МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 6 • 1997

УДК 532.59

© 1997 г. Л.Д. АКУЛЕНКО, С.В. НЕСТЕРОВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ ВНУТРЕННИХ ВОЛН В СУЩЕСТВЕННО НЕОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ

Исследована плоская задача о свободных волновых движениях тяжелой неоднородной жидкости, заключенной между двумя абсолютно твердыми плоскопараллельными крышками. Считается, что жидкость устойчиво непрерывно стратифицирована по вертикали. Движения рассматриваются в классе бегущих в горизонтальном направлении волн. Предложен эффективный численно-аналитический метод решения и анализа соответствующей задачи Штурма–Лиувилля для координатной функции, зависящей от глубины. Разработаны процедуры построения высокоточных двусторонних оценок собственных частот бегущих волн. Предложена и опробована рекуррентная схема уточнения значений собственных чисел (частот) и функций (форм) волновых движений жидкости, обладающая свойством ускоренной сходимости. Проведен расчет двух примеров стратификации и построены дисперсионные кривые и формы колебаний.

Известно, что океаническая среда (морская вода) весьма сложно стратифицирована по вертикали [1]. Определение собственных частот внутренних волн, распространяющихся в такой среде, как правило, может быть осуществлено только с помощью численных методов. В некоторых исключительно простых модельных случаях изменения частоты Брента–Вяйсяля с глубиной удается найти аналитические решения задачи определения собственных частот и форм внутренних волн. Разработка эффективных аналитических и численно-аналитических методов для исследования внутренних волн в сложно стратифицированной жидкости представляет значительный интерес в теоретическом и прикладном аспектах [1–3].

1. Постановка задачи. Рассмотрим двумерные волновые движения в неограниченном вдоль оси x слое непрерывно стратифицированной жидкости с плотностью $\rho = \rho(y)$. Жидкость находится в однородном поле сил тяготения, ускорение которых равно g. Здесь (x, y) – декартова система координат; x – горизонтальная, а y – вертикальная, связанная с верхней границей, координаты. Верхняя и нижняя границы слоя полной глубины h предполагаются абсолютно твердыми. Требуется определить собственные частоты и моды (формы) внутренних волн, распространяющихся в указанном слое жидкости.

С целью описания двумерных волновых движений стратифицированной жидкости может быть введена функция тока $\psi = \psi(x, y, t)$ (плоская задача). В приближении Буссинеска функция ψ удовлетворяет уравнению [2, 3]

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)+N^2(y)\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=0$$
$$|x|<\infty,\ \ -h<y<0,\ \ t\geqslant t_0,\ \ N^2(y)=-g\rho'(y)/\rho(y) \tag{1.1}$$

Здесь N^2 – квадрат частоты Брента – Вяйсяля, зависящей от вертикальной координаты y, $N^2(y) > 0$. Жидкость предполагается устойчиво стратифицированной: плотность $\rho(y)$ возрастает с уменьшением y, т.е. $\rho'(y) < 0$.

Функция тока ψ должна удовлетворять определенным граничным и начальным условиям. В частности, на твердых границах слоя $y = 0, -h$ должны выполняться условия непротекания

$$\psi(x, 0, t) = \psi(x, -h, t) \equiv 0 \qquad (1.2)$$

Зависимость ψ от x, t выбирается специальным образом. Будем искать частные решения уравнения (1.1), удовлетворяющие условиям (1.2), в виде бегущих волн

$$\psi(x, y, t) = \Psi(y)\exp i(\omega t - kx) \qquad (1.3)$$

где i – мнимая единица, ω – частота, k – волновое число. Функция $\Psi(y)$ неизвестна и подлежит дальнейшему определению. Подстановка выражения (1.3) в уравнение (1.1) и учет краевых условий (1.2) приводят к следующей задаче Штурма – Лиувилля для определения неизвестных ω, Ψ (волновое число k считается заданным)

$$\Psi'' + k^2(\omega^{-2}N^2(y) - 1)\Psi = 0, \quad \Psi(0) = \Psi(-h) = 0 \qquad (1.4)$$

Здесь штрихами обозначены производные функции Ψ по аргументу y. Для дальнейшего анализа краевой задачи (1.4) удобно ввести безразмерный аргумент $y^* = -y/h$, функцию $\Psi^*(y^*) = \Psi(y)$ (звездочка далее опускается ради сокращения записи), а также параметры μ и $\varkappa$. В результате приходим к самосопряженной краевой задаче на собственные значения μ и функции Ψ при заданных значениях параметра $\varkappa$, т.е. к задаче Штурма – Лиувилля вида

$$\Psi'' + (\mu N^2(y) - \varkappa^2)\Psi = 0, \quad \Psi(0) = \Psi(1) = 0 \qquad (1.5)$$

$$0 < y < 1, \quad \mu = \varkappa^2/\omega^2, \quad \varkappa^2 = k^2h^2, \; 0 < \mu, \varkappa^2 < \infty$$

Для задачи (1.5) требуется опредить собственные значения μ_n (частоты ω_n, $\omega_n^2 = \mu_n/\varkappa^2$) и функции $\Psi_n(y) = \Psi(y, \mu_n)$, зависящие также от параметра задачи $\varkappa^2$, который может принимать произвольные неотрицательные значения. В гидродинамическом аспекте особый интерес представляет определение низших собственных чисел $\mu_1, \mu_2, \ldots$ и функций $\Psi_1, \Psi_2, \ldots$ для сравнительно небольших значений $\varkappa$.

2. Математические аспекты решения задачи Штурма – Лиувилля. При существенном изменении функции $N^2(y)$ (частоты Брента – Вяйсяля) высокоточное определение собственных чисел и функций задачи (1.5) представляет значительные трудности. Для приближенных вычислений разработан ряд методов, в том числе весьма сложных и трудоемких (см. [4, 5]).

Как показывает вычислительная практика, наиболее простой и естественный вариационный подход (принцип Рэлея, метод Рэлея – Ритца, см. [4–8]) часто дает приемлемые результаты. Он позволяет с удовлетворительной точностью вычислить оценки сверху низших собственных чисел и приближенно построить соответствующие собственные функции. Существенное усовершенствование метода Рэлея – Ритца, позволяющее дать априорную оценку точности, было проведено Н.М. Крыловым [6]. Была установлена сходимость в соответствующей метрике приближенных решений задачи Штурма – Лиувилля и дана оценка скорости сходимости к точному решению.

Отметим, что для приложений очень важно построение высокоточных оценок снизу собственных чисел $\mu_1, \mu_2, \ldots$, т.е. построение удовлетворительных двусторонних оценок. По отношению к рассматриваемой задаче гидродинамики метод Рэлея – Ритца позволяет получить оценки снизу искомых собственных частот $\omega_1, \omega_2, \ldots$ внутренних волн и соответствующих им форм колебаний. Для практики, однако, представляет значительный интерес построение высокоточных оценок сверху для указанных высших частот (низших мод колебаний). Отметим, что имеющиеся в настоящее время методы построения оценок снизу собственных чисел чрезвычайно громоздки и малопродуктивны (см., например, [5]). Они основаны на приближенном решении интегрального уравнения Фредгольма второго рода, эквивалентного исходной задаче Штурма – Лиувилля (см. [5, 7, 8]).

Далее для предварительного нахождения грубой оценки собственного числа μ_1 и функции $\Psi_1(y)$ применяется малокоординатное приближение по методу Рэлея – Ритца [4–8]. В частности, для несложных расчетов модельных примеров используется принцип Рэлея [4–8]. Этот подход позволяет при помощи простых квадратур оценить сверху первое собственное число μ_1; имеем (далее индекс 1 опускается с целью сокращения записи)

$$\mu^* = J[\varphi] / I[\varphi], \ \ \varphi(0) = \varphi(1) = 0, \ \ 0 < \mu \leqslant \mu^* \tag{2.1}$$
$$J[\varphi] = \int_0^1 (\varphi'^2(y) + \varkappa^2\varphi^2(y))dy, \quad I[\varphi] = \|\varphi\|^2_{N^2} = \int_0^1 N^2(y)\varphi^2(y)dy$$

Здесь $\varphi(y)$ – некоторая непрерывно дифференцируемая "пробная" функция, которая выбирается часто весьма грубо из интуитивных физических представлений о первой моде колебаний, в частности $\varphi(y) \neq 0$ для $0 < y < 1$. Удовлетворительные результаты получаются для симметричной относительно значения $y = {}^1/2$ или медленно изменяющейся функции $N^2(y)$, если взять $\varphi(y) = \sin\pi y$, $\varphi(y) = y(1-y)$ и др. Более регулярный способ выбора пробной функции может быть связан с методом продолжения по параметру (см. ниже).

Отметим, что равенство $\mu = \mu^*$ имеет место только в случае $\varphi(y) \equiv C\Psi(y)$, где $C = \text{const}$, $\Psi(y)$ – первая собственная функция. Оценка (2.1) является простым следствием вариационной трактовки задачи Штурма – Лиувилля (1.5)

$$\min J[\Psi] = \mu, \quad I[\Psi] = 1, \Psi(0) = \Psi(1) = 0 \tag{2.2}$$

Функционалы $J[\Psi]$, $I[\Psi]$ в (2.2) определяются согласно выражениям (2.1).

Как отмечалось выше, оценка (2.1) не позволяет судить о близости значений μ и μ^*. В связи с изложенным представляется важным изучить следующие вопросы [9, 10].

1. Установить критерий близости и определить, насколько хорошо полученная по методу Рэлея – Ритца или согласно принципу Рэлея (2.1) оценка $\mu^*, \mu \leqslant \mu^*$ аппроксимирует точное значение μ.

2. Предложить эффективный подход для построения оценки снизу μ_*, $\mu \geqslant \mu_*$.

3. Изучить возможности и предложить способы уточнения оценок μ^*, μ_*.

4. Разработать конструктивный метод и построить алгоритм последовательного уточнения оценок, позволяющие получить сколь угодно точное значение μ (в пределе – точное значение).

5. Распространить указанные результаты для оценок и нахождения последующих собственных значений μ_n и функций Ψ_n, $n \geqslant 2$.

6. Изучить возможности эффективного решения задачи Штурма – Лиувилля в случае краевых условий второго и третьего рода. Эти условия характерны для геофизических проблем, когда слой жидкости имеет сверху свободную границу.

3. Развитие метода возмущений для приближенного решения задачи Штурма – Лиувилля. Итак, пусть μ^* – известная, согласно (2.1), оценка сверху первого собственного числа задачи (1.5). Подставим значение μ^* в уравнение (1.5) и рассмотрим задачу Коши

$$v'' + (\mu^* N^2(y) - \varkappa^2)v = 0, \ \ v(0) = 0, \ \ v'(0) = 1 \tag{3.1}$$

Решение задачи (3.1) $v = v(y, \mu^*)$ считается далее известным в аналитическом или численном виде, или в виде процедуры. Функция $v(y, \mu^*)$ обладает свойствами

$$v(0, \mu^*) = 0, \quad v(\xi, \mu^*) = 0, \quad 0 < \xi \leqslant 1 \tag{3.2}$$

Равенство $\xi = 1$ в (3.2) имеет место только в случае $\mu^* = \mu$; при $\mu^* > \mu$ имеем $\xi < 1$, что следует из второй осцилляционной теоремы Штурма [11]. В качестве меры близости оценки μ^*, т.е. малости разности $\mu^* - \mu > 0$, далее предлагается взять величину ε, $\varepsilon = 1 - \xi \geqslant 0$, где ξ – известная, согласно (3.2), величина – наименьший положительный корень функции v. Малость величины параметра ε может быть обеспечена методом Рэлея – Ритца на основе результатов [6].

Наряду с задачей Коши (3.1) рассмотрим аналогичную задачу при значении $\mu = \eta\mu^*$, где числовой параметр $\eta = \eta(\varepsilon)$ удовлетворяет неравенствам $0 < \eta < 1$. Соответствующее решение также предполагается известным $v = v(y, \eta\mu^*)$ в аналитическом или численном виде. Стандартными приемами математической физики [7] устанавливается справедливость следующих утверждений [9, 10].

1. Если функция $v(y, \eta\mu^*)$ сохраняет знак на интервале $0 < y \leqslant 1$, то величина $\eta\mu^*$ есть оценка снизу μ_* первого собственного числа, т.е.

$$0 < \mu_* \leqslant \mu < \mu^*, \ \ \mu_* = \eta\mu^* \tag{3.3}$$

2. Если же функция $v(y, \eta\mu^*)$ обращается в нуль в какой-либо точке $y = \xi^*$, $0 < \xi^* < 1$, то величина $\eta\mu^*$ представлет собой улучшенную оценку сверху, т.е.

$$\mu < \eta\mu^* < \mu^* \tag{3.4}$$

Отметим, что для собственных частот внутренних волн имеют место соответствующие (3.3) и (3.4) оценки

$$\frac{\varkappa^2}{\mu^*} \leqslant \omega^2 \leqslant \frac{\varkappa^2}{\mu_*}, \ \ \mu_* = \eta\mu^* \tag{3.5}$$

$$0 < \omega^2 < \frac{\varkappa^2}{\eta\mu^*} < \frac{\varkappa^2}{\mu^*} \tag{3.6}$$

Ниже устанавливаются конструктивные способы определения величины параметра $\eta = \eta(\varepsilon)$, основанные на применении регулярных методов возмущений. Далее предполагается выполнение сильного неравенства

$$0 \leqslant \varepsilon \ll 1, \ \ \varepsilon = 1 - \xi, \ \ \xi = \min \arg v \tag{3.7}$$

Задачу Штурма – Лиувилля (1.5) преобразуем к специальному виду возмущенной задачи. Введем новые независимую переменную $z = \xi y$, неизвестную функцию $\Phi(z, \varepsilon) \equiv \Psi(y)$ и параметр $\nu = \xi^{-2}\mu$; получим (штрихами обозначены производные по аргументу z)

$$\Phi'' + (\nu N^2(z) - \varkappa^2)\Phi = \varepsilon H(z, \nu)\Phi + \varepsilon^2 \ldots, \ \ 0 < z < \xi \tag{3.8}$$

$$\Phi(0) = \Phi(\xi) = 0, \ \ H(z, \nu) = -\nu z(N^2(z))' + 2\varkappa^2$$

Искомое собственное число ν и функцию Φ будем строить с помощью регулярной процедуры разложений по степеням ε или последовательными приближениями в виде

$$\nu = \nu(\varepsilon) = \mu^* + \varepsilon\nu_1 + \varepsilon^2 \ldots, \ \ \Phi = \Phi(z, \varepsilon) = v(z, \mu^*) + \varepsilon\Phi_1(z) + \varepsilon^2 \ldots \tag{3.9}$$

Число $\mu^* = \nu(0)$ и функция $v(z, \mu^*) = \Phi(z, 0)$ есть решение соответствующей невозмущенной (порождающей) задачи (3.8) при $\varepsilon = 0$. Для определения неизвестных ν_1, Φ_1 имеем неоднородную краевую задачу, которую получаем после подстановки разложений (3.9) в соотношения (3.8) и приравнивания коэффициентов при ε

$$\begin{gathered}\Phi_1'' + (\mu^* N^2 - \varkappa^2)\Phi_1 = -\nu_1 N^2 v - \mu^* z N^{2\prime} v + 2\varkappa^2 v \\ \Phi_1(0) = \Phi_1(\xi) = 0, \ \ N^2 = N^2(z), \ \ 0 \leqslant z \leqslant \xi\end{gathered} \tag{3.10}$$

Для разрешимости краевой задачи (3.10) необходимо и достаточно, согласно альтернативе Фредгольма [7, 8], чтобы правая часть уравнения была ортогональна собственной функции $v(z, \mu^*)$ (вследствие самосопряженности однородной задачи). Необходимость следует из элементарных выкладок после умножения уравнения (3.10) на v и интегрирования по частям на промежутке $0 \leqslant z \leqslant \xi$ с учетом уравнения (3.1) для v. Применяя этот прием, получим искомое выражение для неизвестного коэффициента ν_1 разложения (3.9)

$$\nu_1 = -\frac{\mu^*}{\|v\|^2_{N^2}} \int_0^{\xi} \left[z(N^2(z))' - 2\frac{\varkappa^2}{\mu^*} \right] v^2(z,\mu^*)dz$$

$$\|v\|^2_{N^2} = \int_0^{\xi} N^2(z) v^2(z,\mu^*)dz \tag{3.11}$$

На основе полученного выражения (3.11) для ν_1 определяется искомая функция $\Phi_1(z)$ как решение задачи (3.10). При помощи аналогичной процедуры могут быть найдены выражения для последующих коэффициентов ν_k, Φ_k, $k \geqslant 2$, разложений (3.9). Однако такой подход к уточнению решения оказывается чрезвычайно громоздким и малопродуктивным в вычислительном аспекте. На практике часто можно ограничиться первым приближением для ν, Φ, т.е. для μ, Ψ. Отметим, что в выражении (3.11) без потери точности по ε можно положить $\xi = 1$. Соответствующая собственная функция первого приближения получается интегрированием приведенной выше задачи Коши (3.1) при уточненном значении ν или μ (см. ниже).

Ограничиваясь первым приближением для ν (3.9), получим с погрешностью $O(\varepsilon^2)$ выражение для искомого собственного числа μ в виде

$$\mu = \xi^2\mu^*\left(1 + \varepsilon\frac{\nu_1}{\mu^*}\right) + \varepsilon^2 \ldots = \mu^*\left(1 + \varepsilon\left(\frac{\nu_1}{\mu^*} - 2\right)\right) + \varepsilon^2 \ldots \tag{3.12}$$

Из (3.12) следует, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$ утверждение 1 (т.е. неравенства (3.3)) имеет место для $\eta(\varepsilon) = \xi^2$, $\xi = 1 - \varepsilon$, если величина $\nu_1 > 0$ (см. (3.11)). Достаточное условие выполнения этого неравенства заключается в неположительности подынтегрального выражения для ν_1. В частности, если $N'(y) \leqslant 0$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, то это условие выполняется и $\mu_* = \xi^2\mu^*$ есть оценка снизу, которая устанавливается априори без интегрирования, согласно (3.11). Аналогично определяется справедливость утверждения 2, т.е. неравенств (3.4) при $\nu_1 < 0$ для $\eta(\varepsilon) = \xi^2$. Таким образом, при выполнении строгих неравенств $\nu_1 > 0$, $\nu_1 < 0$ верны соответствующие оценки (3.5), (3.6) для высшей собственной частоты ω ($\omega^2 = \varkappa^2/\mu^2$).

4. Метод ускоренной сходимости для решения задачи Штурма – Лиувилля. На основе результатов разд. 3 разработан эффективный численно-аналитический метод вычисления собственных значений (частот) и функций (форм колебаний) задачи Штурма – Лиувилля, определяющих внутренние волновые движения стратифицированной жидкости. Соответствующий алгоритм обладает свойством ускоренной сходимости (квадратической), аналогичной методу касательных Ньютона [9, 10]. Существо подхода заключается в последовательном использовании уточненного согласно формуле (3.12) значения μ для интегрирования задачи Коши (3.1) и определения искомой абсциссы $\xi > 0$.

Формула (3.11) требует больших вычислительных затрат, поскольку на основе интегрирования функций, определяемых в процессе решения, как правило, численного, задачи Коши. Квадратура (3.11) может быть значительно упрощена и приведена к конечному виду посредством интегрирования по частям [9, 10]

$$\mu = \mu^* - \varepsilon\xi\frac{v'^2(\xi,\mu^*)}{\|v\|^2_{N^2}} + \varepsilon^2 \ldots \equiv \mu_{(1)} + \varepsilon^2 \ldots \tag{4.1}$$

Квадрат нормы $\|v\|^2_{N^2}$ функции v с весом N^2 определен в (3.11). Без потери точности по ε в (4.1) можно положить абсциссу $\xi = 1$.

Подставим теперь в уравнение (3.1) вместо μ^* уточненное значение $\mu_{(1)}$ и проинтегрируем задачу Коши. Соотношения (3.2) будут содержать $\mu_{(1)}$ и неизвестную ξ, величина которой $\xi_{(1)} = 1 - \varepsilon_{(1)}$, где $\varepsilon_{(1)} = O(\varepsilon^2)$, поскольку $v'(1, \mu^*) \neq 0$. Вычислим уточненное значение $\mu = \mu_{(2)} + \varepsilon^2_{(1)}\ldots$, где для ε и ξ берутся величины $\varepsilon_{(1)}$ и $\xi_{(1)}$ соответственно, причем без потери точности по $\varepsilon_{(1)}$ в (4.1) можно получить $\xi_{(1)} = 1$. Из оценки для $\varepsilon_{(1)} = O(\varepsilon^2)$ следует, что $\mu - \mu_{(2)} = O(\varepsilon^2_{(1)})$, т.е. погрешность составляет величину $O(\varepsilon^4)$.

Процесс последовательного уточнения величины μ и функции $v(y, \mu)$ может быть неограниченно продолжен. На k-м шаге погрешность определения собственного значения и функции составит величину $O(\varepsilon_{(k)}) = O(\varepsilon^{\theta(k)})$, где $\theta(k) = 2^k$, $k = 1, 2,\ldots$ [9, 10]. Приведем формальный алгоритм рекуррентного процесса вычисления собственных значений и функций (см. (4.1), (3.7), (3.1), (3.2))

$$\mu_{(k+1)} = \mu_{(k)} - \varepsilon_{(k)}\xi_{(k)}\frac{v'^2(\xi_{(k)},\mu_{(k)})}{\|v_{(k)}\|^2_{N^2}}, \quad k = 0,1,2,\ldots \tag{4.2}$$

$$v'' + (\mu_{(k+1)}N^2(y) - \varkappa^2)v = 0, \; v(0) = 0, \; v'(0) = 1$$

$$\varepsilon_{(k+1)} = 1 - \xi_{(k+1)}, \; \xi_{(k+1)} = \min_y \arg v(y, \mu_{(k+1)}) > 0$$

Изложенная схема (4.2) весьма экономична; она требует лишь высокоточного интегрирования задачи Коши (4.1) при $\mu = \mu_{(k)}$ и определения минимального положительного корня $\xi_{(k)}(\mu_{(k)})$ функции $v(y, \mu_{(k)})$, ближайшего к значению $\xi = 1$. Вычисление квадрата нормы $\|v_{(k)}\|^2_{N^2}$ может быть проведено эффективным методом численного интегрирования (например, методом Симпсона) с достаточно малым шагом по y. Отметим, что без потери точности по $\varepsilon_{(k)}$ в формуле (4.2) для $\mu_{(k+1)}$ можно положить $\xi_{(k)} = 1$. Указанное вычисление квадрата нормы можно заменить интегрированием задачи Коши для некоторой функции $w(y, \mu_{(k)})$ (производной v по μ), т.е. можно воспользоваться соотношениями

$$\|v_{(k)}\|^2_{N^2} = \int_0^{\xi_{(k)}} v^2(y,\mu_{(k)})N^2(y)dy = v'(\xi_{(k)},\mu_{(k)})w(\xi_{(k)},\mu_{(k)})$$

$$w'' + (\mu_{(k)}N^2(y) - \varkappa^2)w = -N^2(y)v(y,\mu_{(k)}), \; w = \partial v/\partial\mu \tag{4.3}$$

$$w(0) = w'(0) = 0, \; v'^2(\xi,\mu)\|v\|^{-2}_{N^2} = v'(\xi,\mu)/(\partial v/\partial\mu)$$

Вычислительная практика показывает, что для прикладных целей достаточно ограничиться одной итерацией по ε (4.1) при удачном выборе пробной функции (при $\varepsilon \lesssim 0{,}1$). Две-три итерации, согласно (4.2), (4.3), приводят к высокоточным оценкам (с погрешностью 10^{-4}–10^{-8}). Четыре и более итераций дают практически точные значения, достижимые на современных ЭВМ (ошибки порядка 10^{-16} и меньше). Простота численной реализации рекуррентной процедуры (4.2) позволяет проводить удовлетворительные расчеты на программируемых микрокалькуляторах [9, 10].

Отметим, что разработанный подход применим также для эффективного расчета последующих собственных значений μ_n и функций $\Psi_n(y)$, $n \geqslant 2$. Метод квадратической сходимости может быть разработан и применен к краевым задачам с граничными условиями второго и третьего рода, а также смешанными.

5. Расчет модельных примеров. Приведем расчеты для двух примеров стратификации жидкости, иллюстрирующих эффективность алгоритма вычисления собственных частот первой моды внутренних волн.

1. Рассмотрим случай, когда зависимость частоты Брента – Вяйсяля от глубины

моделируется в соответствии с формулой (1.1) в виде $N^2(y) = N_0^2 \exp(2\beta y)$, где $-h \leqslant y \leqslant 0$. Вводя безразмерную переменную $y^* = -y/h$ и опуская звездочку, получим в соответствии с (1.5) задачу Штурма – Лиувилля

$$\Psi'' + (\mu \exp(-2\gamma y) - \varkappa^2)\Psi = 0, \quad \Psi(0) = \Psi(1) = 0$$
$$\gamma = \beta h, \quad \mu = \varkappa^2 N_0^2/\omega^2, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1 \tag{5.1}$$

Решение задачи (5.1) может быть найдено аналитически с помощью цилиндрических функций [8]. Однако при этом приходится проводить весьма громоздкие численные расчеты для определения первого собственного числа μ (и частоты ω). Используя одну итерацию согласно (3.12), получим следующие оценки частоты ω при $\gamma = \ln 2 = 0{,}6931$ и ее точные значения на основе табличных данных для соответствующих значений $\varkappa$:

$$0{,}0788 < \omega/N_0 = 0{,}0795 < 0{,}0796, \ \varkappa = {}^1/_2\gamma, \ \varepsilon = 0{,}0148$$
$$0{,}1547 < \omega/N_0 = 0{,}1562 < 0{,}1564, \ \varkappa = \gamma, \ \varepsilon = 0{,}0160 \tag{5.2}$$
$$0{,}2899 < \omega/N_0 = 0{,}2942 < 0{,}2946, \ \varkappa = 2\gamma, \ \varepsilon = 0{,}0566$$

Итак, равенства (5.2) получены в соответствии с табличными значениями цилиндрических функций. Левые неравенства (оценки сверху для μ и снизу для ω) следуют из принципа Рэлея (пробная функция $\varphi(y) = \sin \pi y$). Правые неравенства (оценки снизу для μ и сверху для ω) получены на основе предложенного алгоритма согласно (3.12). Таким образом, получены двусторонние оценки (3.3), (3.5), поскольку $\nu_1 > 0$, так как $N'(y) < 0$, $0 \leqslant y \leqslant 1$. Из двусторонних оценок (5.2) следует, что погрешность вычислений не превышает 1%.

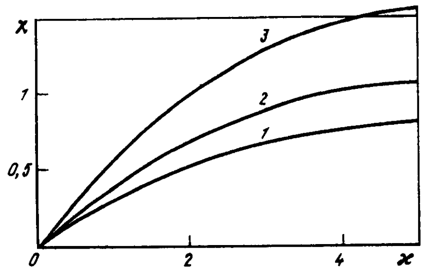
2. В отличие от рассмотренного выше случая монотонного изменения частоты Брента – Вяйсяля с глубиной приведем расчеты в ситуации, когда функция $N^2(y)$ имеет экстремум, в частности максимум. Исследуем краевую задачу (1.5) вида

$$\Psi'' + (\mu(1 - \alpha \sin \pi y)^{-1} - \varkappa^2)\Psi = 0, \quad \Psi(0) = \Psi(1) = 0$$
$$0 \leqslant \alpha < 1, \quad \mu = \varkappa^2 N_0^2/\omega^2 \tag{5.3}$$

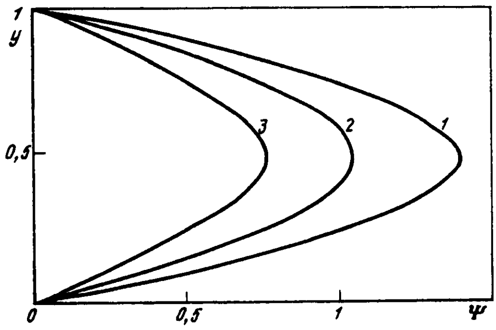
Приближенное аналитическое решение задачи (5.3) удается построить при $\alpha \ll 1$ [3]. На фиг. 1 приведены дисперсионные кривые $\chi = \omega(\varkappa, \alpha)/N_0$ для значений $\alpha = 0$, 0,5 и 0,8 (кривые *1*, *2* и *3* соответственно) при изменении $\varkappa = kh$ от 0 до 5. Относительная погрешность вычислений не превосходит 0,5%. Следует отметить, что для обеспечения такой точности при $0 \leqslant \varkappa \leqslant 2$ потребовалось две итерации, а при $2 < \varkappa \leqslant 5$ – три.

Используя связь между ω, $\varkappa$ и μ (5.3), получим приближенное выражение для ω при $\varkappa \to 0$ (случай длинных волн): $\chi = \omega/N_0 = \varkappa\mu^{-1/2}(0, \alpha) + q\varkappa^3 + \varkappa^5 \ldots$ Постоянная $q < 0$ может быть эффективно вычислена с помощью теории возмущений путем разложения μ и Ψ по степеням $\varkappa^2$.

На фиг. 2 приведены симметричные относительно $y = {}^1/_2$ нормированные собственные функции $\Psi(y, \alpha, \varkappa)$ для значений $\alpha = 0$; 0,5; 0,8 (кривые *1*–*3* соответственно) при $\varkappa = 0{,}6$; 2,0. В ходе вычислений установлено, что собственные функции существенно изменяются при варьировании параметра α. Зависимость функций от $\varkappa$ при $\varkappa \sim 1$ существенно слабее. В частности, при $\alpha = 0$ эта зависимость полностью отсутствует. Для $\alpha > 0$ зависимость от $\varkappa$ при $0 \leqslant \varkappa \leqslant 3$ незначительна и по этой причине не отражена на графиках. Однако обнаружено, что с ростом $\varkappa$ ($\varkappa \gg 1$) при фиксированном $\alpha > 0$ максимальное значение по y функции $\Psi(y, \alpha, \varkappa)$ возрастает.



Фиг. 1. Зависимость первой собственной частоты от волнового числа и параметра стратификации



Фиг. 2. Зависимость первой моды колебаний от глубины, волнового числа и параметра стратификации

Отметим, что для сокращения вычислительных затрат был использован метод продолжения по параметрам α, $\varkappa$.

Заключение. Разработанный метод решения задачи Штурма – Лиувилля позволяет быстро и эффективно определять собственные частоты и моды внутренних волн в слое устойчиво стратифицированной жидкости с произвольной зависимостью ее плотности от глубины.

Проведены расчеты собственных частот и форм внутренних волн для конкретных примеров стратификации жидкости. В безразмерных переменных построены зависимости первой собственной частоты и моды колебания жидкости от волного числа и параметра, характеризующего максимум частоты Брента – Вяйсяля.

Авторы благодарят А.А. Чайковского за помощь в построении графиков.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 96-01-00221, 96-02-00265).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Эккарт К.* Гидродинамика океана и атмосферы. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 327 с.
2. *Yih C.S.* Gravity waves in a stratified fluid // J. Fluid Mech. 1960. V. 8. Pt 4. P. 481–508.
3. *Нестеров С.В.* Собственные частоты внутренних волн в жидкости с произвольной частотой Брента – Вяйсяля // Докл. АН СССР. 1983. Т. 271. № 3. С. 570–573.
4. *Гулд С.* Вариационные методы в задачах о собственных значениях. М.: Мир, 1970. 328 с.
5. *Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.
6. *Крылов Н.М.* Методы приближенного решения задач математической физики // Избр. труды. Т. 2. Киев: Изд-во АН УССР, 1961. С. 150–204.
7. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. Т. 1. М.; Л.: Гостехиздат, 1951. 476 с.
8. *Морс Ф.М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. Т. 1. 930 с.; 1960, Т. 2. 886 с.
9. *Akulenko L.D., Nesterov S.V.* Accelerated convergence method in the Sturm – Liouville problem // Rus. J. Math. Phys. 1995. V. 3. № 4. P. 517–521.
10. *Нестеров С.В., Акуленко Л.Д.* Эффективное решение задачи Штурма – Лиувилля // Докл. РАН. 1996. Т. 347. № 1. С. 44–46.
11. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.

Москва

Поступила в редакцию
25.IV.1996