МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 6 • 1997

УДК 532.51.011:536.242

© 1997 г. А.В. КАШЕВАРОВ

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА ПРИ ПЛОСКОМ ОБТЕКАНИИ ТЕЛА ЖИДКОСТЬЮ С МАЛЫМ ЧИСЛОМ ПРАНДТЛЯ

Показано, что точное решение задачи конвективного теплообмена в жидкости с малым числом Прандтля $\Pr \ll 1$ может быть получено для плоского обтекания произвольного тела, если известно конформное преобразование, связывающее контур этого тела с окружностью. В качестве примера рассмотрен профиль Жуковского.

В предлагаемом кратком сообщении продолжается начатая в [1, 2] разработка нового направления теории потенциальных течений – теплообмена тел различной формы в жидкости с малым числом Прандтля $\Pr \ll 1$. При этом предметом рассмотрения является не уравнение Лапласа, а более сложное уравнение конвективного переноса

$$2\varkappa(\mathbf{u}\nabla)T - \Delta T = 0 \tag{1}$$

Здесь T – безразмерная избыточная температура жидкости по отношению к температуре тела, $2\varkappa = \mathrm{Pe} = \mathrm{Re}\Pr$, $\mathbf{u}$ – поле скоростей. Допущение о потенциальности поля $\mathbf{u} = \operatorname{grad}\varphi$ формально следует из стремления числа Рейнольдса $\mathrm{Re} \to \infty$, если число Пекле $\mathrm{Pe} = O(1)$ при $\Pr \to 0$.

Хотя числа $\Pr \ll 1$ характерны для жидких металлов, рассмотрение задач теплообмена в такой постановке имеет больше теоретический, чем практический интерес. Оказывается, можно получать точные аналитические решения уравнения (1), если поле скоростей $\mathbf{u}$ потенциально. В случае кругового цилиндра такое решение найдено в [1]. В [2] указана подстановка $T = 1 - \exp(æ\varphi)\vartheta$, преобразующая (1) к уравнению типа стационарного уравнения Шредингера

$$\Delta\vartheta - \varkappa^2 U\vartheta = 0, \quad U = \mathbf{u}^2 = (\operatorname{grad}\varphi)^2 \tag{2}$$

Здесь U – распределение безразмерной кинетической энергии жидкости в поле течения.

Методом разделения переменных в эллиптической системе координат ξ, η в [2] найдено решение уравнения (2) и тем самым общее решение задачи конвективного теплообмена для эллиптического цилиндра и пластины в жидкости с малым числом Pr. Оно имеет вид

$$T = 1 - \exp[2\varkappa \operatorname{ch}(\xi - \xi_0)\cos(\eta - \gamma)] \sum_{n=0}^{\infty} C_n \operatorname{Fe}_n(\xi - \xi_0, -q)\operatorname{ce}_n(\eta - \gamma, -q) \tag{3}$$

Здесь ξ_0 – радиальная эллиптическая координата поверхности эллиптического цилиндра, γ – угол атаки, ce_n и Fe_n – функции Матье. Для граничного условия $T(\xi_0) = 0$ постоянные интегрирования C_n в (3) равны

$$C_{2n} = \frac{2\operatorname{ce}_{2n}(0,-q)A_0^{(2n)}}{\operatorname{ce}_{2n}(0,q)\operatorname{Fe}_{2n}(0,-q)}, \quad C_{2n+1} = -\frac{2\operatorname{ce}_{2n+1}(0,-q)æB_1^{(2n+1)}}{\operatorname{se}'_{2n+1}(0,q)\operatorname{Fe}_{2n+1}(0,-q)}, \quad n = 0,1,2\ldots$$

Здесь $A_0^{(2n)}$ и $B_1^{(2n+1)}$ – главные коэффициенты разложений в тригонометрические ряды функций Матье $ce_{2n}(\eta, q)$ и $se_{2n+1}(\eta, q)$ соответственно.

Предельный случай $\xi_0 \to \infty$ соответствует круговому цилиндру, решение для которого получается из (3) формальной заменой $\xi - \xi_0 = \ln r$, $\eta - \gamma = \theta$, где r, θ – полярные координаты. Покажем, что решение (3) справедливо при плоском обтекании жидкостью с числом $\mathrm{Pr} \ll 1$ любого другого тела, если под ξ, η понимать связанную с телом ортогональную криволинейную систему координат конформного образа прямоугольной декартовой сетки.

Опираясь на [3], легко показать, что при соответствующем выборе характерной длины для бесциркуляционного обтекания тела потенциал течения в такой системе координат может быть представлен в том же самом виде, который был использован в [2] для эллиптического цилиндра

$$\varphi = 2\mathrm{ch}(\xi - \xi_0)\cos(\eta - \gamma)$$

Характерный размер тела L при этом находится из условия равномерности потока на бесконечности

$$L = \exp(\xi_0)\frac{h_\xi}{e^\xi}, \quad \zeta \to \infty \tag{4}$$

Здесь h_ξ – коэффициент Ляме. Ортогональная криволинейная система координат конформного образа прямолинейной декартовой сетки обладает свойством равенства коэффициентов Ляме $h_\xi = h_\eta$ [3], поэтому уравнение (2) в любой такой координатной системе имеет тот же вид, что и для эллипса [2]. Следовательно, если известно конформное преобразование, связывающее контур тела с окружностью, то общее решение уравнения (1) при $\mathrm{Pr} \ll 1$ может быть представлено формулой (3).

В качестве примера рассмотрим теплообмен профиля Жуковского. Используя преобразование Жуковского [4], можем получить следующие выражения для связи безразмерных декартовых координат со специальными криволинейными:

$$x = [e^\xi \cos(\eta - \alpha) - h/a](1 + b^{-1}), \quad y = [e^\xi \sin(\eta - \alpha) + \lambda/a](1 - b^{-1}) \tag{5}$$

$$a = \sqrt{(1+h)^2 + \lambda^2}, \quad \alpha = \mathrm{arctg}[\lambda/(1+h)]$$

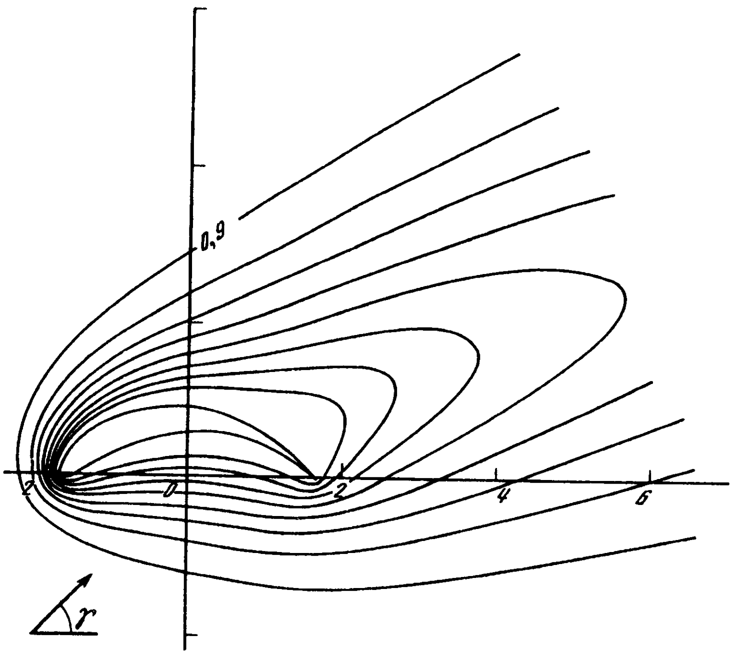
$$b = a^2 e^{2\xi} + \lambda^2 + h^2 - 2ae^\xi[h\cos(\eta - \alpha) - \lambda\sin(\eta - \alpha)]$$

Здесь параметр λ характеризует вогнутость профиля, h – его толщину. Радиальная криволинейная координата контура профиля $\xi_0 = 0$. Характерным размером является $L = ac/2$, где $2c$ – длина скелета руля Жуковского [4], т.е. симметричного профиля ($\lambda = 0$) при $h \to 0$.

В [2] по формуле (3) рассчитано температурное поле и построены картины изотерм при обтекании эллипса жидкостью с $\mathrm{Pr} \ll 1$ для числа $\mathrm{Pe} = 4$. Если соответствующая координатная система найдена, то эта картина может быть перестроена для случая любого другого тела, обтекаемого при этом же числе Pe, которое должно определяться по характерной длине L (4), причем обтекание тела может происходить при любом угле атаки γ.

На фигуре показана полученная таким образом картина изотерм при обтекании профиля с параметрами $h = 0{,}1$ и $\lambda = 0{,}5$. Расчет температурного поля по (3) существенно усложняется с увеличением числа Pe, требуя все более точных вычислений, что связано с ухудшением сходимости функционального ряда при $\theta < 90°$, т.е. позади обтекаемого тела. Фактически не удается получить картину изотерм при $\mathrm{Pe} > 12$, даже проводя вычисления с квадратичной точностью, обеспечивающей до 33 верных знаков.

Так же как и для эллипса [2], местное число Нуссельта Nu для тела произвольной формы связано с числом Nu_c кругового цилиндра и определяется по формуле



Картина изотерм при обтекании профиля при Pe = 4, $\gamma = 45°$, шаг по температуре 0,1

$$\mathrm{Nu}(\eta-\gamma) = \frac{1}{h_\xi(\xi_0, \theta+\gamma)}\mathrm{Nu}_c(\theta) \tag{6}$$

Здесь и далее $h_\xi = h_\eta$ обозначают уже коэффициенты Ляме, определенные из связи обезразмеренных декартовых координат с криволинейными типа соотношений (5).

Число Nu_0 в передней критической точке любого тела при плоском его обтекании жидкостью с $\mathrm{Pr} \ll 1$ может быть найдено также из точного решения теплового пограничного слоя [5]. Сравнение результатов определения Nu_0 для передней критической точки кругового цилиндра из двух точных решений проводилось в [1] и было обнаружено, что решение теплового пограничного слоя дает практически ту же величину Nu_0, что и решение полного уравнения энергии не только при числе $\mathrm{Pe} \gg 1$, как считалось ранее, но и при Pe = 1 и даже меньше. Этот же результат был получен для эллиптического цилиндра [2].

Соответствующая формула [5] может быть записана при введении криволинейных ортогональных координат в виде

$$\mathrm{Nu}_0 = \frac{2}{h_\eta(\xi_0, \pi+\gamma)}\sqrt{\frac{\mathrm{Pe}}{\pi}}$$

Сравнивая Nu_0 с (6) при $\theta = \pi$, убеждаемся, что соотношение между числами Nu_0, полученными двумя способами, не зависят от коэффициентов Ляме, т.е. от формы обтекаемого тела. Следовательно, уравнение теплового пограничного слоя пригодно для определения числа Nu_0 в передней критической точке любого плоского тела практически при всех числах Pe, за исключением очень малых $\mathrm{Pe} \ll 1$.

Среднее число $\langle \mathrm{Nu} \rangle$ на единицу длины любого тела, обтекаемого жидкостью с числом $\mathrm{Pr} \ll 1$, не зависит от угла атаки γ и, так же как в случае эллиптического цилиндра [2], связано с $\langle \mathrm{Nu}_c \rangle$ кругового цилиндра

$$\langle \mathrm{Nu} \rangle = \frac{2\pi}{l} \langle \mathrm{Nu}_c \rangle$$

Здесь l – безразмерная длина контура тела. Зависимость $\langle \mathrm{Nu}_c \rangle(\mathrm{Pe})$ рассчитана вплоть до $\mathrm{Pe} = 18$ [2].

Заключение. Для решения задачи конвективного теплообмена тела произвольной формы при плоском его обтекании жидкостью с числом $\mathrm{Pr} \ll 1$, когда течение можно считать потенциальным, необходимо найти связанную с этим телом систему ортогональных криволинейных координат конформного образа прямоугольной декартовой сетки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кашеваров А.В.* Точное решение задачи конвективного теплообмена для кругового цилиндра в жидкости с малым числом Прандтля // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 1. С. 43–48.
2. *Кашеваров А.В.* Точное решение задачи конвективного теплообмена для эллиптического цилиндра и пластины в жидкости с малым числом Прандтля // Изв. РАН. МЖГ. 1996. № 3. С. 26–31.
3. *Морс Ф.М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. Т. 1. 930 с.; 1960. Т. 2. 686 с.
4. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. 840 с.
5. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 711 с.

Москва

Поступила в редакцию
3.IV.1996