

УДК 532.135–1:532.525.2

© 1997 г. В.М. ЕНТОВ, Х.С. КЕСТЕНБОЙМ, С.В. ПОКРОВСКИЙ,
Г.А. ШУГАЙ**ОДНОМЕРНАЯ ДИНАМИКА СТРУЙНЫХ ТЕЧЕНИЙ
УПРУГИХ ЖИДКОСТЕЙ**

В одномерном приближении исследуется течение упруговязкой жидкости в свободных струях и при формировании волокон. Учитывается взаимодействие течений в струе и формирующем насадке. Исследована структура зон перехода, вырождающихся в предельных случаях в ударные волны. Показано, что в зависимости от характера мгновенноупругого поведения возможно существование стационарных ударных волн расширения или сужения сечения струи. Численно исследованы стационарные режимы истечения.

Исследование упруговязких жидкостей – растворов и расплавов полимеров – представляет интерес для многих приложений, включающих процессы прядения волокон, диспергирования жидкостей и др. Однако оно важно и с чисто научной точки зрения, поскольку упругость формоизменения существенно влияет на картину течения, в обычной гидродинамике определяемую взаимодействием вязких и инерционных сил. Вместе с тем количественный анализ упругих эффектов предельно усложнен неопределенностью реологических определяющих соотношений, особенно в наиболее интересной области больших упругих деформаций, сложностью математической формулировки задачи и несовершенством существующих численных алгоритмов. Поэтому анализ простейших ситуаций, допускающих детальное исследование, остается важным инструментом изучения гидродинамических эффектов в полимерных жидкостях. В данной работе, продолжающей серию исследований [1–4], рассматривается одномерная динамика струйных течений упругих жидкостей, реализующихся в свободных струях и при вытяжке волокон. В отличие от указанных работ основной анализ проведен для наиболее общепотребительной модели упруговязкой жидкости – модели Олдройда – и ее модификаций, учитывающих неидеальность упругого поведения и влияние конечной растяжимости полимерных молекул. Выполнено исследование условий эволюционности разрывов, возникающих при пренебрежении "внешней" вязкостью модели, и структуры соответствующих им переходных зон и пограничных слоев.

1. Постановка задачи. Основные уравнения. Рассмотрим течение полимерной жидкости, вытекающей из сужающегося насадка и образующей струю. Будем различать собственно струйное течение, или свободную струю, к концу которой не приложены какие-либо внешние силы, и течение формирования, реализуемое в формуемом полимерном волокне, наматываемом на тянущий приемный барабан на некотором расстоянии от насадка. Струя предполагается тонкой, имеющей характерный диаметр, малый по сравнению с характерной длиной, и течение в ней естественно рассматривать в осредненном, "гидравлическом" приближении, описывая его интегральными параметрами: средней осевой скоростью u , площадью поперечного сечения f и осевым напряжением σ .

Тогда уравнения сохранения массы и импульса принимают с учетом несжимаемости жидкости вид [1–5]

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial fv}{\partial x} = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial fv}{\partial t} + \frac{\partial fv^2}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial x} \quad (1.2)$$

$$F(x, t) = \sigma(x, t) f(x, t) \quad (1.3)$$

Здесь ρ – плотность жидкости, F – сила, действующая в сечении струи.

В этих уравнениях не учитываются капиллярные и внешние силы, такие, как сопротивление воздуха, действующие на боковой поверхности струи. Это означает, что рассматриваются достаточно "вязкие" концентрированные полимерные системы, типичные, скажем, для процессов формирования волокон, и основное внимание обращается на эффекты взаимодействия упругих, вязких и инерционных сил.

В силу тонкости струи локально в окрестности некоторой точки оси струи x_0 поле скоростей имеет вид, отвечающий одноосному растяжению, при этом тензоры скоростей деформаций и напряжений диагональные

$$v_1 \equiv v(x, t) = v(x_0, t) + \alpha(x_0, t)(x - x_0) \quad (1.4)$$

$$v_2 = -0,5\alpha(x_0, t)x_2, \quad v_3 = -0,5\alpha(x_0, t)x_3$$

$$\mathbf{D} = \text{diag}\{\alpha, -\alpha/2, -\alpha/2\}, \quad \alpha = \partial v / \partial x \quad (1.5)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{E} + \boldsymbol{\tau} = \text{diag}\{-p + \tau_1, -p + \tau_2, -p + \tau_3\}$$

Здесь декартовы координаты x, x_2, x_3 отсчитываются вдоль оси струи и по нормальям к ней.

Соотношение между \mathbf{D} и $\boldsymbol{\tau}$ определяется реологическим уравнением состояния жидкости. Приведенное выше квазиодномерное описание является общепринятым при анализе динамики струйных течений вообще и процессов формирования волокон в частности. При более детальном анализе оно дополняется уравнением энергии и учетом трения по боковой поверхности (например, [5–7]). Традиционный анализ берет свое начало с работ по формированию вязких, неупругих систем, в которых напряжения однозначно связаны со скоростью деформации. Для таких систем в рамках квазиодномерного приближения условия формирования струи полностью характеризуются двумя параметрами: площадью сечения струи на выходе из насадка f_0 и расходом Q . В результате течения в струе и в насадке оказываются "развязанными" и могут рассматриваться независимо.

В случае упругой жидкости порядок определяющих уравнений задачи вследствие появления дополнительных динамических переменных повышается и дополнительные условия сопряжения течений в струе и насадке делают необходимым их совместное рассмотрение [1–4]. При этом для течения в насадке также использовано осредненное "гидравлическое" описание, оперирующее интегральными характеристиками – площадью сечения потока f , средней скоростью v и осевой составляющей внешней силы, действующей со стороны стенки насадка на боковую поверхность потока в расчете на единицу длины F_x . Соответствующие уравнения неразрывности и импульса имеют вид

$$\frac{\partial fv}{\partial x} = 0 \quad (1.6)$$

$$\rho \frac{\partial fv}{\partial t} + \rho \frac{\partial fv^2}{\partial x} = \frac{\partial f\sigma}{\partial x} + F_x \quad (1.7)$$

В уравнении (1.7) поток импульса записан в предположении, что распределение скорости в сечении однородно. Замыкающие соотношения должны связывать распре-

деление средней скорости по длине насадка с нормальной и тангенциальной компонентами приложенной к поверхности силы – давлением P и силой сопротивления (трения). В данной работе предполагается, что вклад бокового давления является преобладающим и силой трения можно пренебречь. Это означает ограничение рассмотрения такими потоками, в которых в насадке изменение кинетической энергии жидкости и (или) потенциальной энергии упругой деформации значительно больше, чем потери энергии на трение о стенки насадка.

Грубую оценку соответствующих условий можно получить следующим образом. Пусть длина насадка l , входной радиус a_0 , выходной a_1 , жидкость характеризуется плотностью ρ , вязкостью μ , модулем сдвига G и временем релаксации τ . Тогда при расходе Q и $\tau \gg la_0^2 / Q$ приращения кинетической и упругой составляющих энергии единицы объема жидкости и потери на трение о стенки оцениваются как

$$\Delta E = \frac{1}{2} \frac{\rho Q^2}{\pi^2 a_1^4} \left(1 - \frac{a_1^4}{a_0^4} \right), \quad \Delta U \approx \frac{1}{2} \frac{G a_0^4}{a_1^4}, \quad \Delta p \leq \frac{8\mu l Q}{\pi a_1^4} \quad (1.8)$$

Таким образом, естественная область применимости используемого приближения определяется неравенствами

$$\frac{\Delta p}{\Delta E} \ll 1, \quad \frac{\Delta p}{\Delta U} \ll 1, \quad \frac{16\pi\mu l}{\rho Q} \ll 1, \quad \frac{16\mu Q l}{\pi G a_0^4} \ll 1 \quad (1.9)$$

Эти условия реализуются в опытах по истечению полимерных растворов из сходящихся коротких насадков с достаточно высокими скоростями; значительно труднее оценить область применимости сформулированного приближения к течениям растворов и расплавов, реализуемым в технологических приложениях, например при формовании волокон. Не представляет труда усовершенствовать анализ, введя в уравнения то или иное приближенное выражение для силы трения через локальные характеристики (расход и радиус сечения).

В случае пренебрежимо малого трения наиболее выпукло проявляются специфические эффекты, вносимые в гидродинамику упругостью, присущей полимерным жидкостям. Осевая компонента реакции стенки выражается тогда как

$$F_x = P \frac{df}{dx} \quad (1.10)$$

В предположении однородности распределения всех переменных по сечению канала боковое давление с точностью до членов, квадратичных по наклону стенок канала, определяется взятой с обратным знаком радиальной компонентой тензора напряжений в среде: $P = -\sigma_2$. Тогда осевое напряжение в жидкости равно

$$\sigma = \sigma_1 = s(x, t) - P(x, t); \quad s = \sigma_1 - \sigma_2 \quad (1.11)$$

В итоге уравнение импульсов для течения в сопле принимает вид

$$\rho \frac{\partial f v}{\partial t} + \rho \frac{\partial f v^2}{\partial x} = \frac{\partial f s}{\partial x} - f \frac{dP}{dx} \quad (1.12)$$

весьма сходный с уравнениями движения в струе с тем важным отличием, что площадь сечения является здесь известной функцией осевой координаты, а боковое давление отлично от нуля и подлежит определению.

2. Модель жидкости. В качестве основной модели упруговязкого поведения выберем вариант модели Олдройда с верхней конвективной производной, формально определяемый соотношениями

$$\sigma = GA + 2\mu D - \rho E \quad (2.1)$$

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = (\nabla\mathbf{v}) \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot (\nabla\mathbf{v})^T - \frac{1}{\tau}(\mathbf{A} - \mathbf{E}) \quad (2.2)$$

Здесь $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор напряжений, $\nabla\mathbf{v}$ – тензор градиента скорости, \mathbf{D} – тензор скоростей деформаций, p – гидростатическое давление, μ – вязкость, G – модуль сдвига, τ – время релаксации, предполагаемые константами жидкости, \mathbf{A} – структурный тензор, характеризующий упругие деформации. Данная модель широко используется в гидродинамике упругих жидкостей, прежде всего, в силу следующих обстоятельств. Модель удовлетворительно описывает результаты наблюдений для течений с преобладанием растяжения. В предельном случае отсутствия релаксации она переходит в модель неогукова упругого тела с линейным внешним трением – своего рода обобщенное тело Кельвина–Фойгта с линейной упругостью и конечностью упругих деформаций. Данная модель может быть выведена из микромеханической модели "малоцентрированной суспензии упругих гантелей" в вязкой жидкости [8–10], и, таким образом, внутренне непротиворечива.

Используем модель Олдройда в несколько модифицированной форме, допуская нелинейность связи между упругими деформациями и упругими напряжениями [11]. Запишем соотношения (2.1), (2.2) в виде

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_e + 2\mu\mathbf{D} - p\mathbf{E} \quad (2.3)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_e = \frac{\partial\Psi}{\partial I_A}(\mathbf{A} - \mathbf{E}) + \frac{\partial\Psi}{\partial I_{A^{-1}}}(\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{E}) \quad (2.4)$$

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = (\nabla\mathbf{v}) \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot (\nabla\mathbf{v})^T - \frac{1}{\tau G}\boldsymbol{\sigma}_e \quad (2.5)$$

Здесь Ψ – упругий потенциал, являющийся функцией первых инвариантов тензора упругих деформаций \mathbf{A} и обратного ему тензора \mathbf{A}^{-1} , $\Psi = \Psi(I_A, I_{A^{-1}})$. В частности, будем использовать соотношение Муни – Ривлина

$$\boldsymbol{\sigma}_e = G(\mathbf{A} - \mathbf{E} + \varepsilon(\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{E})) \quad (2.6)$$

достаточно хорошо описывающее поведение каучукоподобных систем, и модель упругих гантелей с конечной растяжимостью (FENE-model) [8, 9]

$$\boldsymbol{\sigma}_e = G\Phi(\text{Tr } \mathbf{A})(\mathbf{A} - \mathbf{E}), \quad \Phi(z) = \frac{L_\infty}{L_\infty - z} \quad (2.7)$$

Зависимость (2.7) с такой или несколько иной функцией Φ широко используется для учета "ужесточения" полимерных систем при сильной вытяжке вследствие ограниченной растяжимости полимерных цепей. При этом $\sqrt{L_\infty}$ характеризует максимальную степень растяжения молекул, для свободно сочлененных цепных молекул $L_\infty \sim \sqrt{N}$, где N – число звеньев цепи.

Для струйных течений тензоры \mathbf{A} , $\boldsymbol{\sigma}$ (а также в соответствии с (1.5) тензор \mathbf{D}) являются диагональными и вполне характеризуются двумя главными значениями – "осевым" и "поперечным"

$$\mathbf{A} = \text{diag}[a_{11}, a_{22}, a_{22}], \quad \boldsymbol{\sigma} = \text{diag}[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_2] \quad (2.8)$$

Тогда реологическая характеристика среды (разность нормальных напряжений) $s = \sigma_1 - \sigma_2$ будет определяться из выражения

$$s = 3\mu \frac{\partial v}{\partial x} + GS(a_{11}, a_{22}) \quad (2.9)$$

где для классической модели Олдройда (2.1)–(2.2) функция S равна разности $a_{11} - a_{22}$ нормальных компонент тензора упругих деформаций. Для обобщенной модели Олдройда (2.3)–(2.5) в случае жидкости Муни – Ривлина (2.6) и в случае FENE-модели (2.7) указанная выше функция принимает соответственно следующий вид:

$$S = (a_{11} - a_{22}) + \varepsilon(1/a_{11} - 1/a_{22}) \quad (2.10)$$

$$S = (a_{11} - a_{22})\Phi(a_{11} + 2a_{22}) \quad (2.11)$$

3. Гиперболическое приближение. Волны и характеристики. Уравнения динамики струи упругой несжимаемой жидкости (1.1)–(1.3), (2.3)–(2.5) записываются с учетом соотношений (1.5), (2.8)–(2.9). Так, например, для упругой жидкости с ограниченной растяжимостью полимерных цепей (2.11) имеем

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial fv}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial fv}{\partial t} + \frac{\partial fv^2}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial f\sigma}{\partial x}, \quad \sigma = s \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial a_{11}}{\partial t} + v \frac{\partial a_{11}}{\partial x} = 2 \frac{\partial v}{\partial x} a_{11} - \frac{L_\infty}{\tau[L_\infty - a_{11} - 2a_{22}]} (a_{11} - 1)$$

$$\frac{\partial a_{22}}{\partial t} + v \frac{\partial a_{22}}{\partial x} = - \frac{\partial v}{\partial x} a_{22} - \frac{L_\infty}{\tau[L_\infty - a_{11} - 2a_{22}]} (a_{22} - 1)$$

В течениях с преобладанием упругих эффектов естественно рассматривать вязкость μ как малый параметр. Полагая в (3.1) $\mu = 0$, получаем систему уравнений гиперболического приближения. Характеристические скорости λ_i этой системы уравнений суть

$$\lambda_{1,2} = v \pm c, \quad \lambda_{3,4} = v \quad (3.2)$$

$$c = \sqrt{\frac{G}{\rho}} Z, \quad Z = -S + 2a_{11} \frac{\partial S}{\partial a_{11}} - a_{22} \frac{\partial S}{\partial a_{22}}, \quad GS = \sigma_1 - \sigma_2 \quad (3.3)$$

Три характеристические скорости всегда положительны (направлены по потоку), а одна может быть как положительной, так и отрицательной. Ввиду очевидной и далеко идущей аналогии с газовой динамикой далее режимы с $v > c$ называются "сверхзвуковыми", а режимы с $v < c$ – "дозвуковыми". Величина c , называемая скоростью звука, выражает скорость распространения малых возмущений площади сечения и определяется сдвиговой упругостью материала. Для полимерных жидкостей (растворов) скорость "звука" c невелика (0,1–10 м/с) и попадает в обычно реализуемый в эксперименте диапазон значений скорости струи; кроме того, она сильно зависит от состояния упругой деформации и может резко возрасти с ростом осевого напряжения (см. соответствующие оценки ниже). Оба эти обстоятельства существенны для последующего анализа и его возможных приложений.

Система уравнений (3.1) в вырожденном случае $\mu = 0$ допускает разрывные решения, удовлетворяющие соотношениям на скачках вида

$$f^+(v^+ - V) = f^-(v^- - V) \quad (3.4)$$

$$-\frac{f^+\sigma^+}{\rho} + f^+v^+(v^+ - V) = -\frac{f^-\sigma^-}{\rho} + f^-v^-(v^- - V)$$

$$(v^+ - V)/\sqrt{a_{11}^+} = (v^- - V)/\sqrt{a_{11}^-}$$

$$(v^+ - V)a_{22}^+ = (v^- - V)a_{22}^-$$

Здесь V – скорость скачка, индексами минус и плюс отмечены предельные

значения переменных перед и за скачком. Первые два соотношения выражают баланс массы и импульса; два другие выражают условие мгновенной упругой деформации: характеристики упругой деформации (компоненты тензора \mathbf{A}) изменяются на разрыве в соответствии с полной деформацией жидкости. Они следуют из системы (3.1) при условии, что время прохождения элемента жидкости через скачок много меньше времени релаксации τ .

Скачок должен удовлетворять условиям эволюционности, которые обычно состоят в том, чтобы число уходящих от разрыва характеристик было на единицу меньше числа выставленных на нем граничных условий [12, 13]. В рассматриваемом случае (3.2)–(3.4) эволюционным разрывам соответствует переход сверхзвук – дозвук, как и в ударных волнах в газовой динамике. Более тонким критерием эволюционности разрывного решения у системы гиперболического вырождения является существование однозначного решения задачи о структуре (см. [14]) на основе полной системы уравнений, в данном случае системы (3.1).

Рассмотрим окрестность разрыва решения уравнений гиперболического вырождения, движущегося со скоростью V . Введем быструю пространственную переменную в системе координат, движущейся со скачком, положив $\xi = (x - Vt)/\mu$. Для решения типа бегущей волны, связанной со скачком, находим уравнения

$$(v - V) \frac{d \ln f}{d\xi} + \frac{dv}{d\xi} = 0 \quad (3.5)$$

$$-V \frac{\partial f v}{\partial \xi} + \frac{\partial f v^2}{\partial \xi} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial f \sigma}{\partial \xi}$$

$$\sigma = G(a_{11} - a_{22}) \Phi(a_{11} + 2a_{22}) + 3 \frac{dv}{d\xi}$$

$$(v - V) \frac{d \ln a_{11}^{-1/2}}{d\xi} + \frac{dv}{d\xi} = \mu \frac{L_{\infty}(1 - 1/a_{11})}{\tau(L_{\infty} - a_{11} - 2a_{22})}$$

$$(v - V) \frac{d \ln a_{22}}{d\xi} + \frac{dv}{d\xi} = -\mu \frac{L_{\infty}(1 - 1/a_{22})}{\tau(L_{\infty} - a_{11} - 2a_{22})}$$

Полагая здесь $\mu = 0$ и интегрируя, находим систему первых интегралов решения в бегущей волне

$$f(v - V) = \text{const}_1 \equiv Q \quad (3.6)$$

$$-\frac{f\sigma}{\rho} + fv(v - V) = \text{const}_2 \equiv M$$

$$\frac{v - V}{\sqrt{a_{11}}} = \text{const}_3 \equiv \alpha_1$$

$$(v - V)a_{22} = \text{const}_4 \equiv \alpha_2$$

При известных постоянных и скорости волны V соотношения (3.6) позволяют выразить все неизвестные переменные через одну из них, скажем, f или v , и система (3.5) приводится к одному уравнению первого порядка

$$d\xi = 3 \frac{dv}{\sigma - G(a_{11} - a_{22}) \Phi(a_{11} + 2a_{22})} \quad (3.7)$$

в котором σ , a_{11} и a_{22} находятся из интегралов (3.6). Например, выражая все переменные через площадь сечения струи f , имеем

$$v = V + \frac{Q}{f}, \quad \sigma = \frac{\rho}{f} \left[M - Q \left(V + \frac{Q}{f} \right) \right], \quad a_{11} = \left(\frac{Q}{\alpha_1 f} \right)^2, \quad a_{22} = \frac{\alpha_2 f}{Q} \quad (3.8)$$

Если рассматриваемое решение типа бегущей волны соответствует тонкой структуре скачка внешнего решения со значениями $f^-, v^-, a_{11}^-, a_{22}^-$ и $f^+, v^+, a_{11}^+, a_{22}^+$ соответственно, перед и за скачком, движущимся со скоростью V , искомое решение уравнения (3.7) должно стремиться к указанным значениям при $\xi \rightarrow \mp \infty$ соответственно. Необходимым условием этого является обращение знаменателя в правой части (3.7) в нуль, что приводит к соотношениям (3.4), т.е. к условиям на скачках внешнего решения, выполнение которых является необходимым условием существования внутренней структуры. Для того чтобы искомая структура существовала, необходимо и достаточно, чтобы этот знаменатель, обращаясь в нуль при подстановке значений, отвечающих предельным значениям переменных на скачке, сохранял знак при промежуточных значениях переменных. Таким образом, наряду с условиями (3.4) должно выполняться одно из неравенств

$$\sigma(f) < G[a_{11}(f) - a_{22}(f)] \Phi(a_{11}(f), a_{22}(f)) \quad (3.9)$$

$$\sigma(f) > G[a_{11}(f) - a_{22}(f)] \Phi(a_{11}(f), a_{22}(f)) \quad (3.10)$$

Неравенствам (3.9) и (3.10) соответствуют, согласно (3.7), решения с $dv/d\xi < 0$ и $dv/d\xi > 0$, т.е. волны торможения или ускорения.

Интегралы (3.8) определяют однопараметрическое семейство состояний $\{f, a_{11}, a_{22}, v\}$, которые могут быть связаны с данным исходным состоянием (в качестве которого выберем состояние $\{f^-, a_{11}^-, a_{22}^-, v^-\}$ перед скачком) стационарной волной. В качестве параметра семейства удобно рассматривать степень растяжения $\lambda = f^-/f$ по отношению к исходному ($-$) состоянию. Тогда в волне

$$f = \lambda^{-1} f^-, \quad v = V + \lambda(v^- - V), \quad a_{11} = \lambda^2 a_{11}^-, \quad a_{22} = \lambda^{-1} a_{22}^- \quad (3.11)$$

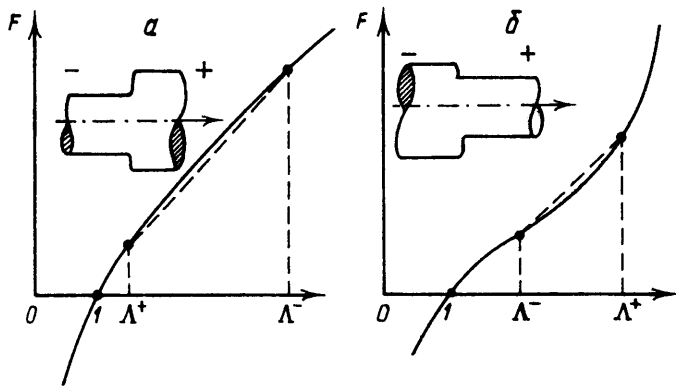
Нетрудно видеть, что эти соотношения выражают мгновенную упругую деформацию от исходного состояния к текущему. Каждому из состояний отвечает определенное упругое напряжение σ_e , выражающееся через a_{11} и a_{22} , и соответствующая упругая сила $F_e = f\sigma_e$. При заданном исходном состоянии и упругое напряжение, и упругая сила однозначно выражаются через степень растяжения λ . Зависимость $F_e(\lambda)$ выражает функцию упругого нагружения.

Полученные условия существования структуры скачка допускают простую трактовку в терминах функции упругого нагружения. Прежде всего, меняя λ , найдем, следуя вдоль функции упругого нагружения, "разгруженное состояние" $\{f^0, v^0, a_{11}^0, a_{22}^0\}$, которому соответствует нулевая растягивающая сила $F_e = 0$. В отличие от случая истинно упругого материала разгруженное состояние будет, вообще говоря, зависеть от исходного. Будем временно отсчитывать эффективные растяжения от разгруженного состояния, положив $\Lambda = f^0/f$. Тогда состояниям по обе стороны скачка соответствуют эффективные растяжения Λ^- и Λ^+ , функция упругого нагружения, скорость скачка и скорость звука выражаются соотношениями

$$F(\Lambda) = f(\Lambda) \sigma_e(\Lambda), \quad V = v^- - \Lambda^- D = v^+ - \Lambda^+ D \quad (3.12)$$

$$D = \sqrt{\frac{F(\Lambda^+) - F(\Lambda^-)}{\rho f^0 (\Lambda^+ - \Lambda^-)}}, \quad c = \Lambda \sqrt{\frac{1}{\rho f^0} \frac{dF}{d\Lambda}} \quad (3.13)$$

Нетрудно видеть, что эти соотношения отвечают распространению волн в чисто упругом стержне площади f^0 в разгруженном состоянии с законом растяжения $F(\Lambda)$. "Текущность" материала в данном случае проявляется лишь в том, что само начальное (разгруженное) состояние заранее не определено и находится из решения задачи в целом. Теперь условия эволюционности скачка могут быть выражены весьма просто: хорда, соединяющая точки $(\Lambda^-, F(\Lambda^-))$ и $(\Lambda^+, F(\Lambda^+))$, должна лежать по одну сторону



Фиг. 1. Связь профиля струи в скачке с видом функции упругого нагружения

графика $F(\Lambda)$, причем скорость скачка V меньше скорости характеристик перед скачком $v^- - c^-$ и больше скорости характеристик за скачком $v^+ - c^+$. Отсюда, привлекая (3.12), (3.13), получаем

$$F'(\Lambda^+) \geq \frac{F(\Lambda^+) - F(\Lambda^-)}{\Lambda^+ - \Lambda^-} \geq F'(\Lambda^-) \quad (3.14)$$

Соотношение (3.14) позволяет просто отбирать допустимые скачки по виду функции упругого нагружения. В частности, если эта функция вогнута, $F''(\Lambda) > 0$, то допустимы скачки с $\Lambda^- < \Lambda^+$ и $f^- > f^+$, или "ударные волны растяжения"; в противоположном случае ($F''(\Lambda) < 0$) допустимы ударные волны разгрузки с $\Lambda^- > \Lambda^+$ и $f^- < f^+$ (ср. фиг. 1). Эти условия, совпадающие с обычными характеристическими условиями эволюционности скачков, являются, однако, в общем случае лишь необходимыми и оказываются достаточными только в случае отсутствия точек перегиба у функции упругого нагружения.

4. Стационарная струя. Рассмотрим стационарное струйное течение упруговязкой жидкости в формируемом волокне. При этом уравнения (3.1) должны решаться при краевых условиях

$$v(0) = v^0, \quad v(L) = v_L, \quad f(0) = f^0, \quad a_{11}(0) = a_{11}^0, \quad a_{22}(0) = a_{22}^0 \quad (4.1)$$

Первые три из этих условий являются чисто кинематическими и в комментарии не нуждаются; начальные данные для a_{11}, a_{22} естественным образом вычисляются по предыстории деформации жидкости в формирующем насадке. В случае гиперболического вырождения ($\mu = 0$) порядок задачи понижается и одно из условий (4.1) оказывается избыточным. Это означает, что переопределенная гиперболическая задача имеет, вообще говоря, разрывные решения со следующими вариантами.

1. Всюду реализуется сверхзвуковое течение, $v > c$; возмущения распространяются только слева направо, граничное условие на дальнем (приемном) конце не выполняется.

2. Всюду реализуется дозвуковое течение, $v < c$; часть возмущений распространяется против потока; на срезе насадки возникает стационарный скачок, в котором скорость, площадь сечения струи и компоненты упругой деформации испытывают разрывы, и выполняются интегральные законы сохранения (массы жидкости и импульса) и условия мгновенной упругой разгрузки [1–3]

$$f^- v^- = f^+ v^+, \quad a_{11}^- (f^-)^2 = a_{11}^+ (f^+)^2, \quad a_{22}^- / f^- = a_{22}^+ / f^+, \quad \sigma_1^- = \sigma_1^+ \quad (4.2)$$

Соотношениям (4.2) формально соответствует сопряжение решений уравнений движения в насадке с уравнениями в свободной струе. Для того чтобы соответствующий скачок был устойчив, он должен "опираться на срез сопла". Эта интуитивная формулировка означает, что скорость скачка V , формально вычисленная по соотношениям для свободной струи (3.4) со значениями

$$v^- = v^0, \quad f^- = f^0, \quad a_{11}^- = a_{11}^0, \quad a_{22}^- = a_{22}^0$$

$$v^+ = v(+0), \quad f^+ = f(+0), \quad a_{11}^+ = a_{11}(+0), \quad a_{22}^+ = a_{22}(+0)$$

должна быть отрицательной: $V < 0$; если же $V > 0$, то разрыв отходит от среза насадка, и вблизи него возникает сверхзвуковая зона, насадок является своего рода одно-сторонней, неудерживающей связью. Причина этого в том, что для течения в насадке изменения сечения невозможны и возмущения скорости распространяются с бесконечной скоростью.

3. Наконец, третья возможность состоит в том, что вблизи насадка имеет место сверхзвуковое ($v > c$) течение, вблизи приемного конца – дозвуковое ($v < c$), они сопрягаются стационарным свободным скачком (ударной волной), на котором выполняются соотношения (3.4).

При сохранении в системе уравнений малой вязкости μ вместо разрывов возникают пограничные слои. Пограничный слой, отвечающий свободным ударным волнам, расположенными вдали от насадка и приемного конца волокна, был рассмотрен выше при анализе тонкой структуры ударной волны. Пограничный слой, прилегающий к приемному концу волокна, в котором имеет место сверхзвуковое течение, описывается уравнениями и краевыми условиями

$$\frac{dfv}{d\xi} = 0, \quad \frac{dfv^2}{d\xi} = \frac{1}{\rho} \frac{df\sigma}{d\xi}, \quad \sigma = G(a_{11} - a_{22}) \Phi(a_{11} + 2a_{22}) + 3 \frac{dv}{d\xi} \quad (4.3)$$

$$v \frac{d \ln a_{11}^{-1/2}}{d\xi} + \frac{dv}{d\xi} = 0, \quad v \frac{d \ln a_{22}}{d\xi} + \frac{dv}{d\xi} = 0, \quad -\infty < \xi = \frac{x-L}{\mu} < 0$$

$$[v, f, a_{11}, a_{22}] \rightarrow [v^0, f^0, a_{11}^0, a_{22}^0], \quad \xi \rightarrow -\infty, \quad v(0) = v_L$$

Аналогично этому пограничный слой вблизи среза насадка при дозвуковом течении в струе удовлетворяет уравнениям (4.3) при $\xi > 0$ с условиями

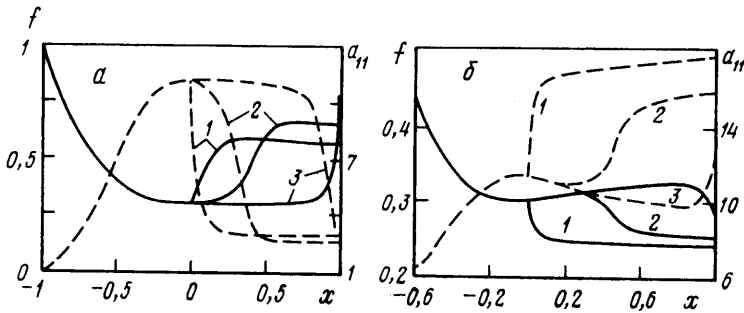
$$[v, f, a_{11}, a_{22}] = [v^0, f^0, a_{11}^0, a_{22}^0], \quad \xi = 0; \quad [v, f, a_{11}, a_{22}] = [v^+, f^+, a_{11}^+, a_{22}^+], \quad \xi \rightarrow \infty$$

Здесь верхним индексом *плюс* отмечены предельные значения соответствующего разрывного решения внешней задачи (с $\mu = 0$). В невырожденной ($\mu \neq 0$) задаче при $x = 0$ непрерывны скорость, площадь сечения, а также осевая компонента напряжения σ_1 и упругие компоненты нормальных напряжений σ_1^e, σ_2^e , первая в силу непрерывности потока импульса и скорости, вторые – в силу непрерывности компонент упругих деформаций. Следовательно

$$\sigma_1(+0) = 3\mu \frac{\partial v}{\partial x} + s_e^+ = \sigma_1(-0) = -P(-0) + s_e^- \quad (4.4)$$

где $P(-0)$ – давление жидкости на стенке насадка вблизи его конца, а $s_e = \sigma_1^e - \sigma_2^e$. Отсюда

$$P(-0) = -3\mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{x=+0} \quad (4.5)$$



Фиг. 2. Расчет стационарного формирования волокна полимерной жидкости для двух видов упругого потенциала: *a* – нормированные распределения переменных *f* (сплошные кривые) и *a₁₁* (штриховые кривые) для материала с функцией упругого нагружения (2.6) и неограниченной растяжимостью. Параметры $\tau = 5$ с, $G = 80$ Па, $\epsilon = 0,1$; $v_L = 15,3$ м/с и $v(-l) = 9, 9,6, 10,6$ м/с для дозвукового (1), переходного (2) и сверхзвукового (3) режимов; *b* – то же для материала с функцией упругого нагружения (2.7) с ограниченной растяжимостью. Параметры $\tau = 5$ с, $G = 80$ Па, $v_L = 43,3$ м/с; $L_\infty = 100$, $v(-l) = 10,7; 11; 11,5$ м/с для дозвукового (1), переходного (2) и сверхзвукового (3) режимов

Давление на срезе насадка оказывается отличным от нуля; используя уравнения пограничного слоя, легко убедиться, что при $\mu \rightarrow 0$ оно стремится к предельному значению, следующему из соотношений на скачке соответствующей гиперболической задачи. Поэтому при дозвуковом режиме вытяжки течения в волокне и внутри насадка связаны, и должны рассматриваться совместно.

5. Численные расчеты. В численных расчетах моделировались стационарные течения с отличной от нуля внешней вязкостью μ при различных формах упругого потенциала. Двухточечная краевая задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений решалась методом стрельбы как задача Коши. Поскольку уравнения неразрывности и импульса в струйном течении допускают интегралы, фактически решались уравнения для эволюции компонент упругой деформации и скорости

$$v \frac{da_{11}}{dx} = 2a_{11} \frac{dv}{dx} - \frac{1}{\tau} \left[(a_{11} - 1) \Phi + \epsilon \left(\frac{1}{a_{11}} - 1 \right) \right] \quad (5.1)$$

$$v \frac{da_{22}}{dx} = -a_{22} \frac{dv}{dx} - \frac{1}{\tau} \left[(a_{22} - 1) \Phi + \epsilon \left(\frac{1}{a_{22}} - 1 \right) \right] \quad (5.2)$$

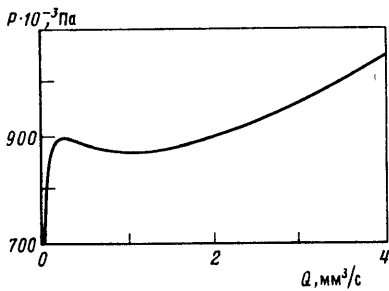
$$3\mu \frac{dv}{dx} = \rho v^2 - \frac{M}{f} - GS, \quad fv = Q, \quad \rho f v^2 - \sigma f = M$$

с параметром M , подлежащим определению из условия на удаленном (приемном) конце струи $v(L) = v_L$.

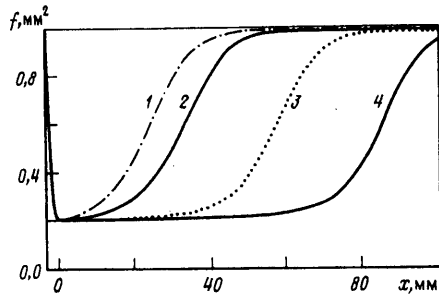
Характер решения зависит от вида упругого потенциала, модуля упругости и времени релаксации жидкости, заданных скоростей подачи v^0 и приема v_L . На фиг. 2, *a* показаны нормированные распределения переменных для материала с функцией упругого нагружения, отвечающей потенциалу (2.6) и неограниченной растяжимости ($L_\infty \rightarrow \infty$, $\Phi \rightarrow 1$). Координата внутри насадка (отрицательные x) и в свободной струе (положительные x) нормирована соответственно на длину насадка и длину волокна, так что масштабы существенно различны.

В переходном режиме наблюдается выраженная отошедшая ударная волна разбухания струи, сглаженная из-за влияния вязкости.

Для упругого потенциала (2.6) могут существовать свободные ударные волны сжатия (профиль фиг. 1, *a*), но не ударные волны растяжения (профиль фиг. 1, *b*). Учет



Фиг. 3



Фиг. 4

Фиг. 3. Расходная характеристика насадки с падающим участком при вытяжке волокна. Параметры $\tau = 50$ с, $G = 80$ Па, $\epsilon = 0,1$; $v_L = 0,00406$ м/с; $L = 2$ м, $\mu = 0,05$ Па · с

Фиг. 4. Профиль свободной струи в области перехода для слабoreлаксирующего неогукoва материала ($L_\infty = 10^7$, $\mu = 25$ Па · с, $\tau = 100$ с). Кривые 1–4 соответствуют расходам $Q = 11,0; 11,1; 11,15; 11,2$ мм³/с

конечной растяжимости макромолекул ($L_\infty < \infty$, $\epsilon = 0$, потенциал (2.7)) качественно изменяет общую картину. У функции упругого нагружения появляется участок вогнутости и в определенном диапазоне степеней растяжения устойчивые свободные ударные волны оказываются волнами растяжения (профиль фиг. 1, б).

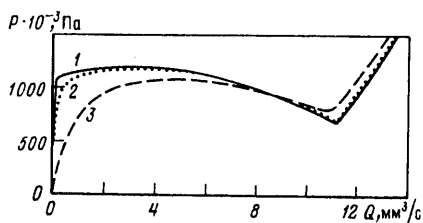
Соответствующие результаты для материала с весьма ограниченной растяжимостью и соответственно сильным упрочнением показаны на фиг. 2, б; видна выраженная отошедшая ударная волна сужения волокна.

Первый случай соответствует "запаздывающему разбуханию струи", на связь которого с ударными волнами в одномерных системах указывалось в [1–5, 15, 16], второй, по крайней мере внешне, может ассоциироваться с наблюдавшимся при сверхскоростной вытяжке волокон динамическим образованием шейки на профиле вытягиваемого волокна.

Используя соотношение (4.5) можно определить $P(-0)$, а затем, интегрируя уравнения импульсов, найти напорное давление на входе в насадку $P(-l)$, отвечающее данному расходу. На фиг. 3 показана одна из таких характеристик при параметрах, когда имеется падающий участок в области больших дозвуковых скоростей, ведущий в некоторых случаях к неустойчивости и автоколебаниям [1–3].

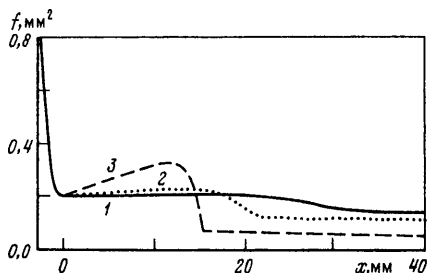
Падающий участок на расходной характеристике является следствием перехода упругой энергии жидкости в кинетическую и обратно. Это общее утверждение может быть сделано значительно более наглядным, если заметить, что скачкообразное разбухание струи по выходе из насадка сходно с внезапным расширением потока жидкости в расширяющемся канале и сопровождается ударными потерями энергии жидкости, причем в случае полимерной жидкости теряется часть как кинетической энергии, так и упругой.

Разбухание струи на выходе из насадка в λ раз приводит к потере кинетической энергии $\frac{1}{2} \rho v_0^2 (1 - \lambda^2)$ и упругой $\sim E_0 (1 - \lambda^2)$ в расчете на единицу объема жидкости (последнее выражение справедливо строго для неогукoва материала, E_0 здесь – удельная упругая энергия жидкости перед выходом из сопла). Согласно приведенным выше соотношениям на скачке у среза насадка, степень разбухания λ убывает с ростом скорости истечения, обращаясь в единицу в момент перехода к сверхзвуковому режиму. Совершаемая приложенным перепадом давления работа (Δp в расчете на единицу объема жидкости) переходит в насадке в упругую энергию жидкости, ее кинетическую энергию и частично расходуется на вязкие потери. Пренебрегая пока этими необратимыми потерями, заметим, что запасенная первоначально упругая энергия определяется лишь степенью сужения насадка и потому (в



Фиг. 5

Фиг. 5. Расходные характеристики сопла для свободной струи. Кривые 1–3 соответствуют временам релаксации $\tau = 100, 10, 1$ с; $L_\infty = 10^6$; $G = 10$ Па; $\mu = 0,5$ Па · с



Фиг. 6

Фиг. 6. Запаздывающее развитие шейки на струе упрочняющегося материала. Профили 1–3 отвечают $L_\infty = 300$, $\mu = 5$ Па · с, $Q = 12$ мм³/с, $\tau = 100, 10, 1$ с

отсутствие релаксации) не зависит от скорости истечения. Ей соответствует определенный перепад давления, необходимый, чтобы "затолкнуть" элемент упругой жидкости в узкий насадок.

Энергетический баланс насадка, а потому и эффективные потери давления зависят от того, какая часть этой первоначально запасенной упругой энергии будет обратимо преобразована в кинетическую, а какая необратимо потеряна в скачке. С ростом скорости истечения доля необратимо потерянной энергии уменьшается, поэтому, даже несмотря на увеличение работы (перепада давления), расходуемой на разгон жидкости, суммарный перепад давления уменьшается с ростом скорости. Этот эффект тем сильнее выражен, чем меньше релаксационные потери при упругой деформации жидкости в насадке.

Из сказанного следует также, что падающий участок на расходной характеристике обусловлен скачкообразным расширением выходящей струи и сопутствующими ударными потерями энергии (вне зависимости от того, каков их детальный механизм). Это означает, что, исключив скачкообразное расширение и связанные с ним потери (например, организовав плавное расширение потока типа используемого в сопле Лавалья или трубке Вентури), можно пытаться избавиться от ударных потерь и повысить эффективность процесса формования.

Наряду с течениями с заданной скоростью приема ($v(L) = v_L$), отвечающими вытяжке волокон, тот же подход применим к отысканию решения для стационарных свободных струй, отличающихся тем, что на достаточном удалении от сопла напряжения в струе отсутствуют. Решения для струй отыскивались "стрельбой" с условием $\sigma_1(L) = 0$ вместо $v(L) = v_L$. При этом подбиралось достаточно большое L с тем, чтобы его величина не влияла на результаты.

Фигура 4 иллюстрирует переход от медленных "дозвуковых" струй к быстрым и натянутым "сверхзвуковым" струям для случаев выпуклой (потенциал (2.6)) кривой упругого нагружения. Видно запаздывающее разбухание струи, быстро "уходящее на бесконечность" с ростом расхода.

На фиг. 5 показаны типичные расходные характеристики сопла для свободной струи.

Наличие внешней вязкости не меняет качественно наблюдаемую картину с падающим участком при больших дозвуковых скоростях, хотя и делает все соображения и термины "гиперболической теории" лишь наводящими.

Для материала с конечной растяжимостью (упрочняющегося при растяжении) наблюдаются предсказываемые гиперболической теорией профили свободных струй с "запаздывающим сужением". Типичные результаты показаны на фиг. 6.

Струя быстро релаксирующей жидкости успевает частично "разбухнуть" перед тем, как претерпеть резкое сужение. По-видимому, подобное "запаздывающее суже-

ние" свободных струй, предсказываемое теорией, никогда не наблюдалось. Было бы интересно проверить его в эксперименте.

6. Заключение. Выполненный асимптотический анализ и численные расчеты показывают, что в струйных течениях упруговязких полимерных жидкостей могут наблюдаться нелинейные волны, обусловленные эффектами упругого формоизменения. Эти волны могут проявляться как отошедшие или присоединенные волны разбухания или резкого сужения струи при стационарном истечении. Различаются дозвуковые, сверхзвуковые и переходные режимы истечения. На дозвуковых и переходных режимах существенно влияние течения в струе на течение в формирующей насадке и они должны рассматриваться совместно. Результаты могут быть использованы при изучении скоростных режимов формирования волокон и интерпретации наблюдаемых явлений.

Авторы признательны А.А. Бармину за обсуждение и полезные замечания. Данная работа выполнена при поддержке Международного научного фонда и Российского фонда фундаментальных исследований в рамках грантов М69000 и М69300.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ентов В.М., Кестенбойм Х.С., Рожков А.Н.* Об истечении упруговязких жидкостей из сужающихся каналов // Докл. АН СССР. 1985. Т. 282. № 4. С. 879–882.
2. *Ентов В.М., Кестенбойм Х.С.* К механике формирования волокон // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 5. С. 26–35.
3. *Entov V.M.* Elastic effects in flows of dilute polymer solutions // Progr. and Trends in Rheology. II. Proc. 2nd Conf. Europ. Rheol., Prague, 1986 / Ed. H. Giesekus, M.F. Hibberd. Darmstadt: Steinkopft; N.Y.: Springer, 1988. P. 260–262.
4. *Entov V.M., Kestenboim Kh.S.* One-dimensional dynamics of jet flows of elastic fluids // Proc. 4th Europ. Rheol. Conf., Sevilla, Spain, 1994. Darmstadt: Steinkopft, 1994. P. 154–156.
5. *Ентов В.М., Ярин А.Л.* Динамика свободных струй и пленок вязких и реологически сложных жидкостей // Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа. М.: ВИНТИ, 1984. Т. 18. С. 112–197.
6. *Denn M.M.* Continuous drawing of liquids to form fibers // Ann. Rev. Fluid Mech. 1980. V. 12. P. 365–387.
7. *Petrie C.J.S., Denn M.M.* Instabilities in polymer processing // AIChE Journal. 1976. V. 22. № 2. P. 209–236.
8. *Bird R.B., Armstrong R.C., Hassager O., Curtiss C.F.* Dynamics of polymeric liquids. N.Y.: Wiley, 1977. V. 1. 470 p.; V. 2. P. 471–727.
9. *Larson R.G.* Constitutive equations for polymer melts and solutions. Boston: Butterworths, 1988. 364 p.
10. *Виноградов Г.В., Малкин А.Я.* Реология полимеров. М.: Химия, 1977. 438 с.
11. *Joseph D.D.* Fluid dynamics of viscoelastic fluids. N.Y.: Springer, 1990. 755 p.
12. *Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978. 687 с.
13. *Гельфанд И.М.* Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений // Успехи мат. наук. 1959. Т. 14. № 2. С. 87–158.
14. *Куликовский А.Г.* О поверхностях разрыва, разделяющих идеальные среды с различными свойствами. Волны рекомбинации в магнитной гидродинамике // ПММ. 1968. Т. 32. № 6. С. 1125–1131.
15. *Joseph D.D., Matta J.E., Chen K.P.* Delayed die swell // J. Non-Newtonian Fluid Mechanics. 1987. V. 24. № 1. P. 31–65.
16. *Joseph D.D., Chen K.* Anomalous elongational flows and change of type // J. Non-Newtonian Fluid Mechanics. 1988. V. 28. № 1. P. 47–60.