

УДК 532.51.013.4:536.25

© 1997 г. Д.Е. МЕЛЬНИКОВ, С.Г. ЧЕРКАСОВ

ТЕОРИЯ РЕЖИМА ЛОКАЛЬНОЙ АВТОМОДЕЛЬНОСТИ ДЛЯ ЛАМИНАРНОГО СВОБОДНО-КОНВЕКТИВНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ОКОЛО ВЕРТИКАЛЬНОЙ СТЕНКИ

Для ламинарной естественной конвекции около вертикальной стенки в устойчиво стратифицированной по температуре среде получены асимптотические критерии перехода в режим локальной автомодельности при произвольном законе изменения температуры стенки. Исследованы реальные границы режима локальной автомодельности для случая степенного закона изменения температуры по вертикальной координате.

В [1–4] показано, что при наличии устойчивой температурной стратификации среды существует режим, названный режимом локальной автомодельности, в котором нелинейными конвективными членами в уравнениях свободно-конвективного пограничного слоя можно пренебречь. Как следует из этих результатов, данный режим является достаточно типичным для внутренних задач естественной конвекции. В [3, 4] подробно исследованы характеристики свободно-конвективного пограничного слоя в режиме локальной автомодельности при условии постоянного теплового потока на стенке. В данной работе рассмотрен более общий случай, когда на стенке задано произвольное распределение температуры. Проведено также исследование перехода пограничного слоя в режим локальной автомодельности.

1. Ламинарный свободно-конвективный пограничный слой около плоской вертикальной стенки описывается системой уравнений [5]

$$U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial z} = g\beta\Delta T + \nu \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \quad (1.2)$$

$$U \frac{\partial \Delta T}{\partial x} + V \frac{\partial \Delta T}{\partial z} = -VS + a \frac{\partial^2 \Delta T}{\partial x^2}, \quad S = \frac{dT_\infty}{dz} \quad (1.3)$$

Здесь x и z – координаты, направленные по нормали к стенке и вертикально вверх соответственно; U и V – составляющие скорости по координатам x и z ; $\Delta T = T - T_\infty$ – избыточная температура в пограничном слое; T – температура жидкости; $T_\infty(z)$ – температура жидкости вне пограничного слоя; g – ускорение свободного падения; ν – кинематический коэффициент вязкости; β и a – коэффициенты теплового расширения и температуропроводности.

На стенке и на внешней границе пограничного слоя для скорости и избыточной температуры имеют место граничные условия

$$x = 0: \quad U = V = 0, \quad \Delta T = \Delta T_w$$

$$x \rightarrow \infty: \quad V = \Delta T = 0 \quad (1.4)$$

где ΔT_W – разность температур на стенке и на внешней границе пограничного слоя.

Преобразуем уравнения пограничного слоя (1.1) – (1.3) к безразмерной форме. Для этой цели введем безразмерные переменные согласно следующим соотношениям:

$$y = \frac{x}{M_x}, \quad d\eta = \frac{dz}{M_z}, \quad u = \frac{U}{M_U}, \quad v = \frac{V}{M_V}, \quad \theta = \frac{\Delta T}{M_T}$$

За масштабы физических величин примем

$$M_x(z) = \sqrt{2} \left(\frac{g\beta}{\nu a} \right)^{-1/4} S^{-1/4} \quad (1.5)$$

$$M_V(z) = a \left(\frac{g\beta}{\nu a} \right)^{1/2} \Delta T_W S^{-1/2}$$

$$M_T(z) = \Delta T_W \quad (1.6)$$

Вопрос о выборе масштабов продольной координаты M_z и поперечной составляющей скорости M_U оставим открытым и вернемся к нему чуть ниже, однако примем, что они связаны соотношением

$$\frac{M_x M_V}{M_z M_U} = 1 \quad (1.7)$$

Уравнения (1.1) – (1.3) и граничные условия (1.4) после приведения их к безразмерному виду запишутся следующим образом:

$$\frac{\text{Pe}}{\text{Pr}} \left(u \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) + \frac{2\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\text{Pr}} v^2 + \frac{\varepsilon_2}{2 \text{Pr}} yv \frac{\partial v}{\partial y} = 2\theta + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad (1.8)$$

$$\text{Pe} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) + (2\varepsilon_1 - \varepsilon_2)v + \frac{\varepsilon_2}{2} y \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.9)$$

$$\text{Pe} \left(u \frac{\partial \theta}{\partial y} + v \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) + 2\varepsilon_1 v \theta + \frac{\varepsilon_2}{2} yv \frac{\partial \theta}{\partial y} = -2\theta + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \quad (1.10)$$

$$y = 0: \quad u = v = 0, \quad \theta = 1 \quad (1.11)$$

$$y \rightarrow \infty: \quad v = \theta = 0$$

Здесь $\text{Pe} = M_x M_U / a$, $\text{Pr} = \nu / a$ – число Прандтля; параметры ε_1 и ε_2 выражаются формулами

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{S} \frac{d\Delta T_W}{dz}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\Delta T_W}{S^2} \frac{dS}{dz}$$

Отметим, что параметр Pe можно рассматривать как число Пекле, определенное через масштабы величин.

Обозначим через ε максимальный по абсолютной величине из параметров ε_1 и ε_2 . Для выбора масштабов M_z и M_U обратимся к уравнению неразрывности (1.9). Потребуем, чтобы безразмерные скорости u и v имели одинаковый порядок величины. Для этого положим

$$\text{Pe} = \varepsilon$$

Тогда, учитывая выражение для числа Пекле и формулу (1.7), получим

$$M_z(z) = \frac{2\Delta T_w}{\varepsilon S}, \quad M_U(z) = \frac{a}{\sqrt{2}} \left(\frac{g\beta}{va} \right)^{1/4} S^{1/4} \varepsilon$$

Исключим из уравнений (1.8) и (1.10) поперечную составляющую скорости. Для этого проинтегрируем (1.9) по координате y и получим после преобразований

$$u = \frac{3\varepsilon_2 - 4\varepsilon_1}{2\varepsilon} \int_0^y u dy - \frac{\varepsilon_2}{2\varepsilon} yv - \int_0^y \frac{\partial v}{\partial \eta} dy \quad (1.12)$$

После подстановки выражения (1.12) в уравнения импульса (1.8) и энергии (1.10) получаем

$$\left(\frac{3\varepsilon_2 - 4\varepsilon_1}{2\text{Pr}} \int_0^y u dy - \frac{\varepsilon}{\text{Pr}} \int_0^y \frac{\partial v}{\partial \eta} dy \right) \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\varepsilon}{\text{Pr}} v \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{2\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\text{Pr}} v^2 = 2\theta + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad (1.13)$$

$$\left(\frac{3\varepsilon_2 - 4\varepsilon_1}{2} \int_0^y u dy - \varepsilon \int_0^y \frac{\partial v}{\partial \eta} dy \right) \frac{\partial \theta}{\partial y} + \varepsilon v \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + 2\varepsilon v \theta = -2v + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \quad (1.14)$$

В том случае, когда

$$|\varepsilon| \ll 1, \quad \frac{|\varepsilon|}{\text{Pr}} \ll 1 \quad (1.15)$$

членами, стоящими в левых частях уравнений (1.13), (1.14), из-за их относительной малости по сравнению с членами в правых частях равенств можно пренебречь и основные уравнения пограничного слоя примут вид

$$2\theta + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad (1.16)$$

$$2v = \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \quad (1.17)$$

Уравнения пограничного слоя (1.16), (1.17) не содержат ни производных по вертикальной координате, ни параметров, зависящих от последней. Это означает, что в любом горизонтальном сечении z характеристики пограничного слоя не зависят от распределений скорости и температуры выше и ниже по потоку и поперечные распределения вертикальной составляющей скорости и температуры имеют универсальный характер, поскольку они не зависят от продольной координаты. Этому нельзя сказать о поперечной скорости, которая не будет описываться подобным универсальным распределением, так как в соотношении (1.12) входят зависящие от вертикальной координаты параметры.

Уравнения (1.16), (1.17) с граничными условиями (1.11) имеют аналитические решения

$$v = e^{-y} \sin y \quad (1.18)$$

$$\theta = e^{-y} \cos y \quad (1.19)$$

Нетрудно получить распределение поперечной составляющей скорости в пограничном слое, подставив выражение (1.18) в (1.12)

$$u = \frac{3\varepsilon_2 - 4\varepsilon_1}{4\varepsilon} (1 - e^{-y} (\sin y + \cos y)) - \frac{\varepsilon_2}{2\varepsilon} y e^{-y} \sin y$$

Особенность полученных решений (1.18), (1.19) заключается в том, что на внешней

границе пограничного слоя появляется область, в которой температура меньше температуры окружающей среды в рассматриваемом горизонтальном сечении и течение противоположно течению в пограничном слое. Такая ситуация типична для естественной конвекции в стратифицированных средах [5, 6].

Полученные безразмерные значения обеих составляющих скорости и безразмерная толщина пограничного слоя по порядку величины равны единице. Это свидетельствует о том, что выбранные ранее масштабы физических величин действительно являются характерными масштабами. Следует отметить, что когда стратификация S и перепад температуры ΔT_w не зависят от продольной координаты, то масштаб поперечной составляющей скорости равен нулю, а масштаб продольной координаты бесконечно велик. Это соответствует случаю, когда характеристики пограничного слоя вдоль стенки постоянны. При этом параметр ε равен нулю и решения (1.18), (1.19) точные. Данный случай, который, как видно из изложенного, является частным случаем режима локальной автомодельности, отмечался еще Прандтлем [7].

Если критерии (1.15) формальным образом переписать в виде

$$|Pe| \ll 1, \quad |Re| \ll 1$$

где числа Pe и $Re = Pe/Pr$ можно рассматривать как числа Пекле и Рейнольдса соответственно, тогда тот факт, что режим локальной автомодельности реализуется при малых числах Рейнольдса, очевидным образом указывает на некоторую аналогию с известным режимом ползущего движения [8]. В режиме локальной автомодельности силы плавучести полностью уравновешиваются силами трения, а прирост по потоку среднерасходной температуры в пограничном слое равен приросту температуры в окружающей среде.

Неравенства (1.15) накладывают, по определению, ограничения на два параметра ε_1 и ε_2 . Однако в некоторых частных случаях требования, налагаемые на них, сводятся к ограничению на один параметр. Рассмотрим конкретные примеры.

В случае, когда стратификация S является постоянной величиной ($S = \text{const}$), параметр ε_2 равен нулю и критерии (1.15) принимают вид

$$|\varepsilon_1| \ll 1, \quad \frac{|\varepsilon_1|}{Pr} \ll 1$$

Характерными масштабами M_U и M_z являются в данном случае следующие выражения:

$$M_U = \frac{a}{\sqrt{2}} \left(\frac{g\beta}{\nu a} \right)^{1/4} S^{1/4} \varepsilon_1, \quad M_z = \frac{2\Delta T_w}{\Delta T'_w}, \quad \Delta T'_w = \frac{d(\Delta T_w)}{dz}$$

Для поперечной составляющей скорости получаем выражение

$$u = e^{-y} (\sin y + \cos y) - 1$$

Если, наоборот, разность температур на стенке ΔT_w есть постоянная величина, то $\varepsilon_1 = 0$ и критерии (1.15) принимают вид

$$|\varepsilon_2| \ll 1, \quad \frac{|\varepsilon_2|}{Pr} \ll 1$$

Для характерных масштабов M_U и M_z в этом случае имеем

$$M_U = \frac{a}{\sqrt{2}} \left(\frac{g\beta}{\nu a} \right)^{1/4} S^{1/4} \varepsilon_2, \quad M_z = \frac{2S}{S'}, \quad S' = \frac{dS}{dz}$$

Для поперечной составляющей скорости получаем соотношение

$$u = \frac{3}{4}(1 - e^{-y}(\sin y + \cos y)) - \frac{1}{2}ye^{-y}\sin y$$

Таким образом, два рассмотренных выше случая приводят к тому, что неравенства (1.15) сводятся по сути к ограничениям, накладываемым на один из двух параметров, в то время как другой при этом равен нулю. Кроме того, выражения для поперечной составляющей скорости становятся универсальными функциями поперечной координаты.

Важное практическое значение имеет также случай постоянного теплового потока на стенке. Тепловой поток на стенке выражается формулой

$$q = -\lambda \frac{\partial(\Delta T)}{\partial x}, \quad x = 0$$

где λ – коэффициент теплопроводности.

Используя формулу (1.19) и выражения для масштабов температуры (1.6) и поперечной координаты (1.5), нетрудно получить выражение для теплового потока на стенке в режиме локальной автомодельности

$$q = \lambda \frac{\Delta T_w}{M_x} = \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \left(\frac{g\beta}{va} \right)^{1/4} S^{1/4} \Delta T_w \quad (1.20)$$

Тогда, считая в выражении (1.20) тепловой поток постоянным, для масштаба температуры получим

$$M_T = \Delta T_w = \frac{\sqrt{2}q}{\lambda} \left(\frac{g\beta}{va} \right)^{-1/4} S^{-1/4}$$

В этом случае для параметров ϵ_1 и ϵ_2 получаем соотношение

$$\epsilon_2 = -4\epsilon_1$$

Критерии (1.15) сводятся к ограничениям, накладываемым на один параметр ϵ_2 , и принимают вид

$$\left| \frac{\sqrt{2}q}{\lambda} \left(\frac{g\beta}{va} \right)^{-1/4} \frac{S'}{S^{3/4}} \right| \ll 1$$

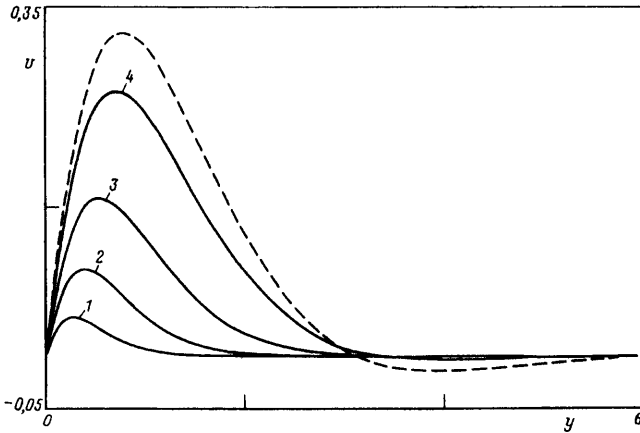
$$\frac{1}{Pr} \left| \frac{\sqrt{2}q}{\lambda} \left(\frac{g\beta}{va} \right)^{-1/4} \frac{S'}{S^{3/4}} \right| \ll 1, \quad S' = \frac{dS}{dz}$$

Для характерных масштабов M_V , M_U и M_z тогда получаем выражения

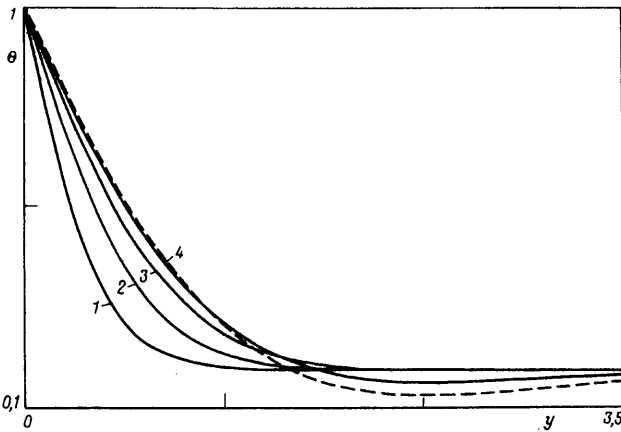
$$M_V = \frac{\sqrt{2}qa}{\lambda} \left(\frac{g\beta}{va} \right)^{1/4} S^{-3/4}, \quad M_U = \frac{qa}{\lambda} \frac{S'}{S^2}, \quad M_z = \frac{2S}{S'}$$

Определяющим параметром в этом случае является стратификация S окружающей среды.

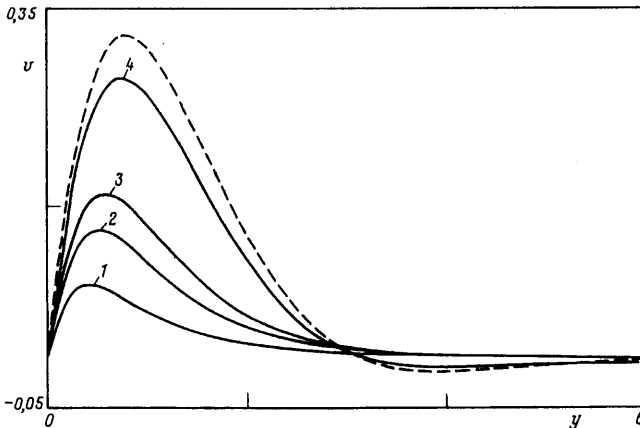
Критерии (1.15), определяющие условия реализации режима локальной автомодельности, являются асимптотическими и не позволяют судить о реальных величинах параметров ϵ_1 и ϵ_2 , при которых полученные выше результаты обладают достаточно высокой точностью. Для исследования процесса перехода пограничного слоя в режим локальной автомодельности рассмотрим задачу о конвекции около полубесконечной вертикальной пластины. Известно [5], что в том случае, когда стратификация среды и местный перепад температуры между пластиной и жидкостью вне пограничного слоя изменяются вдоль пластины по законам



Фиг. 1. Профили вертикальной составляющей скорости в случае $Pr = 1$: 1 - $n = 0,5, J = 0,04$; 2 - $0,2, 0,16$; 3 - $0,2, 0,64$; 4 - $0,5, 5$. Штриховой линией показан профиль (1.18)



Фиг. 2. Профили температуры в случае $Pr = 1$ и при значениях параметров n и J на фиг. 1 и той же нумерации кривых. Штриховой линией показан профиль (1.19)



Фиг. 3. Профили вертикальной составляющей скорости в случае $Pr = 10$: 1 - $n = 0,8, J = 0,08$; 2 - $0,1, 0,18$; 3 - $0,1, 0,36$; 4 - $0,8, 6,4$. Штриховой линией показан профиль (1.18)

$$S = \frac{J}{4} Nz^{n-1}, \quad \Delta T_w = Nz^n, \quad -0,6 \leq n < 1$$

тогда путем замены переменных

$$\xi = \frac{x}{z} \left(\frac{g\beta z^3 \Delta T_w}{4\nu^2} \right)^{1/4}, \quad f = \frac{\psi(x, z)}{4\nu} \left(\frac{g\beta z^3 \Delta T_w}{4\nu^2} \right)^{1/4}$$

где $\psi(x, z)$ – размерная функция тока, уравнения (1.1) – (1.3) сводятся к системе следующих обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$f''' + (n+3)ff'' - 2(n+1)f'^2 + \theta = 0 \quad (1.21)$$

$$\frac{\theta''}{Pr} + (n+3)f\theta' - 4nf'\theta - Jf' = 0 \quad (1.22)$$

Граничные условия следующие:

$$f(0) = f'(0) = f'(\infty) = \theta(\infty) = 0, \quad \theta(0) = 1$$

Здесь $f(\xi)$ – безразмерная функция тока; $\theta(\xi)$ – безразмерная температура жидкости; ξ – автомодельная переменная; штрихами обозначены производные по ξ . Параметр J характеризует температурную стратификацию на внешней границе пограничного слоя.

Введенные выше автомодельные переменные y и ξ связаны соотношением

$$y = \left(\frac{Pr J}{4} \right)^{1/4} \xi$$

Критерии локальной автомодельности (1.15) для рассматриваемой задачи принимают вид

$$|\varepsilon_1| = \left| \frac{4n}{J} \right| \ll 1, \quad \left| \frac{\varepsilon_1}{Pr} \right| = \left| \frac{4n}{Pr J} \right| \ll 1$$

$$|\varepsilon_2| = \left| \frac{4(n-1)}{J} \right| \ll 1, \quad \left| \frac{\varepsilon_2}{Pr} \right| = \left| \frac{4(n-1)}{Pr J} \right| \ll 1$$

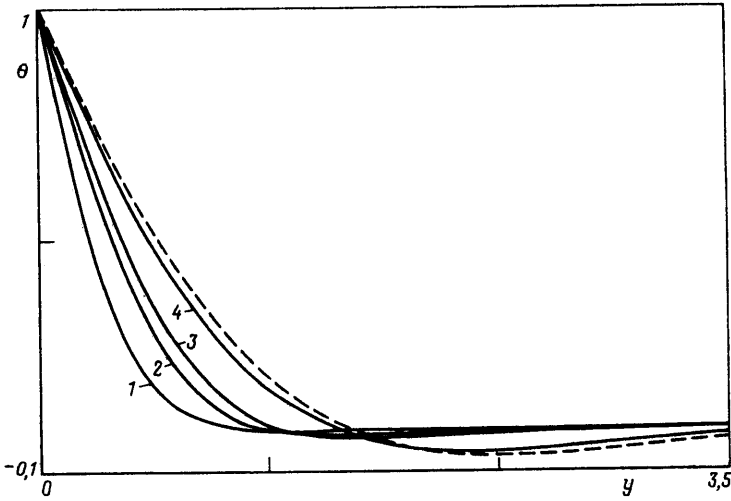
2. Уравнения (1.21), (1.22) решались численно при различных значениях числа Прандтля и параметров n и J . Результаты расчетов представлялись в виде зависимостей $v(y)$ и $\theta(y)$, где v и y – безразмерные скорость и расстояние от стенки, определенные в соответствии с масштабами обезразмеривания, введенными выше для режима локальной автомодельности.

На фиг. 1, 2 показаны профили скорости и температуры в пограничном слое при числе Прандтля $Pr = 1$. Штриховой линией показаны профили (1.18), (1.19). Кривым 1–4 соответствуют следующие значения параметров ε_1 и ε_2 : 1 – 50, 50; 2 – 5, 20; 3 – 1,25, 5; 4 – 0,4, 0,4.

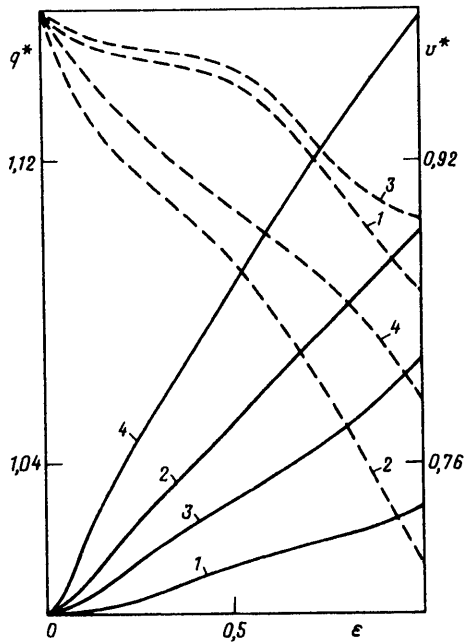
На фиг. 3, 4 представлены те же профили при $Pr = 10$. Кривым 1–4 отвечают соответственно значения параметров ε_1 и ε_2 : 1 – 40, 10; 2 – 2,22, 20; 3 – 1,11, 10; 4 – 0,5, 0,125.

Для всех рассмотренных значений параметра n и чисел Прандтля на фиг. 1–4 наблюдается сходимость к распределениям (1.18), (1.19) при уменьшении величины параметров ε_1 и ε_2 .

Более детально эта сходимость прослеживается по зависимостям максимальной скорости в пограничном слое и теплового потока на пластине, отнесенным к соответствующим значениям для режима локальной автомодельности, от величины



Фиг. 4. Профили температуры в случае $Pr = 10$ и при значениях параметров n и J на фиг. 3 и той же нумерацией кривых. Штриховой линией показан профиль (1.19)



Фиг. 5. Зависимости теплового потока на пластине q^* (сплошные кривые) и максимальной вертикальной составляющей скорости в пограничном слое v^* (штриховые кривые), отнесенных к соответствующим значениям локальной автомодельности, от величины параметра ϵ : 1 - $Pr = 1$, $n = 0,2$; 2 - 1, 0,5; 3 - 10, 0,1; 4 - 10, 0,8

параметра ε . Такие зависимости представлены на фиг. 5. Сплошными линиями представлены отношения тепловых потоков q^* , штриховыми – отношения максимальных скоростей v^* в зависимости от значений параметра ε . Применительно к рассмотренным случаям, использование полученных выше соотношений для режима локальной автомодельности приводит к погрешностям, не превышающим 15% для теплового потока и 35% для максимума скорости при $|\varepsilon| \leq 1$.

Заключение. Проведен анализ перехода свободно-конвективного пограничного слоя в режим локальной автомодельности при произвольном законе изменения температуры стенки. Получены асимптотические критерии подобия ε_1 и ε_2 , которые этот переход определяют. Для случая степенного закона изменения с высотой температуры стенки и окружающей среды найдено, что режим локальной автомодельности для свободно-конвективного пограничного слоя реализуется при одновременном выполнении условий

$$|\varepsilon_1| \leq 1, \quad \frac{|\varepsilon_1|}{Pr} \leq 1, \quad |\varepsilon_2| \leq 1, \quad \frac{|\varepsilon_2|}{Pr} \leq 1$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Протопопов М.В., Черкасов С.Г.* Особенности свободно-конвективного пограничного слоя в стратифицированной по температуре среде // Изв. РАН. МЖГ. 1993. № 1. С. 27–34.
2. *Черкасов С.Г.* Особенности течения и теплообмена при естественной или комбинированной конвекции в ограниченных объемах // Свободная конвекция: Тр. 1-й Рос. нац. конф. по теплообмену. М.: Изд-во МЭИ, 1994. Т. 2. С. 204–209.
3. *Черкасов С.Г.* Режим локальной автомодельности для свободно-конвективного пограничного слоя в стратифицированной по температуре среде // Теплофизика высоких температур. 1995. Т. 33. № 1. С. 44–48.
4. *Cherkasov S.G.* Effect of thermal stratification on three-convection boundary layer // Proc. 2nd ISHMT-ASME Heat and Mass Transfer Conf. New-Delhi: McGraw-Hill, 1995. P. 309–315.
5. *Джалурия Й.* Естественная конвекция. М.: Мир, 1983. 399 с.
6. *Полежаев В.И., Бунэ А.В., Везуб Н.А. и др.* Математическое моделирование конвективного теплообмена на основе уравнений Навье – Стокса. М.: Наука, 1987. 271 с.
7. *Прандтль Д.* Гидроаэромеханика. М.: Изд-во иностр. лит., 1951. 576 с.
8. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 711 с.

Москва

Поступила в редакцию
5.IV.1996