МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 6 • 1997

УДК 533.6.072:131.51

© 1997 г. А.Н. ГОЛУБЯТНИКОВ

К ОБРАЗОВАНИЮ ОДНОРОДНОГО РАЗЛЕТА ГРАВИТИРУЮЩЕГО ГАЗА

В рамках ньютоновской механики исследуется возможность образования однородного разлета гравитирующего газа, возникающего в результате предварительного сжатия холодной разреженной среды (пыли), с учетом переменного детонационного выделения энергии. Постановка задачи связана с моделированием образования наблюдаемого крупномасштабного расширения Вселенной, хотя полученные результаты применимы и к расчетам гравитационного коллапса меньших масс.

Вопрос о смене предварительного сжатия на расширение Вселенной был поставлен В. де Ситтером и обсуждался Х. Альфвеном и О. Клейном, которые считали видимую часть Вселенной конечной метагалактической системой, расширяющейся в более или менее пустое пространство (см. [1]). Автомодельное решение такой задачи с полным переходом на ударной волне массы покоя пыли в излучение в рамках общей теории относительности впервые дано в [2]. Автомодельные решения уравнений ньютоновской механики с точечным выделением энергии взрывного типа, а также некоторые решения релятивистской, в частности с конечными полными массой и энергией, построены в [3, 4]. Целью настоящей работы является построение всюду ограниченных по плотности и скорости решений, не содержащих сингулярностей.

1. Предполагается, что в силу гравитационной неустойчивости пыль, имеющая в момент времени $t = -\infty$ нулевые плотность и скорость, начинает сферически-симметрично сжиматься к центру. В результате тепловыделения в центре симметрии образуется сферическая расходящаяся ударная волна, ограничивающая область однородного (относительно плотности $\rho(t)$ и давления $p(t)$) разлета идеального газа.

В лагранжевых переменных (m – масса шара радиуса $r(m, t)$) уравнения адиабатического сферически-симметричного движения гравитирующего газа и условия на разрыве имеют вид

$$\ddot{r} + 4\pi r^2 p' + \frac{km}{r^2} = 0, \quad \dot{s} = 0, \quad \rho = \frac{1}{4\pi r^2 r'}, \quad p = \rho^2 \frac{\partial u(\rho, s)}{\partial \rho}$$

$$[r]_1^2 = [\dot{r}\dot{M} - 4\pi r^2 p]_1^2 = [(\dot{r}^2/2 + u)\dot{M} - 4\pi r^2 \dot{r} p]_1^2 = 0 \tag{1.1}$$

где точка и штрих соответственно означают производные по t и m, u – активная часть (с точки зрения процесса детонации) удельной внутренней энергия среды, s – энтропия, $m = M(t)$ – закон движения ударной волны, k – гравитационная постоянная. Индексами 1, 2 обозначены соответственно состояния газа до и после ударной волны.

Пусть в области 1 имеется сжимающаяся пыль, отвечающая состоянию холодного газа с нулевым давлением. Тогда имеем решение вида

$$\frac{\dot{r}^2}{2} - \frac{km}{r} = 0, \quad r = \left(\frac{9km}{2}\right)^{1/3} (t_0(m) - t)^{2/3} \tag{1.2}$$

$$\rho = \frac{1}{6\pi k((t_0 - t)^2 + 2mt_0'(t_0 - t))} \tag{1.3}$$

Функция $t_0(m)$ характеризует время прихода частиц пыли в центр симметрии при отсутствии ударной волны, причем в области движения пыли $t_0 \geqslant t$. Если $t_0' \geqslant 0$, плотность пыли при фиксированном m возрастает со временем, что исключает особенности решения для пыли в данной материальной точке до прихода ударной волны.

Пусть в области 2 имеет место изэнтропический однородный разлет газа вида $r = m^{1/3}a(t)$. Тогда

$$p = -\frac{1}{4\pi a^2}\frac{du}{da}, \quad \rho = \frac{3}{4\pi a^3}, \quad u = u(a)$$

При этом уравнения движения дают интеграл

$$\frac{\dot{a}^2}{2} - \frac{k}{a} = h \tag{1.4}$$

Для описания космологического разлета часто вместо h используют так называемую постоянную Хаббла H, равную $\dot{a}/a$ при фиксированном значении $\rho = \rho_0$. При этом

$$h = \left(\frac{4\pi\rho_0}{3}\right)^{1/3}\left(\frac{3H^2}{8\pi\rho_0} - k\right)$$

Согласно наблюдениям, $h \simeq 2 \cdot 10^{-16}$ см^2/(с^{2}г$^{2/3}$) [1]. Однако не исключается возможность наличия во Вселенной и большей плотности ρ_0, создаваемой невидимой материей, что может сделать постоянную h нулевой или отрицательной. Часто при теоретических исследованиях полагается $h = 0$.

В общем случае уравнение (1.4) интегрируется в квадратурах. Считая $a(0) = 0$, для r при $h = 0$ получим формулу (1.2) с $t_0 = 0$, а при $h > 0$

$$a = \frac{k}{2h}(\operatorname{ch}\eta - 1), \quad t = \frac{k}{(2h)^{3/2}}(\operatorname{sh}\eta - \eta) \tag{1.5}$$

При $h < 0$ соответствующее решение получается из формул (1.5) аналитическим продолжением, η – параметр. Решение (1.5) имеет особенность плотности при $t = 0$, однако его использование для построения решений с ограниченными плотностью и скоростью, начиная с момента образования ударной волны $t_* > 0$, вполне допустимо.

Рассмотрим условия на разрыве (1.1). В силу соотношения $[r]_1^2 = 0$ значение плотности за ударной волной $\rho_2 = 1/(6\pi k(t_0 - t)^2)$ и должно быть больше значения перед ней ρ_1, определяемого формулой (1.3). Следовательно, $t_0' > 0$ и, таким образом, плотность пыли в области перед ударной волной не содержит особенностей. Это обеспечивает существование решения задачи о восстановлении функции $t_0(m)$ и, следовательно, закона движения пыли после определения функций $a(t)$ и $M(t)$.

Условие сохранения на разрыве потока количества движения (1.1) после исключения $\dot{a}$ с помощью интеграла (1.4) дает линейное уравнение для определения M от a, которое при любом уравнении состояния $u = u(a)$ интегрируется в квадратурах. При $h \neq 0$ и $\dot{a} > 0$

$$\frac{dM^{2/3}}{da} = -\frac{1}{3h}\frac{du}{da}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + ha/k}}\right) \tag{1.6}$$

В случае $h = 0$ правая часть соответствующего уравнения может быть получена аналитическим продолжением правой части уравнения (1.6). При $h \geqslant 0$ решение должно быть продолжимо от $M = 0$ до $a = \infty$.

Пусть $u = Q(m)$ – активная часть удельной внутренней энергии пыли, которая переходит на ударной волне в тепловую и кинетическую энергию газа. Тогда, используя условие сохранения потока энергии (1.1), имеем соотношение

$$Q = u - \frac{kM^{2/3}}{a}\left(1+\sqrt{1+\frac{ha}{k}}\right)^2 \tag{1.7}$$

Уравнения (1.6), (1.7) инвариантны относительно добавления к Q и u одинаковой постоянной, благодаря чему, если не выставлены дополнительные физические условия, почти всегда можно считать при необходимости $Q \geqslant 0$, причем всегда $u \geqslant Q$. Поэтому деление реакций на экзотермические и эндотермические здесь условно.

Система уравнений (1.6), (1.7) допускает интеграл, который является полным интегралом энергии [5] для области 2

$$\frac{3}{5}hM^{5/3} + uM = \int_0^M Q\,dm \tag{1.8}$$

Если при заданном уравнении состояния $u(a)$ найдена функция $M(a)$, то далее с помощью соотношений (1.5) определяются зависимость $M(t)$, а также закон движения пыли.

2. Рассмотрим сначала более простой промежуточный случай, когда $h = 0$. Тогда имеем

$$M^{2/3} = -\int_{a_*}^{a} \frac{du}{da}\frac{ada}{6k}, \quad Q = u - \frac{4kM^{2/3}}{a}$$

где $a_* = a(t_*) > 0$ – значение a в момент образования детонационной волны.

Для совершенного газа $u = Aa^{-3(\gamma-1)} + u_\infty$, где γ – показатель адиабаты ($\gamma > 1$); γ, A, u_∞ – постоянные. Опуская аддитивную постоянную u_∞, получим

$$\gamma \neq \frac{4}{3}, \quad M^{2/3} = \frac{(\gamma-1)A}{2(4-3\gamma)k}\left(a^{4-3\gamma} - a_*^{4-3\gamma}\right)$$

$$Q = \frac{(6-5\gamma)A}{4-3\gamma}a^{-3(\gamma-1)} + \frac{2(\gamma-1)A}{(4-3\gamma)a}a_*^{4-3\gamma} \tag{2.1}$$

$$\gamma = \frac{4}{3}, \quad M^{2/3} = \left(\frac{A}{6k}\right)\ln\frac{a}{a_*}, \quad Q = \left(\frac{A}{a}\right)\left(1 - \frac{2}{3}\ln\frac{a}{a_*}\right)$$

Анализ формул (2.1) показывает, что при $1 < \gamma \leqslant 6/5$ величина $Q(a)$ убывает с ростом a до нуля; при $\gamma > 6/5$ $Q(a)$, убывая, переходит через нуль, достигает минимума, а затем возрастает до нуля. При этом полная масса такой модели Вселенной, равная пределу M при $a \to \infty$, при $1 < \gamma \leqslant 4/3$ бесконечна, а при $\gamma > 4/3$ конечна и равна

$$M_\infty = \left(\frac{(\gamma-1)A}{2(3\gamma-4)k}a_*^{4-3\gamma}\right)^{3/2}$$

Полная энергия, равная в силу (1.8) пределу Mu при $a \to \infty$, бесконечна при $1 < \gamma < 6/5$; при $\gamma = 6/5$ конечна и равна $E_\infty = A^{5/2}/(4k)^{3/2}$; при $\gamma > 6/5$ равна нулю. В пределе при $a_* \to 0$ и $\gamma = 6/5$ получим решение автомодельной задачи о сильном точечном взрыве без детонации [3]. В этом случае имеется баланс гравитационной и кинетической энергий газа, сумма которых равна нулю. Величина каждой из них при $\gamma = {}^6/_5$ равна $3E_\infty/20$, E_∞ – энергия взрыва.

Таким образом, при $h = 0$ для поддержания однородного разлета газа при $\gamma > {}^6/_5$ всегда требуется вначале наличие реакции, связанной с относительным выделением энергии, а затем – с поглощением, причем с полным отбором выделенной ранее энергии; при $1 < \gamma \leqslant {}^6/_5$ энергия только выделяется. Интерес представляет случай $\gamma = {}^6/_5$ с конечной полной энергией системы, отвечающий с точки зрения статистической механики среде, состоящей из частиц с 10 степенями свободы, что близко к свойствам гелия при высоких температурах. Подходящей экзотермической реакцией здесь мог бы служить термоядерный переход водорода в гелий [6]. С другой стороны, необходимая конечность полной массы при $\gamma > {}^4/_3$ также важна с точки зрения корректности определения гравитационного потенциала.

Изучим, как изменятся результаты при $h > 0$. В этом случае уравнение (1.6) дает

$$M^{2/3} = \frac{u_* - u}{3h} + \int\limits_{a_*}^{a} \frac{du}{da} \frac{da}{3h\sqrt{1 + ha/k}} \tag{2.2}$$

где $u_* = u(a_*)$. Для совершенного газа с показателем адиабаты, равным ${}^5/_6 + n/3$ и $1 + n/3$ (n – натуральное число) или $\gamma = {}^7/_6, {}^4/_3, {}^3/_2, {}^5/_3, \ldots$, интеграл (2.2) может быть представлен в элементарных функциях. То же относится и к любой линейной комбинации соответствующих внутренних энергий, характеризующих, например, смесь совершенных газов и излучения.

Приведем формулу для $M^{2/3}$ в случае смеси водорода ($\gamma_1 = {}^5/_3$), излучения ($\gamma_2 = {}^4/_3$) и гелия ($\gamma_3 = {}^7/_6$) с $u = A_1/a^2 + A_2/a + A_3/\sqrt{a}$

$$M^{2/3} = \frac{1}{3h}\left(u_* - u - \sum_{i=1}^{3} A_i \left(\frac{h}{k}\right)^{3(\gamma_i - 1)} (F_i(a) - F_i(a_*))\right)$$

$$F_1 = -\frac{\sqrt{1+\theta}}{\theta^2} + \frac{3\sqrt{1+\theta}}{2\theta} - \frac{3}{4}\ln\frac{\sqrt{1+\theta}+1}{\sqrt{1+\theta}-1}$$

$$F_2 = -\frac{\sqrt{1+\theta}}{\theta} + \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+\theta}+1}{\sqrt{1+\theta}-1}, \quad F_3 = -\sqrt{1+\frac{1}{\theta}}, \quad \theta = \frac{ha}{k}$$

На определенных стадиях эволюции доминируют те или иные компоненты системы. Наилучший с точки зрения наибольшей скорости роста величины $M(a)$ (1.6) при данном a показатель адиабаты для совершенного газа равен $\gamma = 1 + 1/(3\ln a/a_*)$.

Для термоядерных реакций $a_* \sim 10^{-1}$–10^{-2} см/г$^{1/3}$, $u_* = Q_* \sim 10^{18}$–10^{19} см^2/с^2 [6].

В частности, для расширения Вселенной в целом, вызванного термоядерными реакциями, при современном значении $a \simeq 0{,}6 \cdot 10^{10}$ см/г$^{1/3}$ в наилучшем случае получим $\gamma \simeq 1{,}013$, что соответствует числу степеней свободы порядка 150 и отвечает, таким образом, элементам с максимальной удельной энергией связи ядер. При этом, если $h = 0$, что не меняет порядок результата, $M \simeq 4 \cdot 10^{48}$ г, что значительно меньше наблюдаемой величины в 10^{54} г [1]. На этом пути предельно допустим только учет реакций аннигиляции с $Q_* = 10^{21}$ см^2/с^2, ограниченный эффектами теории относительности [2, 4].

Рассмотрим асимптотику M при $a \to \infty$. Интеграл (2.2), очевидно, в случае совершенного газа сходится и дает конечную полную массу

$$M_\infty = \frac{1}{h^{3/2}}\left(u_*/3 - (\gamma - 1)A\int\limits_{a_*}^{\infty} \frac{a^{2-3\gamma}da}{\sqrt{1 + ha/k}}\right)^{3/2}$$

Полная энергия E_∞ также всегда конечна и равна $\frac{3}{5}hM_\infty^{5/3}$. Конечность полной массы и энергии остается справедливой и для любого уравнения состояния с убывающей зависимостью $u(a)$, имеющей при $a \to \infty$ асимптотику совершенного газа.

Поведение $Q(a)$ может быть исследовано с помощью вычисления производной. Вначале функция $Q(a)$ убывает как $u(a)$, затем переходит через нуль и стремится к значению $-hM_\infty^{2/3}$ при $a \to \infty$. Исследование асимптотики для совершенного газа при $a \to \infty$ показывает, что при $1 < \gamma \leq 7/6$ функция $Q(a)$ приближается к указанному значению сверху, при $\gamma > 7/6$ – снизу.

Таким образом, при $h > 0$ решение при больших a качественно перестраивается. Полные масса и энергия конечны, переход убывания Q к возрастанию происходит при $\gamma = 7/6$. Постоянную $-hM_\infty^{2/3}$ можно устранить, добавив к u и Q величину $u_\infty = hM_\infty^{2/3}$.

В случае $h < 0$ решение устроено следующим образом. Вначале с ростом $a \in [a_*; k/|h|)$ формула (2.2) сохраняется. При $a = k/|h|$ на ударной волне достигается определенная масса M_1. Затем с учетом последующего уменьшения a в формуле (1.6) следует изменить знак перед корнем и масса $M(t)$ будет продолжать расти. В принципе при любом h, если ударная волна выйдет на внешнюю границу пыли, начнется истечение газа в пустоту, приводящее к распространению от границы к центру волны разрежения, нарушающей однородность. Если ударная волна беспрепятственно сносится потоком пыли к центру, то система сжимается в материальную точку при любом $u \to \infty$ при $a \to 0$ с бесконечной массой.

Отметим другие возможные постановки задачи. В общем случае имеем два уравнения, связывающие три функции u, Q, M от a, одна из которых может быть задана достаточно произвольно. При этом следует соблюдать выполнение неравенств [7]

$$p(\rho, s) > 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \rho} > 0, \quad \frac{\partial^2 p}{\partial (1/\rho)^2} > 0$$

Одним из вариантов является задание функции $Q(a)$ и определение подходящего уравнения состояния. Например, в случае сильного точечного взрыва [5] $Q \equiv 0$ при всех $a > 0$ и выделяется конечная энергия E_* при $a = 0$. Тогда при $h > 0$ должно иметь место следующее уравнение состояния:

$$u = h(E_*^2 / 4h^2\theta^3)^{1/5}(1+\sqrt{1+\theta})^2(1+\sqrt{1+\theta}+4/5\,\theta)^{-2/5}$$

При этом эффективный показатель адиабаты $(\rho/p)\partial p/\partial \rho$ уменьшается с ростом a от $6/5$ до $7/6$. Полная масса $M_\infty = (5E_* / 8h)^{3/5}$, удельная энергия связи $u_\infty = hM_\infty^{2/3}$.

Данное решение указывает на неравномерную зависимость характеристик разлета от параметра h. При малых a решение приближается к автомодельному [3], отвечающему $h = 0$, при больших a выходит на асимптотику решения, рассмотренного выше.

Заключение. В рамках ньютоновской механики полностью исследованы необходимые условия образования сферически-симметричного адиабатического разлета гравитирующего газа с однородными плотностью и давлением, если разлет газа возникает в результате переменного детонационного тепловыделения в гравитационно сжимающейся среде с нулевым давлением. Задача сведена к решению уравнения движения детонационной волны, которое интегрируется в квадратурах при любом уравнении состояния образующегося вещества. В качестве примера рассмотрена протон-протонная реакция с образованием смеси водорода, гелия и излучения, когда решение может быть выражено в элементарных функциях.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 94-01-01383).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Піблс П.* Физическая космология. М.: Мир, 1975. 310 с.
2. *Cahill M.E., Taub A.H.* Spherically symmetric similarity solutions of the Einstein field equations for a perfect fluid // Commun. Math. Phys. 1971. V. 21. № 1. P. 1–40.
3. *Голубятников А.Н.* О сферически-симметричном движении гравитирующего газа при наличии сильной ударной волны // Докл. АН СССР. Т. 227. № 5. С. 1067–1070.
4. *Голубятников А.Н.* Сильный взрыв и перестройка положения равновесия при релятивистском гравитационном коллапсе // Докл. АН СССР. 1980. Т. 251. № 6. С. 1330–1334.
5. *Седов Л.И.* Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1981. 447 с.
6. *Мартынов Д.Я.* Курс общей астрофизики. М.: Наука, 1979. 640 с.
7. *Черный Г.Г.* Газовая динамика. М.: Наука, 1988. 424 с.

Москва

Поступила в редакцию
26.IV.1996