

УДК 533.6.011.8

© 1997 г. Н.М. БУЛГАКОВА, М.Ю. ПЛОТНИКОВ, А.К. РЕБРОВ

МОДЕЛИРОВАНИЕ СТАЦИОНАРНОГО РАСШИРЕНИЯ ГАЗА С ПОВЕРХНОСТИ СФЕРЫ В ВАКУУМ

Методом прямого статистического моделирования исследовано сферически-симметрично расширение газа в вакуум при испарении или инъекции с поверхности в диапазоне чисел Кнудсена от 10^{-5} до ∞ . Установлено, что, как и в случае цилиндрического расширения, при $Kn < 10^{-2}$ переход через скорость звука происходит на расстоянии от поверхности источника, значительно превосходящем толщину зоны релаксации начальной неравновесности. С уменьшением Kn число длин свободного пробега между этой зоной и поверхностью с $M = 1$ возрастает, т.е. звуковая поверхность устанавливается в потоке сплошной газовой среды. На примере анализа трансзвуковой области показано, что описание течения с локальными числами Кнудсена $Kn_l < 10^{-2}$ на основании численного решения полной системы уравнений Навье – Стокса хорошо согласуется с решением уравнения Больцмана методом прямого статистического моделирования. Консервативность относительных величин параметров на поверхности $M = 1$ при малых числах Kn позволяет рекомендовать эту поверхность в качестве границы при постановке задачи и расчете радиального расширения вязкого газа в рамках уравнений Навье – Стокса.

Задача об истечении паров (газов) с поверхности сферы издавна привлекала внимание исследователей [1, 2]. В [3–5] содержатся ссылки на работы по этой проблеме в случае сферической поверхности источника (стока). Особый случай движения сверхзвукового источника без газодинамического сопротивления рассмотрен в [6].

В данной статье приводятся результаты исследования сильного испарения (вдува) с поверхности сферического источника, обеспечивающего сверхзвуковое течение, в широком диапазоне чисел Kn . Особенностью данной работы является комплексное использование прямого статистического моделирования и моделирования в рамках уравнений сплошной среды. Основное внимание обращено на трансзвуковую область, положение звуковой поверхности, трансформацию неравновесного течения у поверхности в поток, описываемый уравнениями Навье – Стокса. Определяется также граница области неравновесного течения (слоя Кнудсена). Ясно, что граница между "неравновесным" и "равновесным" потоками условна. Для обозначения этой границы ниже сделан акцент на использовании локального числа Кнудсена $Kn_l = 10^{-2}$. Перечисленные выше вопросы не нашли достаточно полного отражения в литературе.

Ближайшими к задаче, рассматриваемой ниже, являются работы [3, 7]. Исследования [3] основаны на решении уравнения Больцмана – Крука – Веландера. Эта работа является исчерпывающей по анализу испарения со сферы молекул с моделью взаимодействия в виде твердых сфер при числах $Kn = l/r_0 > 0,005$; здесь l – средняя длина свободного пробега, r_0 – радиус сферы. При этих условиях даже при $Kn = 0,005$ трансзвуковая область оказывается неравновесной, так как неравновесные области в окрестности источника и в сверхзвуковой области смыкаются.

В [7] изучалось течение с меньшими числами Kn . Авторы решили проблему сшивки неравновесной области у поверхности источника и невязкого сверхзвукового течения через прослойку вязкого течения. Несмотря на искусственность модели и

ограниченность ее для анализа течения в широком диапазоне чисел Kn , важным результатом является доказательство в рамках трехслойной модели возможности установления звуковой поверхности в потоке сплошной среды.

Неопределенность положения границы между неравновесной областью вблизи поверхности источника (слоем Кнудсена) и зоной вязкого дозвукового течения затрудняет использование модели сплошной среды для анализа конкретного течения. Неопределенность положения звуковой поверхности затрудняет даже качественные представления о структуре трансзвуковой зоны. Для цилиндрического источника ответы на эти вопросы даны в [8], для сферического – в данной работе благодаря использованию метода прямого статистического моделирования в сочетании с решением полной системы уравнений Навье – Стокса. Эффективность первого метода обусловлена тем, что он свободен от трудностей формулировки граничных условий при любой неравновесности.

1. Постановка задачи для прямого статистического моделирования. Введем шестимерное пространство $X \times V$, в котором состояние частицы определяется тремя ее пространственными координатами и тремя составляющими ее скорости. Обозначим через $f(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ функцию распределения, которая определяется следующим образом: $f(\mathbf{x}, \mathbf{v})d\mathbf{x}d\mathbf{v}$ есть ожидаемое число частиц в элементе объема физического пространства $d\mathbf{x}$ около точки \mathbf{x} , обладающих скоростями в элементе пространства скоростей $d\mathbf{v}$ около точки \mathbf{v} . С учетом геометрии задачи введем сферические координаты: r – расстояние до центра сферы φ и θ – соответствующие углы (широта и долгота). Обозначим через $v_r, v_\theta, v_\varphi, T_r, T_\theta, T_\varphi$ соответствующие компоненты скорости и температуры газа. Предполагаем, что установившееся течение газа описывается уравнением Больцмана [9].

Граничные условия следующие. Скорость частицы определяется максвелловским распределением

$$f(r = r_0, \mathbf{v}) = \frac{\Phi}{2\pi} \left(\frac{m}{kT_w} \right)^2 \exp \left\{ -\frac{m\mathbf{v}^2}{2kT_w} \right\}, \quad v_r > 0$$

где m – масса частицы, T_w – температура стенки источника, Φ – поток испаряющихся частиц, k – постоянная Больцмана. Испарение происходит в вакуум, поэтому граничное условие имеет вид

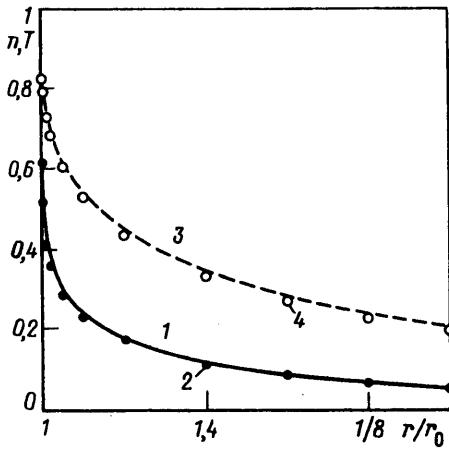
$$f(r \rightarrow \infty, \mathbf{v}) \equiv 0$$

Для описания взаимодействия молекул между собой использовалась модель твердых сфер [10]. Для нормировки скорости, температуры и массы используются соответственно $\sqrt{2kT_w/m}$, T_w и m . За единицу приняты плотность и длина свободного пробега χ_0 , отвечающие состоянию газа при температуре стенки источника и потоку Φ . Длина свободного пробега λ_0 определялась по плотности газа и сечению столкновений. Для обезразмеривания времени используется $\lambda_0 \beta, \beta = \sqrt{m/2kT_w}$. В этом случае безразмерная задача зависит только от одного параметра – числа Кнудсена

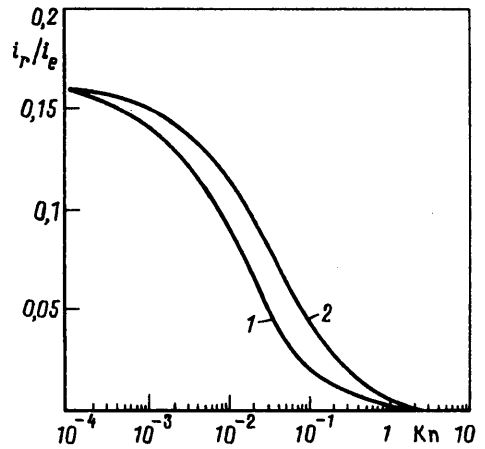
$$Kn = \lambda_0/r_0 \tag{1.1}$$

где r_0 – радиус источника.

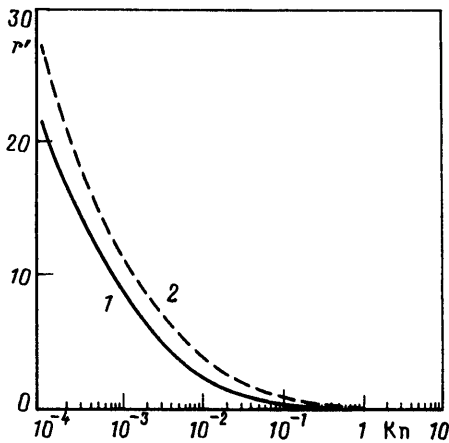
Для решения поставленной задачи применялся метод прямого статистического моделирования [10, 11]. Использовались сферические ячейки, радиальный размер которых уменьшался с приближением к источнику. Молекулы, возвращающиеся на поверхность источника, полностью поглощаются. На расстоянии R_0 от центра источника располагалась сферическая поверхность, которая поглощала достигшие ее частицы. Это расстояние менялось в зависимости от Kn . Для конкретного значения



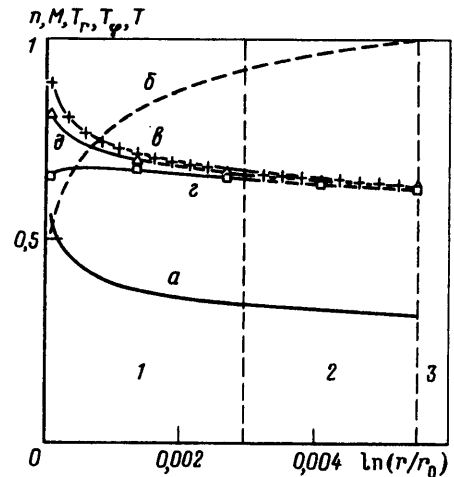
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Фиг. 1. Радиальное распределение плотности (1, 2) и температуры (3, 4) для $Kn = 0,005$, полученные соответственно методом прямого статистического моделирования и в [3]

Фиг. 2. Относительная доля молекул, возвращающихся к поверхности источника: кривая 1 – сферическое расширение, кривая 2 – цилиндрическое расширение

Фиг. 3. Положение звуковой поверхности ($r' = (r - r_0)/\lambda$): кривая 1 – сферическое расширение, кривая 2 – цилиндрическое расширение

Фиг. 4. Радиальное распределение параметров потока в трансзвуковой области при $Kn = 10^{-4}$: а – плотность; б – число Маха; в – азимутальная компонента температуры T_ϕ ; z – радиальная компонента температуры T_r ; delta – общая температура T ; 1 – слой Кнудсена; 2 – зона вязкого дозвукового течения; 3 – сверхзвуковая зона

Kn расстояние R_0 выбиралось таким образом, чтобы влияние поглощающей поверхности не сказывалось на поведении течения вблизи источника. В ходе расчетов вычислялись все основные гидродинамические моменты функции распределения. Расчеты проводились для широкого диапазона значений Kn , определенных формулой (1.1): от 10^{-5} до соответствующих свободномолекулярному режиму.

Для контроля точности вычислений проводились расчеты с уменьшением ячеек пространственной сетки и временного шага. Для примеров, приводимых в данной работе, выбраны такие шаги пространственной сетки и времени, что их дальнейшее уменьшение не оказывало влияния на результат расчетов.

2. Постановка задачи для решения системы уравнений Навье – Стокса. В данной работе также рассматривается вопрос о применимости уравнений Навье – Стокса к проблеме испарения с поверхности сферы. Фактически речь идет об определении границ упомянутой выше зоны вязкого течения. Для численного решения системы уравнений Навье – Стокса, записанной для случая сферической симметрии, применяется метод установления с использованием схемы расщепления [12], показавший высокую устойчивость и сходимость для широкого класса решений. Условия на ближайшей к испаряющей поверхности границе расчетной области берутся из решения задачи методом прямого статистического моделирования. Для определения области применимости уравнений Навье – Стокса положение границы варьируется и результаты решения сравниваются с результатами, полученными методом прямого статистического моделирования.

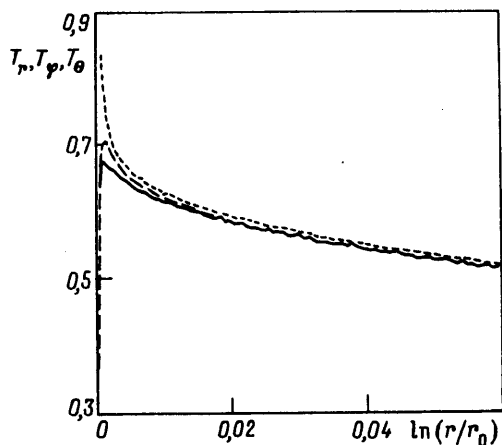
3. Результаты расчетов и их анализ. На фиг. 1 приведены радиальное распределение плотности и температуры для $Kn = 0,005$ в сравнении с данными [3]. Для больших чисел Кнудсена согласие результатов расчетов методом прямого статистического моделирования с данными [3] также вполне удовлетворительное.

На фиг. 2 показана зависимость $j = i_r/i_e = F(Kn)$ (i_e – число испаренных частиц, i_r – число частиц, возвращающихся к поверхности) для сферы и цилиндра в диапазоне чисел $Kn = 10^{-4}$ –10. Асимптотические значения этих величин, приведенные к значениям массовых потоков, совпадают с данными [3]. Доля возвращающихся молекул в случае сферического расширения несколько меньше, что объясняется более сильным радиальным градиентом параметров для этого случая. По этой же причине поверхность с числом Маха $M = u(\gamma RT)^{-1/2} = 1$ в случае сферического расширения находится ближе к поверхности источника на несколько длин свободного пробега, что проиллюстрировано на фиг. 3.

Для характеристики трансзвуковой зоны у поверхности сферы на фиг. 4 приведены радиальные зависимости плотности, скорости и температуры при $Kn = 10^{-4}$. Так же как в случае цилиндрического источника [8], область течения разделяется на три зоны. У поверхности источника расположена зона релаксации неравновесности (зона 1), возникающей при испарении (инжекции). Этой зоне присущи черты кнудсеновского слоя типа ударной волны и в дальнейшем для нее используется термин "слой Кнудсена". Границей слоя Кнудсена условимся считать поверхность, на которой $Kn_1 = l/pdp/dr = 10^{-2}$, где в качестве p используется плотность как наиболее чувствительный к градиенту потока параметр. За зоной релаксации следует зона вязкого дозвукового течения (зона 2) и далее идет сверхзвуковая область (зона 3), где газ можно считать сплошной средой до числа $Kn_1 = 10^{-2}$.

Для дополнительного исследования слоя Кнудсена была использована особенность метода прямого статистического моделирования, заключающаяся в возможности проведения расчетов с любой функцией распределения скоростей молекул на поверхности источника. На фиг. 5 показаны радиальные распределения температур для $Kn = 10^{-4}$ при испарении газа, причем $v_\theta = 1$; $v_\varphi = 0$; v_r соответствует обычному испарению в полусферу. При этом соблюдается выполнение законов сохранения импульса и энергии. Релаксационный процесс идет таким образом, что при первых столкновениях молекул T_φ релаксирует к T_θ значительно быстрее, чем T_r . Далее релаксационный процесс идет практически так же, как в случае задания максвелловской функции распределения инжектируемого газа.

Проведенный численный эксперимент позволяет сделать вывод о том, что толщина зоны сильной неравновесности у поверхности источника характеризуется малым количеством столкновений и зависит от радиальной скорости потока. С уменьшением



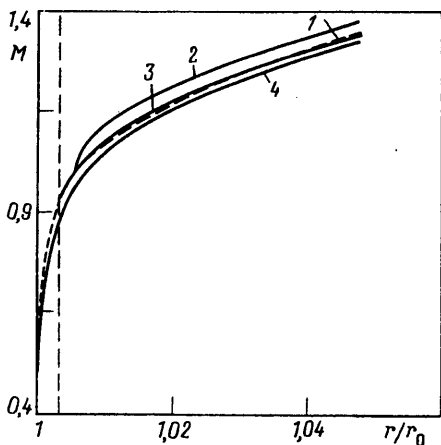
Фиг. 5. Радиальное распределение компонент температуры при задании искусственной неравновесности инжектируемого газа. Сплошная кривая – T_r , штриховая – T_ϕ , пунктирная – T_θ

числа Kn толщина этой зоны, определенная по $Kn_l = 10^{-2}$, стабилизируется на величине порядка 10 длин свободного пробега, а расстояние до поверхности с $M = 1$ в длинах свободного пробега молекул (в соответствии с данными на фиг. 3) возрастает. Соответственно ослабевает след начальной неравновесности при приближении к звуковой поверхности.

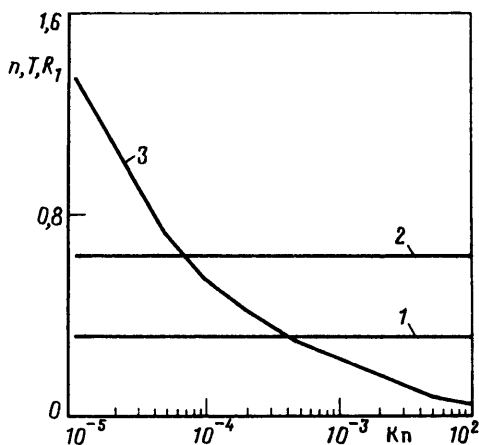
Выбор границы слоя Кнудсена из условия $Kn_l = 10^{-2}$ обосновывается численным моделированием на основе системы уравнений Навье – Стокса при использовании граничных условий вблизи поверхности, взятых непосредственно из расчета методом прямого статистического моделирования. Положение ближайшей к источнику границы варьировалось. Расчеты показали, что совпадение распределений параметров, полученными методом прямого статистического моделирования и решением уравнений Навье – Стокса, начинается при выборе этой границы вблизи точки с $Kn_l = 10^{-2}$.

На фиг. 6 показано сравнение радиального распределения числа Маха при $Kn = 10^{-4}$, полученного обоими используемыми методами. Штриховая кривая 1 – решение методом прямого статистического моделирования; кривая 2 – решение уравнений Эйлера вниз по потоку от звуковой поверхности; кривые 3 и 4 – решение уравнений Навье – Стокса. Кривая 3 соответствует случаю, когда ближайшая к поверхности испарения граница взята в точке $Kn_l = 10^{-2}$ в дозвуковой области течения (эта граница отмечена на фиг. 6 вертикальной линией). Кривая 4 получена в случае, когда расчет выполнялся, начиная с поверхности источника. Кривые 1 и 3 хорошо согласуются между собой, что свидетельствует как о приемлемости принятой границы слоя Кнудсена, так и об эквивалентности результатов расчета зоны течения сплошной среды в рамках принципиально различных подходов.

Приведенное сравнение можно считать взаимным тестированием методов. Распределение параметров для области $M > 1$ на основании решения уравнений Эйлера существенно отличается от решения уравнений Навье – Стокса, что свидетельствует о сильном влиянии вязкости в трансзвуковой области. Как известно, решение Эйлера имеет особенность в точке, где $M = 1 (\partial M / \partial r|_{M=1} = \infty)$, и это также является причиной отклонения этого решения от кривых 1 и 3. Расхождение между кривой 4 и решением методом прямого статистического моделирования означает неприменимость уравнений Навье – Стокса в окрестности испаряющей поверхности (в слое Кнудсена).



Фиг. 6.



Фиг. 7

Фиг. 6. Сравнение данных, полученных различными методами: кривая 1 – решение методом прямого статистического моделирования; кривая 2 – приближение Эйлера; кривая 3 – решение уравнений Навье – Стокса при граничных условиях на поверхности $Kn_l = 10^{-2}$; кривая 4 – решение уравнений Навье – Стокса при граничных условиях на поверхности сферы

Фиг. 7. Зависимость плотности (1) и температуры (2) от числа Кнудсена на звуковой поверхности. Кривая 3 – положение звуковой поверхности в безразмерных координатах $R_1 = 0,01 (r/r_0 - 1)/Kn$

Возвращаясь к фиг. 4 и 5, заметим, что вниз по потоку от точки $Kn_l = 10^{-2}$ наблюдается различие в значениях температур по направлениям. Это различие является следом слоя Кнудсена, на который наложен эффект неравновесности, присущий течению вязкого газа с градиентом параметров вдоль потока.

Расчеты методом прямого статистического моделирования показывают, что параметры газового потока как у поверхности сферы, так и на поверхности $Kn_l = 10^{-2}$ зависят от числа Kn . На поверхности же, где $M = 1$, эти зависимости слабы, что можно видеть из фиг. 7, где приведены значения температуры и плотности на звуковой поверхности в зависимости от числа Kn . Там же показана зависимость геометрического положения звуковой поверхности от числа Kn . Поверхность, где $M = 1$, может быть рекомендована в качестве граничной для расчета сверхзвукового потока в рамках уравнений Навье – Стокса.

Понятно, что область течения, описываемая уравнениями Навье – Стокса, ограничена с двух сторон неравновесными зонами, где $Kn_l > 10^{-2}$, и расширяется с уменьшением числа Kn . Расчетами показано, что в соответствии с данным выше определением локального числа Kn_l область течения с $Kn_l < 10^{-2}$ имеет место только при числах $Kn < 10^{-3}$. При числах $Kn > 10^{-3}$ неравновесные зоны смыкаются.

Закключение. Исследовано расширение газа, состоящего из молекул в виде твердых сфер, в вакуум при испарении (инжекции) со сферической поверхности.

Установлено, что метод прямого статистического моделирования $Kn > 0,005$ дает те же результаты, что и методы кинетической теории газов [3]. При уменьшении чисел Kn от 10^{-3} в потоке появляется область, описываемая уравнениями Навье – Стокса. Звуковая поверхность ($M = 1$) устанавливается в области течения сплошной среды. Граница слоя Кнудсена (начальной неравновесности) у поверхности сферы стабилизируется на расстоянии примерно 10 длин свободного пробега молекул. Относительные значения параметров потока на звуковой поверхности обладают консервативностью, т.е. слабо зависят от числа Kn .

Полученные результаты демонстрируют высокую эффективность сочетания метода прямого статистического моделирования и решения системы уравнений Навье – Стокса при исследовании течений газа с зонами любой степени неравновесности.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 95-01-01371).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Maxwell J.C.* Theory of heat. L.: Longmans. Green, 1888. 333 p.
2. *Фукс Н.А.* Испарение и рост капель в газообразной среде. М.: Изд-во АН СССР, 1958. 91 с.
3. *Sone Y., Sugimoto H.* Kinetic theory analysis of steady evaporating flows from a spherical condensed phase into a vacuum // *Phys. Fluids A*. 1993. V. 5. № 6. P. 1491–1511.
4. *Barrett J.C., Shizgal B.* Condensation and evaporation of a spherical droplet in the near free molecular regime // *Proc. 16th Intern. Symp. on Rarefied Gas Dynamics / Ed. E.P. Muntz, et al.* Washington: AIAA, 1989. V. 2. P. 447–460.
5. *Chernyak V.* The kinetic theory of droplet evaporation // *J. Aerosol. Sci.* 1995. V. 26. № 6. P. 873–885.
6. *Чекмарев С.Ф.* О движении сверхзвукового источника // *Изв. АН СССР. МЖГ*. 1980. № 5. С. 173–175.
7. *Edwards R.H., Collins R.L.* Evaporation from a spherical source into a vacuum // *Proc. 6th Intern. Symp. on Rarefied Gas Dynamics / Ed. H. Trilling, H.Y. Wachman.* N.Y.: Acad. Press, 1969. V. 2. P. 1489–1496.
8. *Плотников М.Ю., Ребров А.К.* Переход к сверхзвуковой скорости при испарении и инъекции с цилиндрической поверхности в вакуум // *ПМТФ*. 1996. Т. 37. № 2. С. 120–130.
9. *Коган М.Н.* Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967. 440 с.
10. *Берд Г.* Молекулярная газовая динамика. М.: Мир, 1981. 319 с.
11. *Иванов М.С., Рогазинский С.В.* Экономичные схемы прямого статистического моделирования течений разреженного газа // *Мат. моделирование*. 1989. Т. 1. № 7. С. 130–145.
12. *Ковеня В.М., Тарнавский Г.А., Черный С.Г.* Применение метода расщепления в задачах аэродинамики. Новосибирск: Наука, 1990. 246 с.

Новосибирск

Поступила в редакцию
29.V.1996