МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 6 • 1997

УДК 532.511.013+532.518

 Н.А. БЕЛОВ

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ТАНГЕНЦИАЛЬНОГО РАЗРЫВА В ОСЕСИММЕТРИЧНОМ ТЕЧЕНИИ С КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКОЙ[1]

Рассматривается линейная задача устойчивости плоского тангенциального разрыва, возникающего при осесимметричном взаимодействии с критической точкой двух потоков идеальной несжимаемой жидкости. Применение интегрального преобразования Ганкеля позволяет свести задачу к решению одного эллиптического дифференциального уравнения, описывающего форму разрыва. Анализ уравнения с помощью техники нормальных мод приводит к некоторому дисперсионному уравнению, решение которого дает неустойчивость разрыва. Ранее автором была рассмотрена аналогичная задача для случая плоской симметрии.

Рассмотрим тангенциальный разрыв, образующийся при взаимодействии двух потоков идеальной несжимаемой жидкости с общей осью симметрии, на которой расположена критическая точка. Пусть в некоторой цилиндрической системе координат (r, θ, z), где ось z будет осью симметрии, течение задано следующими, отвечающими точному решению уравнений Эйлера, полями скоростей $\mathbf{V}_j$ и давления P_j ($j = 1$ для $z < 0, j = 2$ для $z > 0$)

$$\mathbf{V}_j = (a_j r,\ 0,\ -2a_j z),\ \ P_j = P_0 - \tfrac{1}{2}\rho_j a_j^2 (r^2 + 4z^2) \qquad (1)$$

где ρ_j – плотности жидкости в соответствующих полупространствах, P_0 – давление в критической точке, a_j – некоторые положительные константы. На тангенциальном разрыве $z = 0$ давление должно быть непрерывно, а потому

$$\rho_1 a_1^2 = \rho_2 a_2^2 \qquad (2)$$

Линейная задача устойчивости тангенциального разрыва для такого основного течения и будет рассматриваться ниже.

Впервые подобная задача, правда, в предположении плоской симметрии была сформулирована в работе [1] и уже решена в [2]. Однако геометрия течения в [1] требует рассмотрения задачи именно в осесимметричной постановке. Течение (1) – (2) можно рассматривать как "асимптотику" вблизи критической точки более сложных течений с криволинейным тангенциальным разрывом. Например, существующее точное решение, отвечающее взаимодействию однородного потока с источником другой жидкости, в растянутых вблизи критической точки координатах в первом приближении совпадает с течением (1) – (2).

По сравнению с известной "одномерной" задачей, приводящей к неустойчивости Кельвина – Гельмгольца [3], задачи, рассматриваемые в [2] и в настоящей работе, отличает: существенная двумерность основного течения, его неограниченность на бесконечности, а также наличие определенной связи между параметрами течения.

Обсудим постановку линейной задачи устойчивости. Бесконечно малые вихревые возмущения $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{rot}\ \mathbf{v}$ в каждом из полупространств удовлетворяют линейному уравнению

---

[1] В английской версии статьи Н.А. Белова "Неустойчивость тангенциального разрыва в плоском течении с критической точкой" название статьи следует читать: "Instability of the tangential discontinuity in the plane flow with a stagnation point" (Fluid Dynamics. 1997. V.32. No. 2. P. 219).

$$\boldsymbol{\omega}_t + (\mathbf{V}\nabla)\boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega}\nabla)\mathbf{V}$$

где $\mathbf{V}$ – поле скоростей (1) в данном полупространстве. Хотя нетрудно найти его общее решение (так же, как в [2]), достаточно отметить, что это уравнение является уравнением Гельмгольца [4, с. 161], следовательно, локальные вихревые возмущения вморожены в основное течение. При этом, растягиваясь вдоль (и сжимаясь поперек) линий тока, они могут создавать лишь конвективную (сносовую) неустойчивость течения и разрыва. Для обнаружения возможной абсолютной неустойчивости достаточно, таким образом, рассмотреть потенциальные возмущения. Ограничимся рассмотрением осесимметричных бесконечно малых возмущений, что будет оправданным, если уже по отношению к ним тангенциальный разрыв будет неустойчив.

Пусть потенциалы возмущенного течения в полупространствах имеют вид

$$\Phi_j = \Phi_{0j} + \varepsilon\varphi_j, \quad \varepsilon \ll 1$$

где $\Phi_{0j} = a_j(r^2/2 - z^2) - tP_0/\rho_j$ – потенциалы основного течения, а $\varphi_j(t, r, z)$ – потенциалы двумерных возмущений. И пусть $z = \varepsilon\eta(t, r)$ есть возмущение поверхности тангенциального разрыва. Тогда потенциалы возмущений будут удовлетворять двумерному уравнению Лапласа

$$\varphi_{jrr} + \frac{\varphi_{jr}}{r} + \varphi_{jzz} = 0 \quad (j = 1\colon\ z < 0,\ \ j = 2\colon\ z > 0) \tag{3}$$

Линеаризация двух кинематических условий, связывающих скорость смещения поверхности разрыва с нормальной составляющей скорости жидкости, и динамического условия равенства давлений на разрыве дает нам граничные условия для уравнений Лапласа на $z = 0$

$$\eta_t + a_j(r\,\eta_r + 2\eta) = \varphi_{jz}, \quad \rho_1(\varphi_{1t} + a_1 r\varphi_{1r}) = \rho_2(\varphi_{2t} + a_2 r\varphi_{2r}) \tag{4}$$

где последнее преобразовано с учетом интеграла Коши – Лагранжа. Поскольку течение (1) – (2) неограничено по r и z, возмущения также могут расти, но не быстрее основного течения, поэтому в качестве условий на бесконечности можно положить

$$\frac{|\nabla\varphi_j|}{|z|} < \infty, \quad |z| \to \infty; \quad \frac{|\nabla\varphi_j|}{r} < \infty, \quad r \to \infty \tag{5}$$

Для завершения постановки задачи на определение φ_j и η нужно задать также начальные условия или искать решение, предполагая экспоненциальную зависимость искомых функций от t.

Основная сложность решения задачи (3) – (5) (по сравнению с одномерным случаем) состоит в решении уравнения Лапласа с неоднородными граничными условиями. Как и в плоском случае, она может быть преодолена с помощью применения интегрального преобразования, на сей раз – преобразования Ганкеля по переменной r (для обобщенных функций медленного роста [5, 6], поскольку искомые функции могут не убывать на бесконечности).

Пусть

$$F_j(t,s,z) = \int_0^\infty \varphi_j(t,r,z) r J_0(sr)dr, \quad G(t,s) = \int_0^\infty \eta(t,r) r J_0(sr)dr$$

– преобразования Ганкеля искомых функций, $J_0(x)$ – функция Бесселя первого рода нулевого порядка. Применяя преобразование к (3), в силу

$$\int_0^\infty \frac{1}{r}(r\varphi_r)_r r J_0(sr)dr = -s^2 F$$

получим два обыкновенных дифференциальных уравнения $F_{jzz} = s^2 F_j$, решениями которых с учетом граничных условий (5) будут

$$F_1 = H_1(t,s)\exp(sz), \quad F_2 = H_2(t,s)\exp(-sz)$$

Преобразование условий (4) в силу

$$\int\limits_0^\infty (r\,\eta_r)rJ_0(sr)dr = -(sG_s + 2G)$$

дает систему

$$G_t - a_j s G_s = (-1)^{j-1} sH_j, \quad \rho_1[H_{1t} - a_1(sH_{1s} + 2H_1)] = \rho_2[H_{2t} - a_2(sH_{2s} + 2H_2)]$$

Исключая из нее $H_{1,2}$, получим уравнение для $G(t, s)$

$$\sum_{j=1}^{2} \rho_j(\partial_t - a_j s\partial_s - a_j)(\partial_t - a_j s\partial_s)G = 0$$

Применяя теперь обратное преобразование к последнему уравнению, получим уравнение для $\eta(t, r)$

$$\sum_{j=1}^{2} \rho_j(\partial_t + a_j r\partial_r + a_j)(\partial_t + a_j r\partial_r + 2a_j)\eta = 0 \tag{6}$$

Таким образом, задача (3) – (5) свелась к исследованию одного уравнения, которому должна удовлетворять форма поверхности разрыва.

Введем новые переменные

$$h(\tau,\xi) = r^{3/2}\eta, \quad \tau = a_1 t, \quad \xi = \ln r \tag{7}$$

Положим также $\chi = a_1/a_2$. Не нарушая общности рассуждений, можно положить $\rho_2 > \rho_1$, тогда из (2) следует $0 < a_1 < a_2$ и $0 < \chi < 1$. В новых переменных уравнение (6) имеет вид

$$(1+\chi^2)h_{\tau\tau} + 2(1+\chi)h_{\tau\xi} + 2h_{\xi\xi} = 0{,}5h \tag{8}$$

Легко проверить, что уравнение (8) (а следовательно, и (6)) является эллиптическим (оно вырождается в параболическое уравнение лишь при одном значении χ, а именно при $\chi = 1$). Согласно критерию устойчивости, сформулированному в [2], этот факт говорит о неустойчивости тангенциального разрыва. Действительно, задача Коши для эллиптического уравнения некорректна из-за отсутствия непрерывной зависимости решения от начальных условий. Пример Адамара [5] показывает экспоненциальную расходимость близких в начальный момент решений, что в рассматриваемой задаче эквивалентно утверждению о неустойчивости разрыва.

Покажем эту неустойчивость с помощью исследования нормальных мод. Ищем решение (8) в виде

$$h = \exp i(k\xi - \omega\tau) \tag{9}$$

где ω и k – комплексные частота и волновое число. Ниже для удобства примем следующее представление комплексной величины: $f = f_r + if_i$. Покажем комплексность k. При фиксированном t из (7) и (9) следует, что $\eta \sim r^\alpha$, $\alpha = ik - 1{,}5$. Требование ограниченности в нуле и условие $\eta/r < \infty$ при $r \to \infty$, следующее из второго условия (5), дают $0 \leqslant \alpha_r \leqslant 1$. При $0 \leqslant \alpha_r < 1$ линеаризация условий на разрыве становится некорректной: если линейные члены порядка r^α, то нелинейные – порядка $\varepsilon r^{2\alpha - 1}$, а потому в некоторой окрестности критической точки они будут больше линейных. Исключение составляет точка $\alpha = 0$ (нелинейные члены равны нулю). Таким образом, множеством допустимых значений в комплексной плоскости α является точка $\alpha = 0$ и прямая $\alpha_r = 1$, а в плоскости k – точка $k = -i1{,}5$ и прямая $k_i = -2{,}5$.

Подстановка (9) в (8) дает дисперсионное уравнение

$$(1+\chi^2)\omega^2 - 2(1+\chi)k\omega + 2k^2 - 0{,}5 = 0$$

В обозначениях

$$\Omega = (1+\chi^2)\omega,\quad K = (1+\chi)k,\quad \gamma = \frac{1-\chi}{1+\chi},\quad \delta = \sqrt{\frac{1+\chi^2}{2}} \equiv \frac{\sqrt{1+\gamma^2}}{1+\gamma}$$

оно имеет вид

$$\Omega^2 - 2K\Omega + (1+\gamma^2)K^2 - \delta^2 = 0$$

откуда

$$\Omega = K + \sqrt{\delta^2 - \gamma^2 K^2} \tag{10}$$

Здесь корень – двухзначная аналитическая функция. Разрыв будет неустойчивым при $\Omega_i > 0$. Рассмотрим, в каких областях комплексной плоскости K это неравенство удовлетворяется.

Функция $\Omega(K)$ имеет две точки ветвления $K = \pm\delta/\gamma$. В плоскости K с разрезами $[\delta/\gamma, \infty)$, и $(-\infty\ -\delta/\gamma]$ она распадается на две регулярные ветви $\Omega_{1,2}$, различающиеся знаком корня (пусть Ω_1 отвечает знаку плюс перед корнем). Мнимая часть Ω_1 равна нулю на интервале действительной оси $|K_r| < \delta/\gamma$ и правой ветви гиперболы $\gamma^2 K_r^2 - K_i^2 = (1+\gamma)^{-2}$, которые пересекаются в седловой точке $K = [\gamma(1+\gamma)]^{-1}$ (в этой точке $d\Omega/dK = 0$) и делят с учетом разрезов всю плоскость на четыре области; Ω_{1i} положительна в левой верхней: $K_i > 0,\ K_r < \sqrt{K_i^2 + (1+\gamma)^{-2}}$, и правой нижней: $K_i < 0,\ K_r > \sqrt{K_i^2 + (1+\gamma)^{-2}}$, областях и отрицательна в двух других. Картина знаков мнимой части Ω_2 зеркально симметрична относительно оси K_i (имеется своя седловая точка, в которой пересекаются интервал действительной оси и левая ветвь гиперболы).

Таким образом, мнимая часть обеих ветвей функции Ω отрицательна только в области между двумя ветвями указанной гиперболы при $K_i < 0$. На множестве допустимых значений K: $K = -3i/(1+\gamma)$ и $K_i = -5/(1+\gamma)$, мнимая часть хотя бы одной из ветвей $\Omega(K)$ положительна при $\gamma(1+\gamma)|K_r| > \sqrt{26}$.

Заключение. Тангенциальный разрыв в осесимметричной задаче, так же как и в плоской, оказался неустойчивым уже относительно двумерных возмущений. Это следует из эллиптичности уравнения (6), к тому же анализ уравнения с помощью техники нормальных мод показал, что возмущение поверхности разрыва вида $\eta = r\exp[i(k_r \ln r - \omega\tau)]$ с $|k_r| > \sqrt{6{,}5}(1+\chi)/(1-\chi)$ будет экспоненциально расти со временем. Длина волны такого возмущения (для фиксированного k_r) при приближении к критической точке уменьшается до нуля, что физически не вполне корректно, например, поверхностное натяжение препятствует такому поведению поверхности разрыва. Учет подобных физических явлений в постановке задачи может также позволить (что, по-видимому, невозможно в данной постановке) определить тип полученной неустойчивости – для одномерного случая такие задачи были успешно рассмотрены в [7, 8].

Рассмотренное течение является асимптотикой вблизи критической точки для более сложных течений с неплоским тангенциальным разрывом. В недавно опубликованной работе [9] была рассмотрена задача о неустойчивости тангенциального разрыва в носовой части при осесимметричном обтекании однородным потоком источника другой жидкости. Метод, использованный в ней (метод ВКБ), с одной стороны, позволяет учесть кривизну поверхности разрыва, с другой стороны, он непригоден в непосредственной окрестности критической точки, включающей саму эту точку. Таким образом, если рассматривать всю носовую область криволинейного тангенциального разрыва, то результаты [9] и настоящей работы, по-видимому, просто дополняют друг друга.

Работа частично была поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (код проекта 95-02-042-15).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Baranov V.B., Fahr H.J., Ruderman M.S.* Investigation of macroscopic instabilities at the heliopause boundary surface // Astron. and Astrophys. 1992. V. 261. № 1. P. 341–347.
2. *Белов Н.А.* Неустойчивость тангенциального разрыва в плоском течении с критической точкой // Изв. РАН. МЖГ. 1997. № 2. С. 78–82.
3. *Chandrasekhar S.* Hydrodynamic and hydromagnitic stability. Oxford: Clarendon Press, 1961. 652 p.
4. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. Т. 1. М.: Физматгиз, 1963. 583 с.
5. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971. 512 с.
6. *Брычков Ю.А., Прудников А.П.* Интегральные преобразования обобщенных функций. М.: Наука, 1977. 288 с.
7. *Куликовский А.Г., Шикина И.С.* О развитии возмущений на границе раздела двух жидкостей // Изв. АН СССР. МЖГ. 1977. № 5. С. 46–49.
8. *Шикина И.С.* Об асимптотике локализованных возмущений в свободных сдвиговых слоях // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 2. С. 8–14.
9. *Chalov S.V.* On the Kelvin-Helmholtz instability of the nose part of the heliopause // Astron. and Astrophys. 1996. V. 308. № 3. P. 995–1000.

Москва

Поступила в редакцию
6.XII.1996