, согласующихся с данными [1], найдено в работе [5]. В [4] обнаружены решения в виде уединенных волн; в [5, 6] построены две последовательности уединенных волн – быстрых и медленных, показано, что существуют и другие нелинейные волновые решения уравнений работы [2].

Наряду с истолкованием экспериментальных результатов теоретическими исследованиями [3–6] была поставлена новая принципиальная проблема. Оказалось, что при фиксированных значениях управляющих параметров (средняя толщина пленки, длина волны) существует несколько периодических решений, каждое из которых определяет регулярный волновой режим. В то же время в экспериментах при

указанных условиях из малых возмущений развивается вполне определенный регулярный режим; при этом имеется повторяемость от эксперимента к эксперименту. Проблема состоит в том, чтобы установить принцип отбора этих доминирующих решений из множества возможных.

В данной статье проводится всестороннее обоснование принципа отбора доминирующих волновых режимов. Для этого выполнены обширные расчеты бифуркаций семейств периодических решений и аттракторов нестационарной задачи. Ставится цель проанализировать множество семейств периодических и уединенных волновых решений, изучить связи между семействами и условия образования их из малых возмущений. Выводятся универсальные соотношения между параметрами доминирующих волн (не зависящие от свойств конкретной жидкости), которые применяются для сравнения с экспериментами.

1. Основные уравнения и их слабонелинейные аппроксимации. Для математического описания нелинейных волн, развивающихся вследствие гидродинамической неустойчивости в тонких жидких пленках при стекании их по твердым поверхностям, будем использовать уравнения, выведенные в [2]

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{6}{5} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q^2}{h} \right) = \frac{1}{5\delta} \left(h \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + h - \frac{q}{h^2} \right)$$

Здесь $h(x, t)$ и $q(x, t)$ – локальные значения безразмерной толщины слоя и расхода жидкости. В качестве масштабов взяты средняя толщина слоя h_* и скорость $U_* = gh_*^2/(3\nu)$, где ν – коэффициент кинематической вязкости жидкости, g – ускорение силы тяжести; при этом размерные значения координаты x' , времени t' , расхода q' , толщины h' вычисляются по формулам

$$x' = xh_*\gamma^{1/3} \text{Re}^{-2/9}, \quad t' = th_*\gamma^{1/3}U_*^{-1} \text{Re}^{-2/9}, \quad q' = qh_*U_*, \quad h' = hh_*$$

$$\delta = 45^{-1} \gamma^{-1/3} \text{Re}^{1/9}, \quad \gamma = \sigma \rho^{-1} \nu^{-4/3} g^{-1/3}, \quad \text{Re} = 3U_*h_*\nu^{-1}$$

где ρ – плотность, σ – коэффициент поверхностного натяжения. Преобразования переменных, содержащие параметр δ , предложены в [4]; использование их позволяет применить результаты анализа решений уравнений (1.1) к течениям различных жидкостей.

Уравнения (1.1) выведены в [2] из полной краевой задачи для уравнений Навье – Стокса в два этапа. Сначала задача сводится к уравнениям пограничного слоя с самоиндуцированным давлением, затем применяется метод Галеркина с одной аппроксимирующей функцией по координате, нормальной к твердой поверхности. Обобщения вывода уравнений на случай нескольких базисных функций даны в работе того же автора¹.

Для установившихся волн, перемещающихся с постоянной фазовой скоростью c , для решения вида $h(\xi)$, $q(\xi)$, $\xi = x - ct$ система (1.1) сводится к одному дифференциальному уравнению [2–6]

$$h^3 \frac{d^3 h}{d\xi^3} + \delta [6(q_0 - c)^2 - c^2 h^2] \frac{dh}{d\xi} + h^3 - q_0 - c(h - 1) = 0 \quad (1.2)$$

$$q(\xi) = q_0 + c(h - 1)$$

¹ Шкадов В.Я., Епихин В.Е., Демехин Е.А., Бунов А.В., Филянд Л.В. Устойчивость течений с поверхностями раздела (слои жидкости, капиллярные струи) // Отчет НИИ механики МГУ. 1981. № 2564. 100 с.

Значения среднего расхода жидкости q_0 и фазовой скорости c определяются вместе с $h(\xi)$ в ходе решения задачи.

Отметим предельные слабонелинейные асимптотические формы уравнений (1.1) при $\delta \rightarrow 0$ (бесконечно малая толщина пленки). Введя сжатые координаты $\tau = \varepsilon t$, $\eta = \varepsilon x$, $\varepsilon = \alpha_0 \equiv \sqrt{15\delta}$ из (1.1) получаем последовательно

$$q = h^3 + O(\varepsilon^3)$$

$$\frac{\partial q}{\partial \tau} = 3h^2 \frac{\partial h}{\partial \tau} + O(\varepsilon^3) = -3h^2 \frac{\partial q}{\partial \eta} + O(\varepsilon^3) = -9h^4 \frac{\partial h}{\partial \eta} + O(\varepsilon^3) \quad (1.3)$$

Подставляя (1.3) во второе уравнение (1.1), находим

$$q = h^3 + \varepsilon^3 \left(h^3 \frac{\partial^3 h}{\partial \eta^3} + h^6 \frac{\partial h}{\partial \eta} \right) + O(\varepsilon^6)$$

тогда из первого уравнения (1.1) имеем

$$\frac{\partial h}{\partial \tau} + 3h^2 \frac{\partial h}{\partial \eta} + \varepsilon^3 \left(h^3 \frac{\partial^3 h}{\partial \eta^3} + h^6 \frac{\partial h}{\partial \eta} \right) + O(\varepsilon^6) = 0 \quad (1.4)$$

Заменой переменных из (1.4) получаем

$$\frac{\partial H}{\partial \omega} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(CH + 3H^2 + \frac{\partial^3 H}{\partial \zeta^3} + \frac{\partial H}{\partial \zeta} \right) + O(\varepsilon^3) = 0 \quad (1.5)$$

$$h = 1 + \varepsilon^3 H, \quad \zeta = \eta - (3 - C\varepsilon^3)\tau, \quad \omega = \varepsilon^3 \tau$$

Для установившихся волн из (1.5) следует уравнение

$$\frac{d^3 H}{d\zeta^3} + \frac{dH}{d\zeta} + 3H^2 + CH = \text{const} \quad (1.6)$$

которое представляет предельную асимптотическую форму уравнения (1.2) [2].

Модельные уравнения (1.5), (1.6), выведенные впервые для качественного анализа возможных волновых структур в пленках при конечных расходах жидкости², позднее были получены при исследовании некоторых задач химической кинетики и диффузионных процессов. Эти обстоятельства свидетельствуют о том, что помимо узкого приложения к волновым пленкам основная система уравнений (1.1) представляет более общий интерес как система с дисперсией и диссипацией [7–9].

Подробный анализ бифуркаций и аттракторов уравнения (1.5), данный в [9], применяется здесь для задания начальных приближенных значений параметров c , q_0 и для контроля за точностью вычислений решений (1.1), (1.2) при конечных значениях δ .

2. Бифуркации установившихся волн. Тривиальное решение (1.1) $h = 1$, $q = 1$, соответствующее возможному безволновому течению, линейно неустойчиво к пространственно периодическим возмущениям вида $h_1(t) \exp i\alpha x$, $q_1(t) \exp i\alpha x$ при значениях волнового числа $\alpha \in (0, \alpha_0)$. Это дает основание рассматривать двухпараметрическое множество периодических по x решений (1.1), определяемых значениями δ и α .

Периодические по x решения (1.1) с волновым числом α представляются в виде Фурье-разложений

² Шкадов В.Я. Вопросы нелинейной гидродинамической устойчивости слоев вязкой жидкости, капиллярных струй и внутренних течений. Докт. дис. М.: МГУ. Мехмат. 1973. 258 с.

$$h = \sum_{k=-N}^N h_k(t) \exp i \alpha k x, \quad q = \sum_{k=-N}^N q_k(t) \exp i \alpha k x \quad (2.1)$$

$$h_k = h_{-k}^*, \quad q_k = q_{-k}^*, \quad h_0 = 1$$

где звездочка обозначает комплексное сопряжение. Коэффициенты разложений $h_k(t)$, $q_k(t)$ находятся численным интегрированием динамической системы, которая следует из (1.1) при использовании метода Галеркина [1, 2]. В начальный момент времени задаются значения $h_k(0)$, $q_k(0)$; численное решение этой задачи Коши описывает развитие начального возмущения с течением времени и формирование предельных волновых структур – аттракторов системы (1.1) при $t \rightarrow \infty$ для различных значений δ и α .

Изучение бифуркаций установившихся периодических по ξ волн сводится к поиску нетривиальных решений нелинейной алгебраической системы метода Галеркина, примененного к (1.2). Если при некоторых значениях δ , α известно одно такое решение, то продолжением по параметру α удастся построить семейство решений, начинающееся в точке бифуркации [5]. Вычисление решений одного семейства волн строится переходом к фиктивной системе дифференциальных уравнений по методу инвариантного погружения; решения этой дифференциальной системы уточняются методом Ньютона – Канторовича (см. сноску 1).

Тщательно контролируемые по точности вычисления раскрывают многообразную картину бифуркаций периодических решений для уравнения (1.2), которая существенно усложняется с ростом δ .

Каждое периодическое решение будем характеризовать профилем волны $h(\xi)$ и двумя параметрами c , q_0 – фазовой скоростью и средним расходом. Для представления решения будем использовать также наибольшую и наименьшую толщины пленки h_{\max} и h_{\min} , амплитуду волны $a = h_{\max} - h_{\min}$.

Первое семейство периодических решений (1.2) мягко ответвляется от тривиального решения на нейтральной кривой при $s \equiv \alpha/\alpha_0 = 1$ [2]. Решения первого семейства существуют при любых $s \in (0, 1]$ и при $s \rightarrow 0$ переходят в уединенные волны углубления с фазовой скоростью $c < 3$. В [5] найдено второе семейство периодических решений (1.2), жестко ответвляющееся от первого семейства в окрестности $s_2 = 0,5$. Решения второго семейства существуют при любом $s \in (0, s_2(\delta))$ и при $s \rightarrow 0$ переходят в уединенные волны возвышения, для которых $c > 3$. В [5] было высказано утверждение, что могут существовать и другие решения в виде установившихся периодических волн, которые должны иметь точки бифуркации в окрестности значений $s = 1/3, 1/4, \dots$. Убедительное подтверждение этому было дано исследованиями уединенных волн. Первые решения (1.2) в виде уединенных волн были найдены в [4]. Затем в [6] для каждого $\delta \in [0; 0,2]$ построены по две последовательности решений (1.2), соответствующих уединенным волнам (для краткости будем называть их солитонами). Быстрые волны имеют фазовую скорость $c > 3$, медленные – $c < 3$. Показано, что медленные солитоны с наименьшей фазовой скоростью c связаны предельным переходом $s \rightarrow 0$ с первым семейством, быстрые солитоны с наибольшим значением c – со вторым семейством периодических решений; значения c для обоих семейств приближаются к $c = 3$. Наличие спектра солитонов, в которые могут переходить периодические волны при $s \rightarrow 0$, дает основания предполагать, что существуют также последовательности бифуркаций семейств установившихся периодических решений. Систематические тщательные вычисления позволяют построить в целом упорядоченное множество бифуркаций. Изложим здесь некоторые результаты.

При каждом фиксированном значении δ существует m ($m \geq 2$) семейств установившихся периодических решений $\gamma_k\{h(\xi), c, q_0\}$ уравнения (1.2), причем значение m зависит от δ .

	$j = 2$				$j = 3$			
	s	c	q_0	a	s	c	q_0	a
s_j	0,4763	2,914	1,040	0,3401	0,3208	2,932	1,032	0,2975
s'_j	0,5056	2,976	1,123	0,6996	0,3839	3,193	1,174	0,8561

Будем называть произвольное γ_k семейством k -й бифуркации. За γ_1 и γ_m сохраним также введенные в [5] названия "первое и второе семейства" соответственно, подчеркивая этим, что они существуют при любом значении δ и представляют два принципиально различающихся типа волн. Семейства $\gamma_2, \dots, \gamma_{(m-1)}$ будем называть дополнительными, учитывая, что они появляются при конечных значениях δ и количество их с ростом этого параметра увеличивается. В серии конкретных расчетов при $\delta = 0,04; 0,1; 0,15; 0,247$ было получено соответственно $m = 2, 3, 4, 7$ бифуркаций.

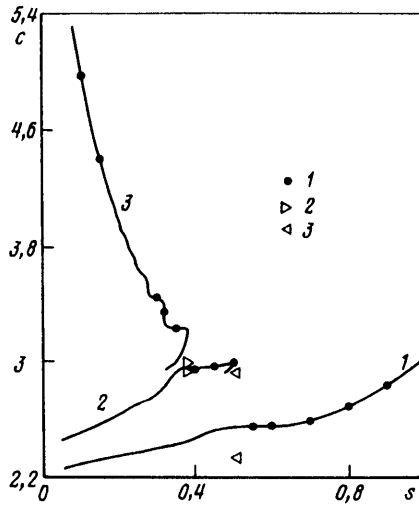
Каждое семейство γ_k ($k = 1, 2, \dots, m$) начинается в точке бифуркации s_k и существует при $s \in (0, s'_k]$, где $s_k \leq s'_k$. Наибольшее значение $s_1 = s'_1 = 1$ имеет первое основное семейство, которое мягко ответвляется от тривиального решения. Наименьшее значение s_m принадлежит второму основному семейству, причем с увеличением δ значение s_m сдвигается к точке $s = 0$. Промежуточные точки бифуркации $s_2 > s_3 > \dots > s_{m-1}$ принадлежат дополнительным семействам.

Первое основное семейство γ_1 появляется как 2π -периодическая гармоническая волна с бесконечно малой амплитудой при $s_1 = 1$. Каждое из следующих семейств γ_k ($k = 2, \dots, m$) возникает в точке бифуркации s_k как $2\pi/k$ -периодическое и почти гармоническое решение с конечной амплитудой. В сторону меньших значений s от точки бифуркации все семейства продвигаются до $s = 0$; при этом семейства $\gamma_1, \dots, \gamma_{m-1}$ переходят в отрицательные (медленные) уединенные волны, второе основное семейство γ_m – в положительную (быструю) уединенную волну. В сторону больших значений s от точки бифуркации каждое из семейств $\gamma_2, \dots, \gamma_m$ существует на малом отрезке $s \in [s_k, s'_k]$. На этом отрезке имеется по крайней мере два решения данного семейства при каждом s . В частности, это означает, что в точке бифуркации s_k возникают два решения.

Например, для $\delta = 0,1$ имеется три бифуркации и значения s_k, s'_k приведены в табл. 1. Отмеченные свойства бифуркаций новых семейств решений демонстрируются на фиг. 1, 2. На фиг. 1 сплошными линиями показаны три семейства периодических решений в плоскости (s, c) . На фиг. 2, a показано дополнительное семейство γ_2 и на фиг. 2, b – второе основное семейство γ_3 . Эти два семейства возникают вблизи точек $s = 1/2$ и $1/3$ как $2\pi/2$ - и $2\pi/3$ -периодические решения с конечной амплитудой. Отчетливо просматривается эволюция профилей волны каждого семейства от гармонического к солитонному по мере уменьшения s .

На фиг. 1 видно, что при выбранном $\delta = 0,1$ имеется от одного до пяти установившихся волновых режимов, различающихся значениями a, q_0, c в зависимости от значения $s \in (0, 1]$. В случае $\delta = 0,15$, для которого на фиг. 3 представлены четыре семейства периодических решений в плоскости (h_{\max}, c) , количество решений меняется от одного до семи. Этот рисунок отчетливо показывает, что второе, третье и четвертое семейства бифурцируют от первого как от базового.

3. Аттракторы и доминирующие волны. Наличие нескольких решений для бегущих стационарных нелинейных волн при фиксированных δ, s ставит вопрос об их реализуемости, а именно какое из нескольких решений будет доминировать при возбуждении и развитии малых возмущений. Введенное в [2] понятие оптимальности



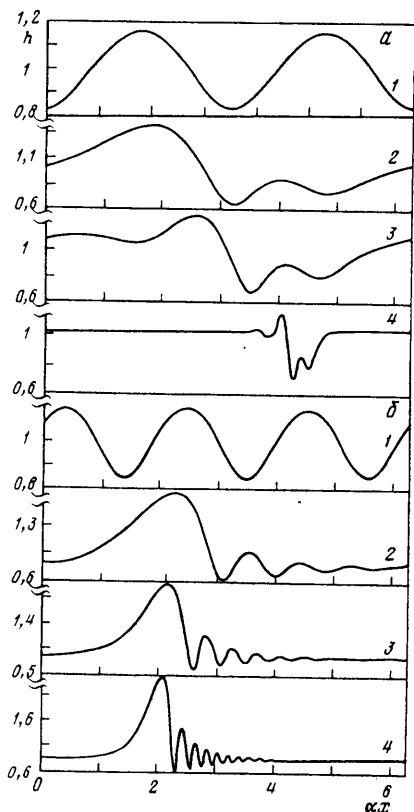
Фиг. 1. Периодические решения для $\delta = 0,1$; символами отмечены результаты расчета нестационарной задачи

классифицирует волны по величине амплитуды (соответственно расхода) при фиксированном δ на интервале значений s . В [3] рассмотрена задача классификации решений также по свойству их устойчивости к малым возмущениям и было показано, что волновые режимы при конечных δ неустойчивы, причем коэффициенты усиления существенно зависят от δ и s . Оптимальные режимы оказались наименее неустойчивыми и тем самым в некотором смысле было подтверждено предположение об их реализуемости в эксперименте. В последующих исследованиях неустойчивости волновых решений уравнений (1.1) были обнаружены также редкие случаи устойчивости (малые зоны на плоскости (δ, s)). Однако оба эти подхода касаются первого семейства и не приводят к обоснованным суждениям о преимуществах каждого из нескольких решений при фиксированных δ и s .

Более конструктивный подход состоит в том, чтобы провести прямые численные решения уравнений (1.1) по времени, получить предельные режимы, притягивающие решения от малых начальных данных, и сравнить их с бифуркациями установившихся периодических волн. Численные решения этой задачи, начатые в [3] и продолженные в [10, 11], позволили установить следующие общие результаты: 1) саморазвитие начальных возмущений заканчивается либо формированием бегущей стационарной волны, либо переходом на двухпериодический (колебательный по пространству и по времени) волновой режим; 2) наблюдаются сложные переходные процессы с формированием промежуточных волновых структур. Дальнейшие исследования нестационарной задачи, включающие расширение численных экспериментов и сопоставление их результатов с бифуркациями бегущих стационарных волн привели к представлению о доминирующих волнах.

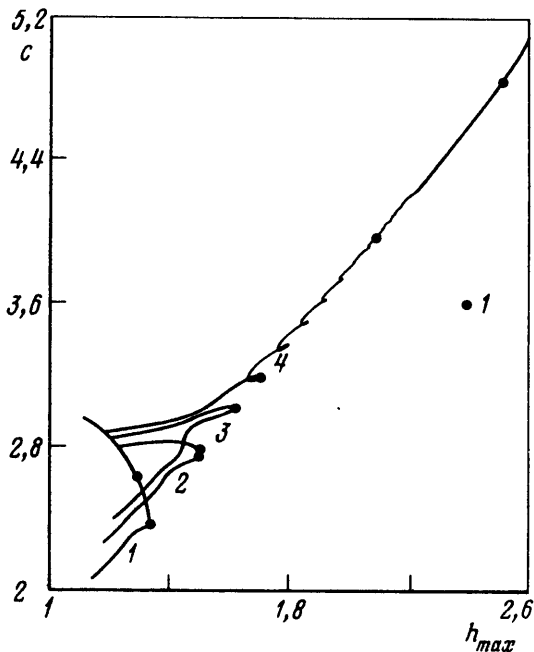
Обратимся к анализу систематических численных результатов, касающихся нестационарных решений уравнений (1.1)

Аттракторы уравнений (1.1) при конечных значениях δ исследовались прямым численным решением динамической системы уравнений метода Галеркина с различными начальными данными. Для каждого выбранного приведенного волнового числа s интегрирование по t проводилось до выхода решения на отчетливо фиксируемое предельное состояние. Для вычисления нелинейных операций в пространстве фурье-коэффициентов применяется быстрое преобразование Фурье. В процессе вычислений исключались ошибки ложного представления, которые могут приводить



Фиг. 2

Фиг. 2. Семейства периодических волн для $\delta = 0,1$: $a - \gamma_2, s = 0,4763, 0,4, 0,25, 0,05$ (кривые 1-4), $b - \gamma_3, s = 0,3208, 0,26, 0,15, 0,08$ (кривые 1-4)



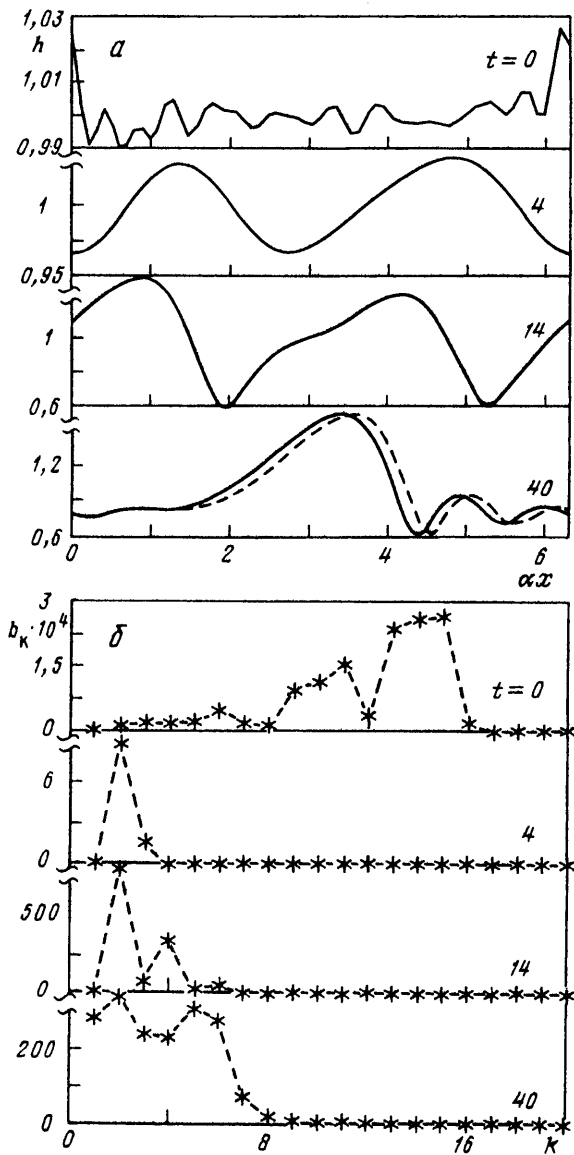
Фиг. 3

Фиг. 3. Периодические решения для $\delta = 0,15$; точками 1 отмечены результаты расчета нестационарной задачи

к нелинейной численной неустойчивости; число гармоник варьировалось от 32 до 256. Контролируемая точность решения обеспечивалась на больших временах тем, что по мере усложнения профиля волны увеличивался параметр N в (2.1) так, чтобы $|h_N| < \epsilon_1 |h_1|$ ($\epsilon_1 \ll 1$) в каждый момент времени.

Исследовались начальные условия двух типов при $t = 0$: задавалась одна ненулевая фурье-гармоника, задавались первые $N/2$ ненулевых гармоник с малыми амплитудами, которые вычислялись с помощью генератора псевдослучайных чисел. Первый случай соответствует искусственному возбуждению волны определенной частоты, второй моделирует естественное развитие волн вследствие гидродинамической неустойчивости.

Некоторые результаты вычислений предельных значений c, a представлены в плоскости (s, c) (фиг. 1) и в плоскости (h_{max}, c) (фиг. 3). Точками 1 отмечены величины, соответствующие аттракторам нестационарной задачи. Значения этих величин и предельного решения в целом полностью определяются значениями δ, s ; они не зависят от типа начальных условий и от амплитуды ненулевой гармоники. Из анализа результатов на фиг. 1, 3 следует, что аттракторы уравнений (1.1) совпадают с теми установившимися волновыми решениями уравнения (1.2), которые при выбранных значениях δ, s имеют наибольшую амплитуду и наибольшую фазовую скорость. Переход аттрактора с одного семейства периодических волн на другое с



Фиг. 4. Эволюция волнового режима для $\delta = 0,1$, $s = 0,3$

изменением s происходит скачком (на фиг. 1 отчетливо видны два скачка по числу бифурцирующих семейств). На фиг. 4, а можно проследить этапы эволюции профиля волны в одном из расчетов. Отчетливо виден переход от начального стохастического распределения амплитуд гармоник к почти гармонической волне, а затем преобразование ее в волну второго основного семейства. Именно эта волна, показанная пунктиром на фиг. 4, а, имеет максимальные значения s и a при данном выбранном значении s . При малых значениях s ($s < s'_m$) аттракторами всегда оказываются волны второго семейства, имеющие наибольшую фазовую скорость и амплитуду. На фиг. 1 этим решениям соответствует уходящая вверх левая ветвь. Отметим, что в экспериментах [1, 12] при достаточно малых частотах также наблюдаются быстрые уединенные волны, характерные для второго семейства.

s	a_{\max}	a_{\min}	q_{\max}	q_{\min}
0,3	1,102	0,995	1,272	1,221
0,35	1,083	0,604	1,260	1,103
0,466	0,920	0,539	1,191	1,074
0,5	0,817	0,792	1,155	1,149

Предельные волны, формирующиеся при $t \rightarrow \infty$ и слабо зависящие от типа начальных условий, доминируют над другими возможными волновыми структурами.

Вблизи тех значений s , при которых происходит скачкообразный переход с одного семейства на другое, возможно появление колебательных предельных решений. В табл. 2 приводятся примеры максимальных и минимальных значений амплитуды и расхода для колебательных режимов для $\delta = 0,15$.

Колебательные двухпериодические решения могут обладать собственной динамикой развития во времени. В расчетах вариантов получались как медленные монотонные изменения амплитуды колебаний, так и последующие резкие переходы к нулевой амплитуде.

Для колебательных режимов нельзя ввести единую скорость волны, поэтому на фиг. 1 для $\delta = 0,1$ символами 2, 3 отмечены минимальные и максимальные значения скорости первой гармоники в случаях $s = 0,384$ и $0,507$ соответственно, причем первый режим является слабозатухающим.

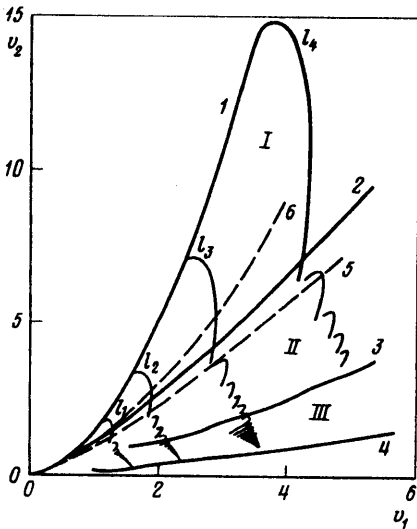
Особенно наглядно изменение во времени пространственной структуры волны просматривается на развитии спектра

$$\left\langle \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 \right\rangle = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^{2\pi/\alpha} \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 dx = \alpha^2 \sum_{k=1}^N b_k, \quad b_k = 2k^2 |h_k^2|.$$

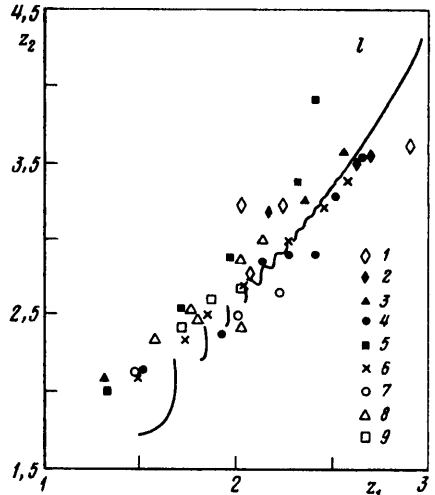
На фиг. 4, б показано изменение во времени составных частей спектра b_k для волн, представленных на фиг. 4, а. Соединяя пунктирной линией точки (k, b_k) , получаем спектральное изображение нелинейной волны, по которому особенно удобно следить за эволюцией волны в процессе ее саморазвития вследствие гидродинамической неустойчивости.

Для расчетов, представленных на фиг. 4, а, б, так же как и для любых других расчетов, можно выделить этапы нелинейного возбуждения кратных гармоник, быстрого роста гармоник из окрестности максимально растущих по линейной теории возмущений, формирования промежуточных нелинейных структур и их перестройки вследствие неустойчивости к субгармоникам и коротким волнам, формирования равновесного распределения амплитуд по спектру вследствие развития субгармоник и коротких волн.

Спектр все более заполняется по мере увеличения длины волны базовой гармоники, т.е. по мере приближения к точке $s = 0$. При этом максимально "энергетически" загруженной оказывается не базовая гармоника, а гармоника с достаточно большим номером k_{\max} , возбуждаемая нелинейным взаимодействием, например для $\delta = 0,1$ $k_{\max} = 3; 5; 9$ при $s = 0,3; 0,2; 0,1$ соответственно. Таким образом, структура предельной нелинейной волны становится все более сложной по мере приближения по ветви второго основного семейства к солитону (при $s \rightarrow 0$) и все труднее реализуются такие вычисления. Дело в том, что второе семейство имеет максимум среднего расхода при малых значениях $s \leq 0,1$. И хотя фазовая скорость и амплитуда стационарной волны при уменьшении s продолжает расти, средний расход уменьшается и аттракторы начинают терять свойства доминирования. В частности, при $s = 0,05$, $\delta = 0,04$ в расчете реализуется предельная волна, соответствующая $s = 0,1$.



Фиг. 5



Фиг. 6

Фиг. 5. Доминирующие волновые решения: кривые $l_1 - l_4$ соответствуют $\delta = 0, 1; 0, 15; 0, 247; 0, 4$
 Фиг. 6. Сравнение доминирующих волн для $\delta = 0, 15$ с экспериментальными данными: $\gamma = 3298, 1129, 491, 465, 195, 105, 722, 1147, 1116$ (точки 1-9 соответственно)

4. Доминирующие волны в экспериментах. Доминирующие волны возникают при саморазвитии малых начальных возмущений в установившийся волновой режим. При заданном параметре δ соответствующие решения уравнений (1.1) полностью определяются значением s .

Применим понятие доминирующих волн к истолкованию некоторых экспериментальных наблюдений общего характера, прежде всего, области существования установившихся периодических волн, зависимости фазовой скорости и длины волны от амплитуды волны или от ее максимальной высоты [1, 12]

Доминирующие волны можно объединить в три группы. Первая группа включает только волны первого семейства и существует при $s \in [s'_2, 1]$. Вторая группа волн включает все семейства дополнительных бифуркаций $s \in [s'_m, s'_2]$. Наконец, третья группа волн включает только волны второго семейства и существует при $s \in [s''_m, s'_m]$. Здесь s''_m – точка, в которой средний расход достигает максимума; в численных экспериментах при выборе s левее этой точки установившиеся волновые режимы не формируются. В некоторой окрестности s''_m наблюдались незатухающие колебания с волновыми числами s и $2s$.

На фиг. 5 показаны доминирующие волновые решения для четырех значений δ . В последнем случае указаны решения лишь первых пяти бифуркаций. Для удобства сравнения с экспериментами взяты координаты u_1, u_2 из [12], которые пересчитываются к универсальным параметрам уравнений (1.1), (1.2) по формулам

$$u_1 = k \operatorname{Re} = 15\delta q_0^{4/3} \alpha, \quad u_2 = \operatorname{Re} \operatorname{Fi}^{-1/11} = 7,508\delta^{9/11} q_0$$

Здесь k, Re – волновое число и число Рейнольдса из [12], $\operatorname{Fi} = \gamma^3$. На фиг. 5 воспроизведены также нейтральная кривая l , граничные линии 2, 3, 4 из [12], ограничивающие области I, II, III, в которых волны наблюдались экспериментально. Можно отметить практически полное совпадение граничных точек, разделяющих три группы доминирующих волн с экспериментальными границами волновых режимов. В областях II, III образуются четко регистрируемые установившиеся волны при

наложении малых периодических по времени возмущений в начальной области течения пленки. В области II волны, менее регулярные, образуются также и вследствие развития возмущений из внешней среды – естественно развивающиеся волны. К этой области принадлежат волны, наиболее растущие в линейном приближении (линия 5), которые имеют преимущество при естественном возникновении. Но волновая картина может быть более сложной даже при искусственном возбуждении из-за наличия двухпериодических колебательных режимов вблизи точек бифуркации промежуточных семейств. В экспериментах [1] кроме волн второй и третьей групп наблюдались также волны первой группы при $\delta \in [0,04; 0,2]$; соответствующие точки расположены вблизи линии 6 оптимальных режимов [2].

В экспериментах с волновыми пленками обычно регистрируются параметры s и a и отмечается линейная зависимость $s(a)$, которая получается также в теоретических расчетах; более четко линейная связь прослеживается между s и h_{\max} . На фиг. 3 видно, что фазовые скорости и максимальная высота волн связаны сложными немонотонными зависимостями. Однако для доминирующих волн точки на плоскости (h_{\max}, s) выстраиваются вдоль единой прямой линии, которая особенно четко видна на решениях второго основного семейства. При увеличении δ поведение сплошных линий усложняется, но главная линейная последовательность сохраняется.

Экспериментальные результаты о длинах волн λ в [12] представлены в безразмерных комплексах

$$z_1' = \left(\frac{gA^3}{v^2} \right)^{1/3} \text{Re}^{-0,46} \text{Fi}^{-0,02}, \quad z_2' = \left(\frac{\lambda}{\sigma / \rho g} \right)^{1/3}$$

где A – максимальная высота волны. На основе уравнений (1.1), (1.2) и связанных с ними преобразований переменных легко показать, что универсальными, не зависящими от свойств конкретной жидкости параметрами являются величины

$$z_1 = \gamma^{1,04/11} z_1' = (45\delta)^{-1,14/11} \left(\frac{q_0}{3} \right)^{-0,46} h_{\max}$$

$$z_2 = \gamma^{1/22} z_2' = (2\pi)^{1/3} (45\delta)^{1/33} \alpha^{-1/3}$$

На фиг. 6 прерывистая линия l изображает доминирующие волны для $\delta = 0,15$ (три разрыва соответствуют трем точкам бифуркации). Соответствующие линии для $\delta = 0,1$ и $0,247$ проходят близко к линии l и не нанесены, чтобы не загромождать рисунок. Видно, что расчетные значения z_1, z_2 и экспериментальные точки [12] для различных жидкостей укладываются в единую область на плоскости (z_1, z_2) .

Заключение. Понятие доминирующих волн естественным образом упорядочивает семейства периодических и уединенных волновых решений уравнений (1.1), (1.2) и связывает их с теми волновыми структурами, которые развиваются в экспериментальных условиях. Для каждого δ множество доминирующих волн состоит из всех решений бифурцирующих семейств γ_k , которые при каждом фиксированном s обладают максимальной амплитудой и фазовой скоростью. Именно эти решения развиваются из малых начальных возмущений с течением времени. Это множество определено на отрезках $\Delta_{k,s}$, $k = 1, \dots, m$, в области изменения $s \in (0; 1]$, разделенных узкими интервалами вблизи точек перехода с одного семейства на другое. При этом раскрывается решающее влияние параметра δ на усложнение нелинейной динамики волновых решений. Число бифурцирующих семейств решений γ_k быстро возрастает с увеличением δ и влияние фактора случайности в возбуждении промежуточных колебательных режимов также должно возрастать. Это согласуется с тем, что при больших значениях δ регулярные волновые решения в экспериментах не наблюдаются.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 94-01-01637).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Каница П.Л., Каница С.П.* Волновые течения тонких слоев вязкой жидкости // ЖЭТФ. 1949. Т. 19. № 2. С. 105–120.
2. *Шкадов В.Я.* Волновые режимы течения тонкого слоя вязкой жидкости под действием силы тяжести // Изв. АН СССР. МЖГ. 1967. № 1. С. 43–51.
3. *Шкадов В.Я.* К теории волновых течений тонкого слоя вязкой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1968. № 2. С. 20–25.
4. *Шкадов В.Я.* Уединенные волны в слое вязкой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1977. № 1. С. 63–66.
5. *Бунов А.В., Демехин Е.А., Шкадов В.Я.* О неединственности нелинейных волновых решений в вязком слое // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 4. С. 691–696.
6. *Бунов А.В., Демехин Е.А., Шкадов В.Я.* Бифуркация уединенных волн в стекающем слое жидкости // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1986. № 2. С. 73–78.
7. *Chang H.-C.* Wave evolution on a falling film // Ann. Rev. Fluid Mech. 1994. V. 26. P. 103–136.
8. *Chang H.-C., Demekhin E., Kalaidin E.* Interaction dynamics of solitary waves on a falling films // J. Fluid Mech. 1995. V. 294. P. 123–154.
9. *Demekhin E.A., Tokarev G.Yu., Shkadov V.Ya.* Hierarchy of bifurcations of space-periodic structures in a nonlinear model of active dissipative media // Physica D. 1991. V. 52. № 2/3. P. 338–361.
10. *Демехин Е.А., Шкадов В.Я.* О нестационарных волнах в слое вязкой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1981. № 3. С. 151–154.
11. *Демехин Е.А., Токарев Г.Ю., Шкадов В.Я.* Двумерные нестационарные волны на вертикальной пленке жидкости // Теоретические основы химической технологии. 1987. № 2. С. 177–183.
12. *Алексеев С.В., Накоряков В.Е., Покусаев Б.Т.* Волновое течение пленок жидкости. Новосибирск: Наука, 1992. 256 с.

Москва

Поступила в редакцию
29.VIII.1996