

УДК 532.546.013.4:536.25

© 1997 г. Х.Г. МАГОМЕДБЕКОВ

СВОБОДНОКОНВЕКТИВНОЕ ТЕЧЕНИЕ БИНАРНОЙ СМЕСИ В ТОНКОМ ПОРИСТОМ КОЛЬЦЕ

Рассмотрена задача о свободной конвекции бинарной смеси в тонком пористом кольце. Получены стационарные решения задачи в упрощенной постановке. Исследована устойчивость этих решений и построена карта устойчивости на плоскости чисел Рэлея по температуре и концентрации. Показано, что при определенных условиях в кольце устанавливается автоколебательный режим конвекции. Установлено также, что имеется область изменения фильтрационного и диффузионно-фильтрационного чисел Рэлея, в которой устойчивы три стационарных решения.

Численные и экспериментальные исследования свободно-конвективных течений в кольцевом слое пористого материала показали [1] наличие в кольце двухъячеистых структур. В [2] исследованы термоконвективные движения в тонких замкнутых пористых контурах. Определены условия возникновения свободно-конвективного течения и показано, что устанавливается устойчивая циркуляция жидкости в контуре. В работе [3] рассмотрена естественная конвекция в тонком пористом кольце. На основе двумерных уравнений конвекции получено интегродифференциальное уравнение в нулевом приближении по малому параметру – относительной толщине кольца. Показано, что при определенных условиях в кольце устанавливается тангенциальный поток жидкости с небольшими вариациями скорости в радиальном направлении. Исследованию устойчивости бинарной смеси в пористой среде в различных упрощенных постановках посвящены работы [4–5]. В [6] проведен линейный анализ конвективной устойчивости бинарной смеси в горизонтальной пористой среде в полной постановке с учетом перекрестных кинетических и гравитационных эффектов.

1. Постановка задачи. Пусть пористое кольцо с внутренним радиусом R и толщиной пористого слоя h ($h \ll R$) расположено в вертикальной плоскости (фиг. 1).

Направим ось z по вектору ускорения свободного падения \mathbf{g} . Свободноконвективное течение бинарной смеси в пористой среде в приближении Дарси – Обербека – Буссинеска описывается системой уравнений [7]

$$\nabla \mathbf{u} = 0, \quad -\nabla P + \rho \mathbf{g} - \frac{\eta}{k} \mathbf{u} = 0$$

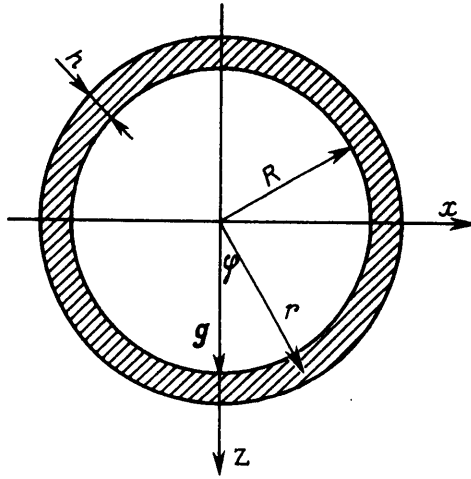
$$[m + (1 - m)\gamma] \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla T = \frac{DN}{c_p} \Delta C + \left[\chi + \alpha \frac{DN}{c_p} \right] \Delta T \quad (1.1)$$

$$m \frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla C = D \Delta C + \alpha \Delta T$$

$$\rho = \rho_0 [1 + \beta_T (T_0 - T) + \beta_C (C_0 - C)] \quad (1.2)$$

$$\{\mathbf{u}, P, T, C\}(r, \varphi, t) = \{\mathbf{u}, P, T, C\}(r, \varphi + 2\pi, t)$$

$$\alpha = \frac{k_T}{T}, \quad N = \left[k_T \left(\frac{\partial \mu}{\partial C} \right)_{P, T} \right]$$



Фиг. 1. Система координат и обозначения для пористого кольца

где $\mathbf{u} = (u_r, u_\varphi)$ – скорость фильтрации; P – давление в жидкой фазе; T – температура смеси; C – концентрация более легкого компонента в смеси; ρ и η – соответственно плотность и динамическая вязкость смеси; k , m и χ – соответственно проницаемость, пористость и температуропроводность среды; γ – отношение объемных теплоемкостей скелета пористой среды и смеси; D – коэффициент диффузии более легкого компонента; c_p – удельная теплоемкость смеси при постоянном давлении; ρ_0 – плотность смеси при температуре T_0 и концентрации C_0 ; β_T и β_C – соответственно термический и концентрационный коэффициенты объемного расширения смеси; k_T – термодиффузионное отношение [8]; μ – эффективный химический потенциал смеси [9]; (x, z) и (r, φ) – соответственно декартовы и полярные координаты, начало которых выбрано в центре кольца.

Все параметры, входящие в (1.1)–(1.2), берутся при средних значениях температуры T_0 и C_0 .

Аналогично тому, как это сделано в [10], можно показать, что необходимым условием механического равновесия смеси является линейная зависимость функции $\beta_T T^{(0)} + \beta_C C^{(0)}$ от вертикальной координаты z . Здесь $T^{(0)}$ и $C^{(0)}$ – соответственно равновесные распределения температуры и концентрации. Потребуем в дальнейшем, чтобы $\nabla T^{(0)}$, $\nabla C^{(0)}$ и \mathbf{g} были параллельными векторами. Тогда равновесию (режиму теплопроводности) соответствует линейное распределение температуры и квадратичное распределение давления в пористой среде [6]

$$T^{(0)} = T_0 + Az = T_0 + Ar \cos \varphi, \quad C^{(0)} = C_0 + Bz = C_0 + Br \cos \varphi$$

$$P^{(0)} = P_0 + \rho_0 g [1 - \frac{1}{2}(\beta_T A + \beta_C B)z]z = P_0 + \rho_0 g [1 - \frac{1}{2}(\beta_T A + \beta_C B)r \cos \varphi]r \cos \varphi$$

где A и B – соответственно градиенты температуры и концентрации.

Положим в дальнейшем, что условия на границах кольца совместимы с решением задачи для режима теплопроводности

$$T_{s,1} = T_0 + AR \cos \varphi, \quad T_{s,2} = T_0 + A(R+h) \cos \varphi \quad (1.3)$$

$$C_{s,1} = C_0 + AR \cos \varphi, \quad C_{s,2} = C_0 + A(R+h) \cos \varphi$$

Переформулируем задачу (1.1)–(1.3) в более удобной форме. Для этого представим

величины T , C и P в виде

$$T = T^{(0)} + T^{(1)}, \quad C = C^{(0)} + C^{(1)}, \quad P = P^{(0)} + P^{(1)} \quad (1.4)$$

где $T^{(1)}$, $C^{(1)}$ и $P^{(1)}$ – соответственно возмущения температуры, концентрации и давления в смеси.

Подставляя (1.4) в (1.1)–(1.2), учитывая (1.3), опуская верхний индекс (1) и переходя к безразмерным переменным, получаем

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{u} = 0, \quad \nabla P - (\text{Ra}_T T + \text{Ra}_C C) \mathbf{e}_z - \mathbf{u} = 0 \\ \gamma_1 \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \mathbf{e}_z + \mathbf{u} \nabla T = (1+a)\Delta T + \frac{a}{b} \Delta C \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} \text{Le} \frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{u} \mathbf{e}_z + \text{Le} \mathbf{u} \nabla C = \Delta C + b \Delta T \\ u_r = T = C = 0 \quad (r=1, \quad r=1+h) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Здесь использованы в качестве характерных масштабов длины – R , времени – mR^2/χ , скорости – χ/R , давления – $\eta\lambda/\rho_0 C_p k$, температуры – AR , концентрации – $BR\chi/D$; \mathbf{e}_z – единичный вектор, направленный по оси z .

Задача (1.5)–(1.6) содержит безразмерные параметры

$$\begin{aligned} \text{Ra}_T = \frac{g\beta_T k AR^2}{v\chi}, \quad \text{Ra}_C = \frac{g\beta_C k BR^2}{vD}, \quad \text{Le} = \frac{\text{Sc}}{\text{Pr}} = \frac{\chi}{D}, \quad \text{Pr} = \frac{\nu}{\chi} \\ \text{Sc} = \frac{\nu}{D}, \quad a = \frac{\alpha DN}{c_p \chi}, \quad b = \frac{\alpha AD}{B\chi}, \quad \gamma_1 = 1 + \frac{1-m}{m} \gamma \end{aligned}$$

Здесь, Ra_T и Ra_C – соответственно фильтрационное и диффузионно-фильтрационное числа Рэлея [6]; Le – число Льюиса; Sc – число Шмита; Pr – число Прандтля; a , b и γ_1 – параметры, характеризующие соответственно термодиффузию (эффект Соре), диффузионную теплопроводность (эффект Дюфура) [8] и отношение теплоемкостей пористой среды и смеси.

Таким образом, свободноконвективное течение бинарной смеси в пористой среде определяется шестью безразмерными параметрами: Ra_T , Ra_C , Le , a , b и γ_1 .

Воспользуемся теперь малостью относительной толщины пористого слоя ($h \ll 1$). Можно показать аналогично тому, как это сделано для однородной жидкости в [3], что свободная конвекция бинарной смеси в тонком пористом кольце в нулевом приближении по малому параметру описывается системой уравнений

$$\begin{aligned} \gamma_1 \frac{\partial T}{\partial t} - u_\varphi \sin \varphi + u_r \frac{\partial T}{\partial r} + u_\varphi \frac{\partial T}{\partial \varphi} = (1+a) \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{a}{b} \frac{\partial^2 C}{\partial r^2} \\ \text{Le} \frac{\partial C}{\partial t} - u_\varphi \sin \varphi + \text{Le} \left(u_r \frac{\partial C}{\partial r} + u_\varphi \frac{\partial C}{\partial \varphi} \right) = \frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + b \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \\ \Psi = \sin \varphi \left[\text{Ra}_T \int_1^{1+h} (T - \langle T \rangle) dr + \text{Ra}_C \int_1^{1+h} (C - \langle C \rangle) dr \right] + u(r-1) \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$u = \langle u_\varphi \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\text{Ra}_T \langle T \rangle + \text{Ra}_C \langle C \rangle] \sin \varphi d\varphi$$

$$\langle T \rangle = \frac{1}{h} \int_1^{1+h} T dr, \quad \langle C \rangle = \frac{1}{h} \int_1^{1+h} C dr, \quad u_\varphi = \frac{\partial \Psi}{\partial r}, \quad u_r = -\frac{\partial \Psi}{\partial \varphi}$$

где Ψ – функция тока, $\langle u_\varphi \rangle$, $\langle T \rangle$, $\langle C \rangle$ – соответственно средние по ширине кольца

тангенциальная скорость фильтрации, температура пористого слоя и концентрация более легкой компоненты. Здесь и далее значок $\langle \cdot \rangle$ означает усреднение по ширине кольца.

Используя уравнение неразрывности $(\partial u_r / \partial r) + (\partial u_\phi / \partial r) = 0$ для тонкого кольца [3], перепишем первые два уравнения в (1.7) в виде

$$\gamma_1 \frac{\partial T}{\partial t} - u_\phi \sin \phi + \frac{\partial(u_r T)}{\partial r} + \frac{\partial(u_\phi T)}{\partial \phi} = (1+a) \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{a}{b} \frac{\partial^2 C}{\partial r^2} \quad (1.8)$$

$$\text{Le} \frac{\partial C}{\partial t} - u_\phi \sin \phi + \text{Le} \left(\frac{\partial(u_r C)}{\partial r} + \frac{\partial(u_\phi C)}{\partial \phi} \right) = \frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + b \frac{\partial^2 T}{\partial r^2}$$

Усредняя эти уравнения по ширине кольца и учитывая, что на границах кольца $u_r = 0$, получаем

$$\gamma_1 \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial t} - u_\phi \sin \phi + \frac{\partial \langle u_\phi T \rangle}{\partial \phi} = \frac{(1+a)}{h} \left[\frac{\partial T}{\partial r} \right] + \frac{a}{bh} \left[\frac{\partial C}{\partial r} \right] \quad (1.9)$$

$$\text{Le} \frac{\partial \langle C \rangle}{\partial t} - u_\phi \sin \phi + \text{Le} \frac{\partial \langle u_\phi C \rangle}{\partial \phi} = \frac{b}{h} \left[\frac{\partial T}{\partial r} \right] + \frac{1}{h} \left[\frac{\partial C}{\partial r} \right]$$

$$\left[\frac{\partial T}{\partial r} \right] = \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=1+h} - \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=1}, \quad \left[\frac{\partial C}{\partial r} \right] = \frac{\partial C}{\partial r} \Big|_{r=1+h} - \frac{\partial C}{\partial r} \Big|_{r=1}$$

Пусть тепло- и массообмен с границами кольца задаются формулами

$$\left[\frac{\partial T}{\partial r} \right] = -\frac{K_T}{h} \langle T \rangle, \quad \left[\frac{\partial C}{\partial r} \right] = -\frac{K_C}{h} \langle C \rangle$$

где K_T и K_C – безразмерные коэффициенты теплоотдачи и массоотдачи [11] соответственно. В рамках предположений работы [3] положим также, что

$$\langle u_\phi T \rangle \approx \langle u_\phi \rangle \langle T \rangle = u \langle T \rangle, \quad \langle u_\phi C \rangle \approx \langle u_\phi \rangle \langle C \rangle = u \langle C \rangle$$

Тогда задачу для конвективного движения бинарной смеси в тонком пористом кольце запишем в виде

$$u = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\text{Ra}_T \langle T \rangle + \text{Ra}_C \langle C \rangle] \sin \phi \, d\phi$$

$$\gamma_1 \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial t} - u \sin \phi + u \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial \phi} = -(1+a) K'_T \langle T \rangle - \frac{a}{b} K'_C \langle C \rangle, \quad K'_T = \frac{K_T}{h^2} \quad (1.10)$$

$$\text{Le} \frac{\partial \langle C \rangle}{\partial t} - u \sin \phi + \text{Le} u \frac{\partial \langle C \rangle}{\partial \phi} = -b K'_T \langle T \rangle - K'_C \langle C \rangle, \quad K'_C = \frac{K_C}{h^2}$$

Необходимо найти периодическое по ϕ решение нелинейной задачи (1.10).

2. Линейный анализ конвективной устойчивости механического равновесия. Линеаризуя (1.10) около положения равновесия, имеем

$$\gamma_1 \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial t} - \frac{1}{2\pi} \sin \phi \int_0^{2\pi} (\text{Ra}_T \langle T \rangle + \text{Ra}_C \langle C \rangle) \sin \phi \, d\phi = -(1+a) K'_T \langle T \rangle - \frac{a}{b} K'_C \langle C \rangle \quad (2.1)$$

$$\text{Le} \frac{\partial \langle C \rangle}{\partial t} - \frac{1}{2\pi} \sin \phi \int_0^{2\pi} (\text{Ra}_T \langle T \rangle + \text{Ra}_C \langle C \rangle) \sin \phi \, d\phi = -b K'_T \langle T \rangle - K'_C \langle C \rangle$$

Система (2.1) имеет экспоненциальные решения вида $\langle T \rangle = \theta(\phi) \exp(\sigma t)$, $\langle C \rangle =$

$= \xi(\varphi) \exp(\sigma t)$. Подставляя эти решения в (2.1), получим однородную систему линейных уравнений относительно $\theta(\varphi)$ и $\xi(\varphi)$

$$[\gamma_1 \sigma - \frac{1}{2} Ra_T + (1+a)K'_T] \theta(\varphi) + [-\frac{1}{2} Ra_C + (a/b)K'_C] \xi(\varphi) = 0 \quad (2.2)$$

$$[-\frac{1}{2} Ra_T + bK'_T] \theta(\varphi) + [Le \sigma - \frac{1}{2} Ra_C + K'_C] \xi(\varphi) = 0$$

Условие разрешимости этой системы дает характеристическое уравнение

$$\sigma^2 + Q\sigma + R = 0 \quad (2.3)$$

$$Q = \frac{1}{Le} \left(K'_C - \frac{1}{2} Ra_C \right) + \frac{1}{\gamma_1} \left[(1+a)K'_T - \frac{1}{2} Ra_T \right]$$

$$R = \frac{1}{Le \gamma_1} \left[\frac{1}{2} Ra_T K'_C \left(\frac{a}{b} - 1 \right) + \frac{1}{2} Ra_C K'_T (b - a - 1) + K'_T K'_C \right]$$

В зависимости от значения коэффициентов уравнение (2.3) дает либо два вещественных корня (монотонные возмущения, $D_0 = Q^2 - 4R \geq 0$), либо два комплексно-сопряженных корня (колебательные возмущения, $D_0 = Q^2 - 4R < 0$).

Легко видеть, что на плоскости (Ra_T, Ra_C) линии, разделяющие области затухающих и нарастающих возмущений (в том числе и колебательных), описываются уравнениями $R = 0$, $Q = 0$, $D_0 = 0$. При этом парабола $D_0 = 0$ касается прямой $R = 0$ в точке пересечения последней с прямой $Q = 0$. Причем прямая $Q = 0$ параллельна оси параболы.

Рассмотрим простейший случай, когда перекрестные эффекты равны нулю: $a = b = 0$. Нейтральные линии, рассчитанные при $\gamma_1 = 4$, $Le = 2$, $K'_T = 2$, $K'_C = 2$, изображены на фиг. 2.

В области изменения параметров Ra_T и Ra_C , которая расположена внутри угла, образованного пересечением линий $R = 0$ и $Q = 0$ (угол EKP , фиг. 2), любые малые возмущения механического равновесия затухают. Область EKF , расположенная между прямой $Q = 0$ и дискриминантной линией $D_0 = 0$, представляет собой область колебательной неустойчивости. В области, расположенной выше линии FKP , наблюдается неустойчивость равновесия относительно монотонных возмущений.

Эти результаты согласуются с аналогичными, приведенными в [6].

3. Стационарная конвекция бинарной смеси. Разложим $\langle T \rangle$ и $\langle C \rangle$ в ряды Фурье по φ

$$\langle T \rangle = w_0(t) + \sum [w_n(t) \cos n\varphi + v_n(t) \sin n\varphi], \quad \langle C \rangle = r_0(t) + \sum [r_n(t) \cos n\varphi + s_n(t) \sin n\varphi] \quad (3.1)$$

Подставляя (3.1) в (1.10) и разрешая эти уравнения относительно коэффициентов, получим бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

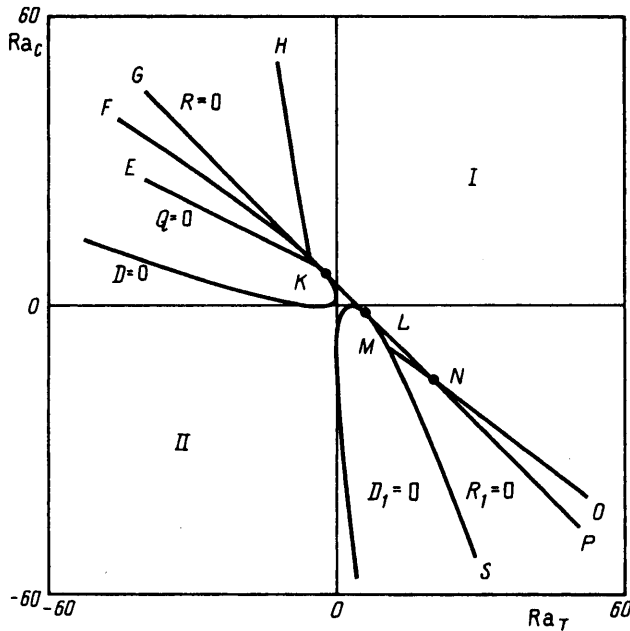
$$u(t) = \frac{1}{2} (Ra_T v_1 + Ra_C s_1) \quad (3.2)$$

$$\frac{dw_0}{dt} = -\frac{1}{\gamma_1} \left[(1+a)K'_T w_0 + \frac{a}{b} K'_C r_0 \right] \quad (n=0) \quad (3.3)$$

$$\frac{dw_0}{dt} = -\frac{1}{Le} [bK'_T w_0 + K'_C r_0], \quad \frac{dw_n}{dt} = -\frac{1}{\gamma_1} \left[(1+a)K'_T w_n + nuv_n + \frac{a}{b} K'_C r_n \right]$$

$$\frac{dv_n}{dt} = -\frac{1}{\gamma_1} \left[-u\delta_{n1} - nuw_n + (1+a)K'_T v_n + \frac{a}{b} K'_C s_n \right] \quad (n \geq 1) \quad (3.4)$$

$$\frac{dr_n}{dt} = -\frac{1}{Le} [bK'_T w_n + K'_C r_n + Le nus_n], \quad \frac{ds_n}{dt} = -\frac{1}{Le} [bK'_T v_n - u\delta_{n1} - u Le nr_n + K'_C s_n]$$



Фиг. 2. Карта гидродинамических режимов на плоскости параметров (Ra_T, Ra_C) : I – область устойчивой стационарной конвекции; II – область механического равновесия

Скорость циркуляции фигурирует в (3.3)–(3.4) как зависящий от времени параметр. Ее можно найти из совместного решения системы уравнений (3.2) и (3.4) при $n = 1$. В этом смысле конвекция определяется коэффициентами рядов Фурье с $n = 1$.

Стационарное решение $x^\circ = (w_1^\circ, v_1^\circ, r_1^\circ, s_1^\circ)$ задачи (1.10) (коэффициенты Фурье с $n > 1$ обращаются в нуль) определяется из решения системы алгебраических уравнений, полученных приравнением нулю правых частей системы (3.4) при $n = 1$ и уравнения (3.2) при условии, что скорость фильтрации u_0 известна. Имеем

$$w_1^\circ = -1 + \frac{(1+a)K_T'}{u_0} v_1^\circ + \frac{a K_C'}{b u_0} s_1^\circ$$

$$v_1^\circ = \frac{u_0}{\Delta} \left\{ K_T' K_C'^2 \left(1 - \frac{a}{b}\right) + Le u_0^2 \left[(1+a) K_T' Le + \frac{a}{b} K_C' \right] \right\}$$

$$w_1^\circ = \frac{1}{Le} \left(-1 + \frac{K_T'}{u_0} s_1^\circ + b \frac{K_C'}{u_0} v_1^\circ \right), \quad s_1^\circ = \frac{u_0}{\Delta} \left\{ K_T'^2 K_C' (1+a-b) + u_0^2 [b K_T' Le + K_C'] \right\} \quad (3.5)$$

$$\Delta = K_T'^2 K_C'^2 + [(1+a)^2 K_T'^2 Le^2 + K_C'^2 + 2a K_T' K_C' Le] u_0^2 + Le u_0^4$$

Подставляя в (3.2) v_1°, s_1° из (3.5) получим:

$$u_0(u_0^4 + Q_1 u_0^2 + R_1) = 0 \quad (3.6)$$

$$Q_1 = \frac{1}{Le} \left\{ 2a K_T' K_C' + Le(1+a)^2 K_T'^2 + \frac{1}{Le} K_C'^2 - \frac{1}{2} Ra_T \left[Le(1+a) K_T' + \frac{a}{b} K_C' \right] - \frac{1}{2} Ra_C \left[b K_T' + \frac{1}{Le} K_C' \right] \right\} \quad (3.7)$$

$$R_1 \equiv \frac{\gamma_1 K_T' K_C'}{Le} R = \frac{K_T' K_C'}{Le^2} \left[K_T' K_C' - \frac{1}{2} Ra_T \left(1 - \frac{a}{b} \right) - \frac{1}{2} Ra_C (1 + a - b) \right]$$

В общем случае уравнение (3.6) имеет пять корней. Нулевой $u_0 = 0$ соответствует механическому равновесию смеси, а четыре других попарно симметричны

$$u_0 = \pm \sqrt{0,5(-Q_1 + \sqrt{D_1})}, \quad D_1 = Q_1^2 - 4R_1 \quad (3.8)$$

$$u_0 = \pm \sqrt{0,5(-Q_1 - \sqrt{D_1})} \quad (3.9)$$

Проследим за решениями (3.6), (3.8)–(3.9) на плоскости параметров (Ra_T, Ra_C) . Линии, разграничивающие на этой плоскости области, в которых существует различное число решений, описываются условиями: $R_1 = 0, D_1 = 0$.

На фиг. 2 изображены линии бифуркации, рассчитанные, как и ранее, при значениях параметров $a = 0, b = 0, Le = 2, \gamma_1 = 4, K_T' = 2, K_C' = 2$. Различаются три характерные области изменения параметров Ra_T и Ra_C . Выше линии GP (фиг. 2), т.е. в области $R_1 < 0, (\sqrt{D_1} < |Q_1|)$, существуют два ненулевых стационарных решения, соответствующих движению смеси в двух противоположных направлениях. В области, расположенной между лучом LP и дискриминантной линией $D_1 = 0$ (линия LS , фиг. 2), существуют четыре ненулевых решения ($\sqrt{D_1} > |Q_1|$). Два из них соответствуют течению смеси по часовой стрелке, а другие два – течению против часовой стрелки. Наконец, в области, расположенной ниже луча GL и части дискриминантной линии LS , нет стационарных нетривиальных решений, так как в этом случае подкоренное выражение в (3.8) меньше нуля, а скорость фильтрации должна быть вещественной величиной.

4. Устойчивость стационарных решений и колебательный режим конвекции.

Исследуем устойчивость стационарных решений (3.5), (3.8)–(3.9). Линеаризуем систему (3.4) (при $n = 1$) относительно x° , получаем уравнения, описывающие эволюцию малых возмущений $\delta x = x(t) - x^\circ$

$$\frac{d(\delta x)}{dt} = A(x^\circ) \delta x \quad (4.1)$$

где A – матрица линеаризации.

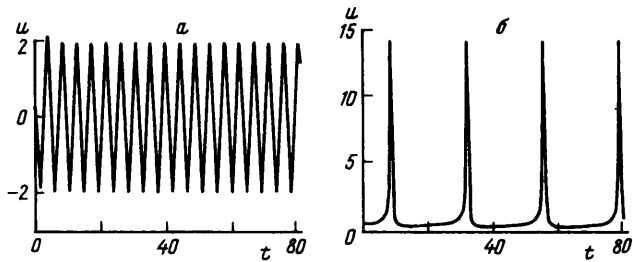
Стационарное решение x° асимптотически устойчиво, если все собственные значения матрицы A имеют отрицательные вещественные части, и неустойчиво, если хотя бы одно из них имеет положительную вещественную часть [12].

Границы областей устойчивости стационарных решений, определенные из условия равенства нулю наибольшей вещественной части собственных значений, представлены на фиг. 2 (линии NK и MO). Программа расчета собственных значений была заимствована из [13].

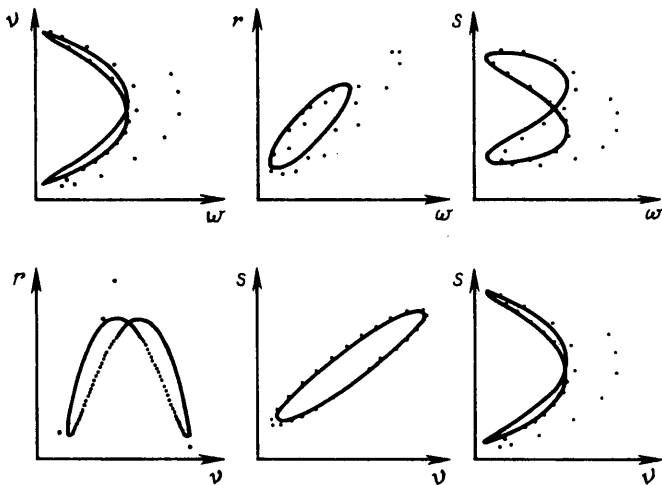
Результаты расчетов показывают, что стационарные решения (3.5), (3.8) устойчивы внутри области $NKLMNO$ (фиг. 2) и неустойчивы за ее пределами.

Линия MO соответствует стационарным решениям (3.8). Другие решения (3.9) во всей области их существования (угол PLS , фиг. 2) неустойчивы (вещественные части всех собственных значений меньше нуля).

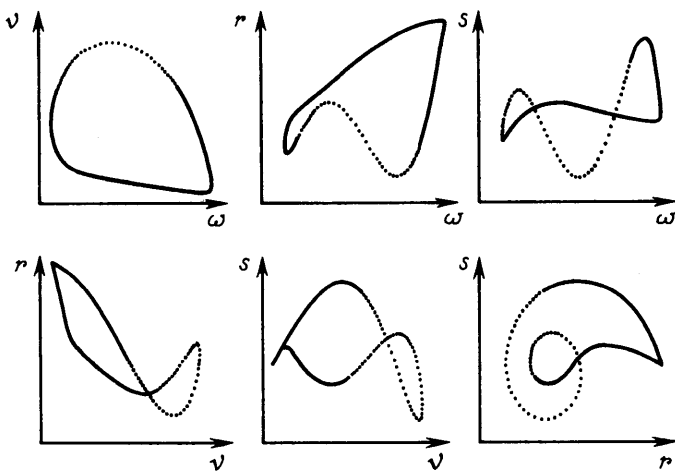
Из приведенного обсуждения неясно, каким образом ведет себя рассматриваемая система в областях изменения параметров Ra_T и Ra_C , в которых стационарные решения (3.5), (3.8) и $u_0 = 0$ неустойчивы (области внутри углов EKN и OMS , фиг. 2). Ответ на этот вопрос можно получить путем численного решения системы нелинейных уравнений (3.2), (3.4) при $n = 1$, поскольку, как отмечалось ранее, скорость фильтрации $u(t)$ определяется коэффициентами рядов Фурье с $n = 1$. С ука-



Фиг. 3. График зависимости скорости движения смеси от времени: *a* – $Ra_T = -24$, $Ra_C = 25$; *б* – $Ra_T = 30$, $Ra_C = -24$



Фиг. 4. Проекция на координатные плоскости фазового пространства множества точек Пуанкаре: $Ra_T = -24$, $Ra_C = 25$



Фиг. 5. Проекция на координатные плоскости фазового пространства множества точек Пуанкаре: $Ra_T = 30$, $Ra_C = -24$

занной целью использована программа, основанная на методе экстраполяции с переменным порядком и переменной длиной шага [14]. Расчеты показали, что внутри области EKN наблюдаются устойчивые колебания смеси около положения равновесия.

На фиг. 3, *a* приведен график $u(t)$, рассчитанный при $Ra_T = -24$ и $Ra_C = 25$ (остальные параметры те же, что и ранее). На фиг. 4 изображены проекции множества точек отображений Пуанкаре [9] (возникающих при пересечении некоторых гиперповерхностей фазовыми кривыми системы (3.4)) на координатные плоскости фазового пространства (w, v, r, s). Эти данные свидетельствуют о том, что полученное решение – периодическое по времени.

В исследуемой системе возникают автоколебания с двумя близкими частотами. Это вытекает как из сечений Пуанкаре (точки отображения образуют семейство регулярных замкнутых линий), так и из спектрального анализа временной последовательности, изображенной на фиг. 3, *a* (периоды колебаний составляют соответственно 4,10 и 4,43).

Таким образом, при пересечении линий EK и NK в сторону области EKN (фиг. 2) происходит бифуркация соответственно от механического равновесия или стационарного течения к колебательному режиму конвекции (около положения равновесия).

Аналогичная перестройка течений наблюдается и в области ONP . На фиг. 3, *b* представлена временная зависимость скорости фильтрации ($Ra_T = 30$ и $Ra_C = -24$), а на фиг. 5 – соответствующие отображения Пуанкаре. Эти данные подтверждают колебательный характер течения смеси. Однако здесь в отличие от первого случая наблюдается ее преимущественное течение в одном из возможных направлений с периодически изменяющейся во времени скоростью ("односторонние" колебания).

Особо следует отметить треугольную область LMN , в которой решение задачи асимптотически приближается либо к стационарным решениям, определяемым формулами (3.5)–(3.8), либо к нулевому – $u_0 = 0$. Решения (3.9) во всей области существования (внутри угла PLS) неустойчивы. Природа и проявление термоконвективной неустойчивости определяются тем, какой из этих факторов оказывает стабилизирующее влияние, а какой – дестабилизирующее.

Рассмотрим, что происходит при смещении элемента смеси по кольцу вверх. Если концентрация легкого компонента – дестабилизирующий фактор, т.е. происходит обогащение смеси в нижней части кольца (за счет массообмена со стенками) и обеднение ею в верхней части, то смещающаяся вверх частица сравнительно быстро приобретает концентрацию, близкую к той, которая поддерживается на границах кольца. Однако частица, оставаясь более тяжелой из-за более низкой температуры, возвращается к исходному состоянию и "проскакивает" его. Здесь на нее действует сила, направленная в обратную сторону, и частица начинает колебаться около положения равновесия.

Несколько иное течение смеси наблюдается в случае дестабилизирующего температурного поля. Здесь, если частица жидкости смещается вверх, силы плавучести заставляют ее двигаться дальше в направлении смещения. Обогащение смеси в верхней части кольца более легкой компонентой приводит к замедлению движения частицы. Но она не может полностью остановить течение. В результате в кольце устанавливается движение смеси (в одном из возможных направлений) с периодически изменяющейся во времени скоростью. В последнем случае, кроме того, существует область изменения параметров Ra_T и Ra_C , в которой смесь находится (в зависимости от предыстории) либо в состоянии механического равновесия, либо в состоянии стационарного конвективного движения.

Учет перекрестных эффектов приводит к изменению взаимного расположения линий нейтральных возмущений (бифуркаций) на карте устойчивости (фиг. 2) и усложняет картину течений.

Заключение. Решена нелинейная задача о свободной конвекции бинарной смеси в тонком пористом кольце. Получены стационарные решения задачи в упрощенной постановке. Исследована устойчивость этих решений и построена карта устойчивости на плоскости чисел Рэлея по температуре и концентрации. Показано, что плоскость параметров (Ra_T, Ra_C) разбивается на ряд областей, в которых устойчивы: тривиальное решение, соответствующее механическому равновесию смеси; ненулевые решения, ответственные за стационарную циркуляцию жидкости; периодические по времени решения, соответствующие автоколебательному режиму конвекции. Имеется область изменения Ra_T, Ra_C , в которой устойчивы три стационарные решения. Одно из этих решений тривиальное, другие два соответствуют стационарному движению смеси в двух возможных направлениях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Charrier-Mojtabi M.C., Mojtabi A., Azaiez M., Labrosse G. Numerical and experimental study of multicellular free convection flows in an annular porous layer // Intern. J. Heat and Mass Transfer. 1991. V. 34. № 12. P. 3061–3074.
2. Магомедбеков Х.Г., Гайдаров Г.М., Осман-Заде Ш.С. Гидротермальная конвекция в разломных зонах // Геотермия. М.: Наука, 1991. Вып. 1. С. 113–117.
3. Магомедбеков Х.Г., Рамазанов М.М. Гидротермальная конвекция в тонком пористом кольце // Изв. РАН МЖГ. 1994. № 6. С. 4–8.
4. Taslim M.E., Narusawa U. Binary fluid convection and double-diffusive convection in porous medium // Trans. ASME. J. Heat and Mass Transfer. 1986. V. 108. № 1. P. 221–223.
5. Nield D.A. Onset of thermohaline convection in a porous medium // Water Resources Res. 1968. V. 4. № 3. P. 553–560.
6. Бедриковецкий П.Г., Полонский Д.Г., Шапиро А.А. Анализ конвективной неустойчивости бинарной смеси в пористой среде // Изв. РАН МЖГ. 1993. № 1. С. 110–119.
7. Джозеф Д. Устойчивость движений жидкости. М.: Мир, 1981. 638 с.
8. Цянь Сюэсень. Физическая механика. М.: Мир, 1965, 544 с.
9. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
10. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
11. Исаченко В.П., Осипова В.А., Сукомел А.С. Теплопередача. М.: Энергия, 1969. 439 с.
12. Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Введение в теорию нелинейных колебаний. М.: Наука, 1987. 384 с.
13. Уилкинсон Дж.Х., Райни С. Справочник алгоритмов на языке АЛГОЛ. Линейная алгебра. М.: Машиностроение, 1976. 390 с.
14. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990. 512 с.

Махачкала

Поступила в редакцию
18.IV.1996