

УДК 532.5:517.31

© 1997 г. Э.Н. БЕРЕСЛАВСКИЙ, П.Я. КОЧИНА

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ КЛАССА ФУКСА, ВСТРЕЧАЮЩИХСЯ В НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ

Работа является продолжением [1, 2]. Рассматриваются дифференциальные уравнения класса Фукса, связанные с задачей о конформном отображении круговых многоугольников в полярных сетках [3], т.е. ограниченных дугами концентрических окружностей и отрезками прямых, проходящих через начало координат. Подобные области весьма часто встречаются в задачах гидро- и аэромеханики, теории фильтрации, теории струй, газовой динамики и др. [4–9]. В отличие от известного и традиционного подхода, сводящего дело к применению формулы Кристоффеля – Шварца [3], ниже предлагается воспользоваться общей теорией построения отображающих функций на основе решений соответствующих уравнений класса Фукса [4, 5]. Это приводит к существенному сокращению общего числа возникающих неизвестных параметров конформного отображения и позволяет получать решения в замкнутой форме через специальные, а в ряде случаев через элементарные функции.

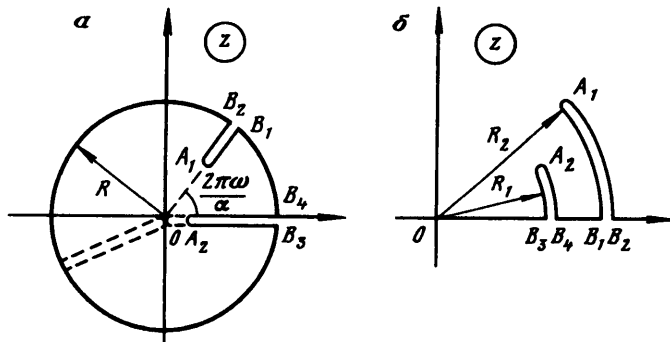
Согласно общепринятому методу [3, с. 175], круговые многоугольники в полярных сетках посредством функции $w = \ln z$ преобразуются в прямолинейные с последующим применением формулы Кристоффеля – Шварца. В последнее время это направление получило дальнейшее развитие в [10–12], где рассматривается широкий круг областей, характерных для задач теории фильтрации.

Однако при использовании преобразования $w = \ln z$ возникают определенные трудности. Во-первых, приходится учитывать каждый раз расположение относительно отображаемой области (внутри или на ее границе) точек ветвления $z = 0$ и $z = \infty$ логарифма, в которых нарушается конформность отображения. Так, если точка $z = 0$ лежит внутри области, то, для того чтобы сделать отображение однозначным, следует провести разрез от этой точки до границы области. Это увеличивает число параметров конформного отображения. Например, в случае кругового шестиугольника с прямыми углами и двумя разрезами $\{\pi/2, 2\pi, \pi/2, \pi/2, 2\pi, \pi/2\}$ (фиг. 1,а) (здесь и ниже терминология и запись, принятые в [3]) задача сводится к отображению прямолинейного девятиугольника, что увеличивает число параметров на три.

Если же точка $z = 0$ принадлежит границе отображаемой области (например, в случае шестиугольника $\{\pi/2, 2\pi, \pi/2, \pi/2, 2\pi, \pi/2\}$) (фиг. 1,б), то этой граничной точке при отображении $w(z)$ будет соответствовать в плоскости w дополнительная вершина на бесконечности с нулевым углом; так что число параметров увеличивается на единицу.

Таким образом, в любом случае использование при решении функции $w = \ln z$ ведет к увеличению числа параметров конформного отображения. Последнее, добавляя соответствующее количество множителей в формуле Кристоффеля – Шварца [3, с. 177], приводит к весьма громоздким вычислениям и, как следствие, к неберущимся интегралам.

В отличие от традиционного подхода ниже предлагается воспользоваться специальными методами, приспособленными именно к рассматриваемому классу областей, которые основаны на построении отображающих функций на базе решений



Фиг. 1. Круговые шестиугольники $\{\pi/2, 2\pi, \pi/2, \pi/2, 2\pi, \pi/2\}$

соответствующих уравнений класса Фукса [4, 5, 13–19]. Разработанная методика опирается на идею нахождения частных решений уравнений в виде линейных комбинаций с неопределенными коэффициентами из известных частных решений некоторых более простых уравнений с тремя особыми точками [1, 2, 20–22]. При этом все неизвестные параметры конформного отображения определяются в ходе построения частных решений и в дальнейшем проблема так называемых аксессуарных параметров [3, 23] не возникает. Не требуется здесь также и проведения дополнительных разрезов, что в конечном счете и приводит к существенному сокращению числа искомых параметров отображения.

Учет характерных особенностей рассматриваемого класса многоугольников позволяет представить решения через специальные, а в ряде случаев через элементарные функции, что делает их использование наиболее простым и удобным. Наконец, по сравнению с известными работами, где встречаются в основном уравнения класса Фукса с тремя-четырьмя особыми точками, предлагаемый метод позволяет подобным образом эффективно рассмотреть уравнения с большим числом особых точек (пятью-восемью) и полученные результаты применить для решения задачи о конформном отображении областей более сложной структуры: круговых пятиугольников-восьмиугольников с одним-двумя произвольными углами. При этом используется прием сглаживания или разворачивания углов в начале [24].

1. Дифференциальные уравнения класса Фукса с пятью особыми точками. Пусть в плоскости z задан круговой четырехугольник $\{\pi/2, \pi\alpha/\beta, 2\pi, \pi/2\}$ с произвольным углом $\pi\alpha/\beta$ ($0 < \alpha/\beta < 1$) при вершине B_2 (фиг. 2,а). Дифференциальное уравнение класса Фукса, соответствующее задаче о конформном отображении верхней полуплоскости ζ (фиг. 3,а) на рассматриваемую область, имеет вид [3–5]

$$Y'' + \left(\frac{1}{2\zeta} + \frac{1-v}{\zeta-1} - \frac{1}{\zeta-a_1} \right) Y' + \frac{1/4 v(1+v)\zeta + \lambda_0}{\zeta(\zeta-1)(\zeta-a_1)} Y = 0, \quad v = \frac{\alpha}{\beta} \quad (1.1)$$

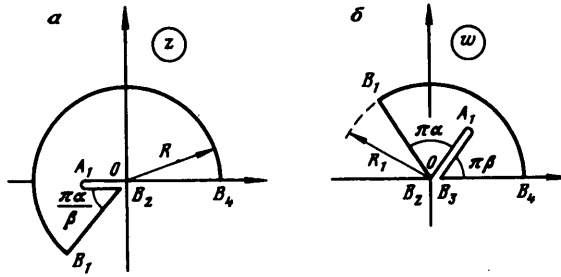
В уравнении (1.1) прообраз a_1 ($1 < a_1 < \infty$) вершины разреза A_1 , а также аксессуарный параметр λ_0 остаются при постановке задачи неизвестными и должны быть определены в ходе ее решения.

Замена переменных $\zeta = \text{th}^2 t$ преобразует уравнение (1.1) к виду

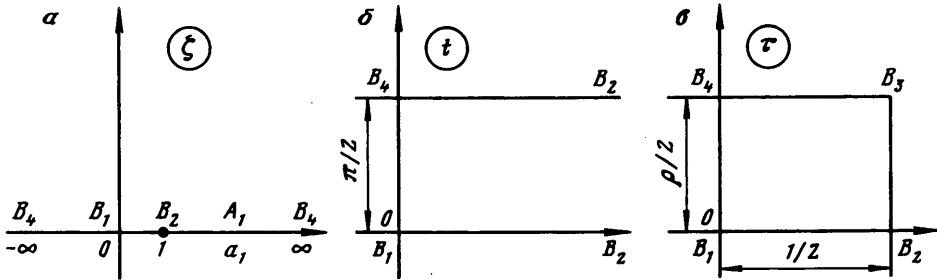
$$[(a_1 - 1)\text{sh}^2 t + a_1] \text{ch}^2 t Y'' + [v(a_1 - 1)\text{sh}^2 t + 1 + va_1] \text{sh} 2t Y' + [(v^2 + v + \lambda_0)\text{sh}^2 t + \lambda_0] Y = 0 \quad (1.2)$$

а верхнюю полуплоскость ζ переводит в полуполосу плоскости t (фиг. 3,б).

В работах [1, 2, 20–22] построены линейно независимые интегралы уравнения (1.2) в форме линейных комбинаций с неопределенными коэффициентами из известных



Фиг. 2. а – круговой четырехугольник $\{\pi/2, \pi\alpha/\beta, 2\pi, \pi/2\}$, б – круговой пятиугольник $\{\pi/2, \pi\alpha, 2\pi, \pi\beta, \pi/2\}$



Фиг. 3. Области вспомогательной параметрической переменной

частных решений более простого – гипергеометрического уравнения [3–5], которые в данном случае принимают вид

$$Y_1 = (C_1 \operatorname{ch} t \operatorname{ch} vt + C_2 \operatorname{sh} t \operatorname{sh} vt) \operatorname{ch}^{-(1+v)} t \quad (1.3)$$

$$Y_2 = (C_1 \operatorname{ch} t \operatorname{sh} vt + C_2 \operatorname{sh} t \operatorname{ch} vt) \operatorname{ch}^{-(1+v)} t$$

где C_1 и C_2 – некоторые постоянные, подлежащие определению. Для отображающей функции z , которая должна выражаться через отношение линейных комбинаций интегралов Y_1 и Y_2 , получаем

$$z = R \frac{C - \operatorname{th} t}{C + \operatorname{th} t} \exp[\pi(1+v)i - 2vt] \quad (1.4)$$

где R – постоянная, $C = C_1/C_2 > 0$. При этом оказывается, что искомые параметры конформного отображения связаны между собой уравнением

$$\lambda_0^2 + 2\lambda_0[a_1(v^2 - v - 1) + 1] + a_1v(1+v)[a_1(1-v)(2-v) - 2] = 0 \quad (1.5)$$

которое совпадает с условием для конца разреза [4, с. 255].

Разрешая (1.5) относительно λ_0 , получим

$$\lambda_0 = -[1 + (v^2 - v - 1)a_1] \pm \sqrt{(a_1 - 1)^2 + 2v^2a_1(a_1 + 2)} \quad (1.6)$$

Подкоренное выражение в формуле (1.6) всегда положительно, кроме случая $v = 0$, $a_1 = 1$, $\lambda_0 = 0$. Кривая (1.6) – гипербола, λ_0 – двузначная функция a_1 (угол πv предполагается заданным).

Для констант отображения получаем

$$a_1 = \frac{(\beta + \alpha C)C}{\alpha + \beta C}, \quad \lambda_0 = \frac{\alpha(\beta + \alpha C)(\beta C - \alpha C - 2\beta)}{\beta^2(\alpha + \beta C)} \quad (1.7)$$

Требование соответствия для вершины разреза A_1 позволяет определить оставшуюся до сих пор неизвестной постоянную C . Справедливость выражения (1.4) при выполнении соотношения (1.5) устанавливается непосредственной проверкой.

Таким образом, параметр C дает однозначные представления переменных a_1 и λ_0 . При этом C – линейная функция отношения λ_0/a_1 , имеющая в силу (1.7) вид

$$C = \frac{2\alpha\beta}{\alpha\beta - \alpha^2 - \beta^2\lambda_0/a_1} = \frac{2\beta/\alpha}{(\beta/\alpha) - 1 - (\beta/\alpha)^2\lambda_0/a_1}$$

Применим преобразование, переводящее исходную область в круговой пятиугольник $\{\pi/2, \pi\alpha, 2\pi, \pi\beta, \pi/2\}$ с произвольными углами $\pi\alpha$ и $\pi\beta$ при вершинах B_2 и B_3 , падающих в начало координат (фиг. 2,б)

$$w = R_1 \left(\frac{C - th t}{C + th t} \right)^\beta \exp[\pi(1 + \beta)i - 2\alpha t], \quad R_1 = R^\beta \quad (1.8)$$

Уравнение класса Фукса с пятью особыми точками, отвечающее задаче о конформном отображении верхней полуплоскости ζ на полученный многоугольник (фиг. 2,б), имеет вид

$$Y'' + \left(\frac{1}{2\zeta} + \frac{1-\alpha}{\zeta-1} - \frac{1}{\zeta-a_1} + \frac{1-\beta}{\zeta-c} \right) Y' - \frac{1/4(\alpha+\beta)(1-\alpha-\beta)\zeta^2 + \lambda_1\zeta + \lambda_0}{\zeta(\zeta-1)(\zeta-a_1)(\zeta-c)} Y = 0 \quad (1.9)$$

где точка $\zeta = c$ ($a_1 < c < \infty$), соответствующая вершине B_3 , параметры λ_0 и λ_1 пока не определены.

С помощью формулы Остроградского – Лиувилля [23, с. 207]

$$\left(\frac{Y_2}{Y_1} \right)' = C_1 Y_1^{-2} \exp \left[- \int_0^t p(t) dt \right] \quad (1.10)$$

где $C_1 = \text{const}$, $p(t)$ – коэффициент при Y' в уравнении (1.9), из выражения для отображающей функции (1.8) найдем два линейно независимых интеграла уравнения (1.9)

$$Y_{1,2} = (C \pm th t)^\beta \text{ch}^{-\alpha} t \exp(\pm \alpha t) \quad (1.11)$$

$$a_1 = \frac{(\beta + \alpha C)C}{\alpha + \beta C}, \quad c = C^2$$

2. Дифференциальные уравнения класса Фукса с шестью и восемью особыми точками. Вновь обратимся к шестиугольникам $\{\pi/2, 2\pi, \pi/2, \pi/2, 2\pi, \pi/2\}$, изображенным на фиг. 1. Любой треугольник-шестиугольник в полярных сетках может быть вложен в один из двух данных в зависимости от взаимного расположения разрезов $B_1A_1B_2$ и $B_3A_2B_4$ – пересекаются они или не имеют общих точек при продолжении [25]. Иными словами, сведен к одной из двух областей фиг. 1 с помощью цепочки дробно-линейных преобразований или же получается из них при вырождении разрезов.

Дифференциальное уравнение класса Фукса, соответствующее задаче о конформном отображении верхней полуплоскости ζ на исходные круговые шестиугольники, имеет вид [3–5]

$$Y'' + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{\zeta-1} + \frac{1}{\zeta-k^{-2}} \right) - \left(\frac{1}{\zeta-a_1} + \frac{1}{\zeta-a_2} \right) \right] Y' + \frac{1/2 \zeta^3 + \lambda_2 \zeta^2 + \lambda_1 \zeta + \lambda_0}{\zeta(\zeta-1)(\zeta-k^{-2})(\zeta-a_1)(\zeta-a_2)} Y = 0 \quad (2.1)$$

При этом считается, что вершина B_3 переходит в точку $\zeta = k^{-2}$ ($0 < k < 1$) вещественной оси плоскости ζ (фиг. 3,а). В уравнении (2.1) прообразы a_1 ($0 < a_1 < 1$) и a_2 ($k^{-2} < a_2 < \infty$) вершин разрезов A_1 и A_2 , а также параметры λ_2 , λ_1 и λ_0 неизвестны.

Замена переменных $\zeta = \text{sn}^2(2K\tau, k)$, где sn – эллиптический синус Якоби при модуле k [26], преобразует уравнение (2.1) к виду

$$Y'' + \frac{2(a_1 + a_2 - 2 \text{sn}^2 2K\tau) \text{sn} 2K\tau \text{cn} 2K\tau \text{dn} 2K\tau}{(\text{sn}^2 2K\tau - a_1)(\text{sn}^2 2K\tau - a_2)} Y' + \frac{2k^2 \text{sn}^6 2K\tau + \lambda_2 \text{sn}^4 2K\tau + \lambda_1 \text{sn}^2 2K\tau + \lambda_0}{(\text{sn}^2 2K\tau - a_1)(\text{sn}^2 2K\tau - a_2)} Y = 0 \quad (2.2)$$

а верхнюю полуплоскость ζ переводит в прямоугольник плоскости τ (фиг. 3,б), где $\rho = K'/K$, $K' = K(k')$, $k' = \sqrt{1-k^2}$, $K(k)$ – полный эллиптический интеграл 1-го рода при модуле k .

Определенное сходство уравнения (2.2) с более простым – обобщенным уравнением Ламе [26] позволяет построить два линейно независимых интеграла в форме [25] (для функции ϑ_4 и других тета-функций придерживаемся записи, принятой в [26])

$$Y_{1,2} = \vartheta_4(\tau \mp a) \vartheta_4(\tau \mp b) \vartheta_4^{-2}(\tau) \quad (2.3)$$

где a и b – некоторые постоянные, подлежащие определению, а также исследовать получающуюся при этом систему уравнений относительно неизвестных параметров конформного отображения как функций одного независимого параметра – модуля k – и установить ее однозначную разрешимость [27].

Отображающая функция принимает в случае области, представленной на фиг. 1,а, вид

$$z = R \frac{\vartheta_4(\tau-a) \vartheta_4(\tau-b)}{\vartheta_4(\tau+a) \vartheta_4(\tau+b)} \exp\left(\frac{2\pi\omega i}{\alpha}\right) \quad (2.4)$$

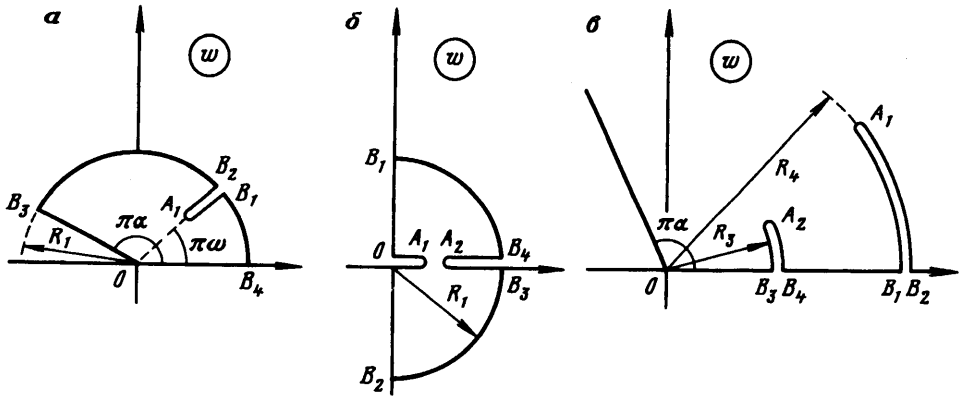
$$a+b = 1 - \omega/\alpha \quad (0 < \omega < \alpha)$$

Для кругового шестиугольника, показанного на фиг. 1,б, получаем

$$z = R_2 \frac{\vartheta_2(\tau+ai) \vartheta_2(\tau-bi)}{\vartheta_2(\tau-ai) \vartheta_2(\tau+bi)} \quad (2.5)$$

$$a-b = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{R_1}{R_2} \quad \left(0 < a < b < \frac{1}{2}\right)$$

Остановимся сначала на частном случае шестиугольника фиг. 1,а, когда вершина A_2 разреза $B_3A_2B_4$ попадает в начало координат (штриховой горизонтальный разрез).



Фиг. 4. а – круговой шестиугольник $\{\pi/2, 2\pi, \pi/2, \pi/2, \pi\alpha, \pi/2\}$, б – круговой восьмиугольник $\{\pi/2, \pi/2, 2\pi, \pi/2, \pi/2, \pi/2, 2\pi, \pi/2\}$, в – круговой восьмиугольник $\{\pi/2, 2\pi, \pi/2, -\pi\alpha, \pi\alpha, \pi/2, 2\pi, \pi/2\}$

Тогда выражение для отображающей функции получается из (2.4) при $a = b$

$$z = R \left[\frac{\vartheta_4(\tau - a)}{\vartheta_4(\tau + a)} \right]^2 \exp\left(\frac{2\pi\omega i}{\alpha}\right)$$

$$a = \frac{1}{2}(1 - \omega / \alpha) \quad (0 < a < \frac{1}{2})$$

Преобразование

$$w = R_1 \left[\frac{\vartheta_4(\tau - a)}{\vartheta_4(\tau + a)} \right]^\alpha \exp(\pi\omega i), \quad R_1 = \sqrt{R^\alpha} \quad (2.6)$$

переводит данную область в шестиугольник $\{\pi/2, 2\pi, \pi/2, \pi/2, \pi\alpha, \pi/2\}$ с произвольным углом $\pi\alpha$ при вершине в начале координат (фиг. 4.а). Последнему соответствует при решении задачи о конформном отображении на верхнюю полуплоскость ζ уравнение класса Фукса с шестью особыми точками

$$Y'' + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{\zeta - 1} + \frac{1}{\zeta - k^{-2}} \right) + \frac{1 - \alpha}{\zeta - c} - \frac{1}{\zeta - a_1} \right] Y' + \frac{1/4 \alpha (1 - \alpha) \zeta^3 + \lambda_2 \zeta^2 + \lambda_1 \zeta + \lambda_0}{\zeta(\zeta - 1)(\zeta - k^{-2})(\zeta - a_1)(\zeta - c)} Y = 0 \quad (2.7)$$

где c ($k^{-2} < c < \infty$) – неизвестный аффикс начала координат вещественной оси плоскости ζ .

Как и в разд. 2, из выражения для отображающей функции (2.6) с помощью формулы (1.10) найдем два линейно независимых интеграла уравнения (2.7) в виде

$$Y_{1,2} = [\vartheta_4(\tau \pm a) \vartheta_4^{-1}(\tau)]^\alpha$$

Константы отображения здесь определяются следующим образом:

$$a_1 = \frac{Z(2Ka)}{k^2 \operatorname{sn}^2 2Ka [Z(2Ka) + \operatorname{cn} 2Ka \operatorname{dn} 2Ka \operatorname{sn}^{-1} 2Ka]}$$

$$c = (k \operatorname{sn} 2Ka)^{-2}$$

где Z – дзета-функция Якоби [26]. Оставшийся неизвестным параметр a находится из условия соответствия для вершины разреза A_1 .

Рассмотрим теперь тот частный случай шестиугольника фиг. 1,а, который отвечает значению $\omega = \alpha/2$, т.е. когда разрезы служат продолжением один другого, причем разрез $B_1A_1B_2$ проходит через начало координат. Функция

$$w = iR_1 \sqrt{\frac{\vartheta_1(\tau - a)\vartheta_1(\tau - b)}{\vartheta_1(\tau + a)\vartheta_1(\tau + b)}}, \quad R_1 = \sqrt{R}$$

преобразует указанную область в восьмиугольник $\{\pi/2, \pi/2, 2\pi, \pi/2, \pi/2, \pi/2, 2\pi, \pi/2\}$ с шестью прямыми углами и двумя разрезами, показанный на фиг. 4,б.

Дифференциальное уравнение класса Фукса с восемью особыми точками, отвечающее задаче о конформном отображении верхней полуплоскости ζ на этот многоугольник

$$Y'' + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{\zeta - 1} + \frac{1}{\zeta - k^{-2}} + \frac{1}{\zeta - c} + \frac{1}{\zeta - d} \right) - \left(\frac{1}{\zeta - a_1} + \frac{1}{\zeta - a_2} \right) \right] Y' + \frac{\lambda_4 \zeta^4 + \lambda_3 \zeta^3 + \lambda_2 \zeta^2 + \lambda_1 \zeta + \lambda_0}{\zeta(\zeta - 1)(\zeta - k^{-2})(\zeta - a_1)(\zeta - a_2)(\zeta - c)(\zeta - d)} Y = 0$$

где точки $\zeta = c$ ($0 < c < 1$) и $\zeta = d$ ($k^{-2} < d < \infty$) соответствуют вершинам, находящимся в начале, имеет два линейно независимых интеграла

$$Y_{1,2} = \sqrt{\vartheta_1(\tau \mp a)\vartheta_1(\tau \mp b)} \vartheta_4^{-1}(\tau)$$

Этот частный случай впервые рассмотрен в [24].

Обратимся к области, изображенной на фиг. 1,б. С помощью функции

$$w = R_4 \left[\frac{\vartheta_2(\tau + ai)\vartheta_2(\tau - bi)}{\vartheta_2(\tau - ai)\vartheta_2(\tau + bi)} \right]^\alpha, \quad R_3 = R_1^\alpha, \quad R_4 = R_2^\alpha$$

$$a - b = \frac{1}{2\pi\alpha} \ln \frac{R_1}{R_2} \quad \left(0 < a < b < \frac{1}{2}, \quad 0 \leq \alpha \leq 2 \right)$$

последнюю можно перевести в восьмиугольник $\{\pi/2, 2\pi, \pi/2, -\pi\alpha, \pi\alpha, \pi/2, 2\pi, \pi/2\}$, представленный на фиг. 4,в. Поступая аналогичным образом, найдем, что уравнение класса Фукса с восемью особыми точками, соответствующее задаче о конформном отображении верхней полуплоскости ζ на полученный многоугольник

$$Y'' + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{\zeta - 1} + \frac{1}{\zeta - k^{-2}} \right) + \frac{1 + \alpha}{\zeta - c} + \frac{1 - \alpha}{\zeta - d} - \left(\frac{1}{\zeta - a_1} + \frac{1}{\zeta - a_2} \right) \right] Y' + \frac{\lambda_4 \zeta^4 + \lambda_3 \zeta^3 + \lambda_2 \zeta^2 + \lambda_1 \zeta + \lambda_0}{\zeta(\zeta - 1)(\zeta - k^{-2})(\zeta - a_1)(\zeta - a_2)(\zeta - c)(\zeta - d)} Y = 0$$

где точки $\zeta = c$ и $\zeta = d$ ($1 < c < d < k^{-2}$) отвечают вершинам, находящимся на бесконечности и в начале, имеет линейно независимые интегралы

$$Y_{1,2} = [\vartheta_2(\tau \pm ai)\vartheta_2(\tau \mp bi)\vartheta_4^{-1}(\tau)]^\alpha$$

При $\alpha = 2$ получаем восьмиугольник с тремя разрезами, вершина одного из которых (горизонтального) лежит в начале.

Построенные решения не содержат всех неизвестных параметров, входящих в дифференциальные уравнения (кроме, быть может, модуля k), что существенно упрощает

процесс и делает предлагаемый метод весьма удобным при последующем использовании.

Заключение. Показано, что для широкого круга многоугольников в полярных сетках, характерных для задач гидро- и аэромеханики, проблема нахождения неизвестных параметров, которые возникают при конформном отображении на вспомогательную каноническую область, может быть решена полностью, причем весьма просто. Для соответствующих фуксовых уравнений разработана методика построения точных решений в замкнутой форме через специальные, а в ряде случаев через элементарные функции.

Выражаем глубокую благодарность Н.Н. Кочиной за полезные советы, способствовавшие улучшению статьи.

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научного фонда (№ N 7A000).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Береславский Э.Н., Кочина П.Я. О некоторых уравнениях класса Фукса в гидро- и аэромеханике // Изв. РАН. МЖГ. 1992. № 5. С. 3–7.
2. Кочина П.Я., Береславский Э.Н., Кочина Н.Н. Аналитическая теория линейных дифференциальных уравнений класса Фукса и некоторые задачи подземной гидромеханики. Ч. 1: Препринт № 567. М.: Ин-т проблем механики РАН, 1996. 124 с.
3. Коппенфельс В., Штальман Ф. Практика конформных отображений. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 406 с.
4. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.
5. Кочина П.Я. (Полубаринова-Кочина П.Я.). Гидродинамика и теория фильтрации: Избр. тр. М.: Наука, 1991. 351 с.
6. Седов Л.И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1980. 448 с.
7. Биркгоф Г., Сарантонелло Э. Струи, следы и каверны. М.: Мир, 1964. 466 с.
8. Гуревич М.И. Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979. 536 с.
9. Фалькович С.В. К теории газовых струй // ПММ. 1957. Т. 21. № 4. С. 458–464.
10. Цицкишвили А.Р. О преобразованиях некоторых круговых многоугольников в линейные // Докл. расширенных заседаний семинара Ин-та прикл. матем. им. И.Н. Векуа. Тбилиси: Изд-во АН ГССР, 1990. Т. 5. № 1. С. 193–196.
11. Цицкишвили А.Р. Метод явного решения одного класса плоских задач теории фильтрации // Сообщ. АН Грузии. 1991. Т. 142. № 2. С. 285–288.
12. Цицкишвили А.Р. Некоторые замечания к одному методу решения дифференциального уравнения класса Фукса // Сообщ. АН Грузии. 1992. Т. 146. № 3. С. 509–514.
13. Полубаринова-Кочина П.Я. Применение теории линейных дифференциальных уравнений к некоторым случаям движения грунтовой воды // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1938. № 3. С. 371–395.
14. Полубаринова-Кочина П.Я. Применение теории линейных дифференциальных уравнений к некоторым задачам о движении грунтовых вод (случай трех особых точек) // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1939. № 3. С. 329–350.
15. Полубаринова-Кочина П.Я. Применение теории линейных дифференциальных уравнений к некоторым задачам о движении грунтовых вод (число особых точек больше трех) // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1939. № 5–6. С. 579–602.
16. Полубаринова-Кочина П.Я. Некоторые задачи плоского движения грунтовых вод. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1942. 143 с.
17. Полубаринова-Кочина П.Я., Фалькович С.В. Теория фильтрации жидкостей в пористых средах // ПММ. 1947. Т. 11. № 6. С. 629–674.
18. Полубаринова-Кочина П.Я. О круговых многоугольниках в теории фильтрации // Проблемы математики и механики. Новосибирск: Наука, 1983. С. 166–177.
19. Полубаринова-Кочина П.Я. Аналитическая теория линейных дифференциальных уравнений в теории фильтрации // Математика и проблемы водного хозяйства. Киев: Наук. думка, 1986. С. 19–36.

20. *Полубаринова-Кочина П.Я.* О дополнительных параметрах на примерах круговых четырехугольников // ПММ. 1991. Т. 55. № 2. С. 222–227.
21. *Береславский Э.Н.* Об интегрировании в замкнутой форме одного класса фуксовых уравнений и его приложения // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. № 6. С. 1048–1050.
22. *Береславский Э.Н.* О некоторых уравнениях класса Фукса, встречающихся в задачах математической физики // Докл. АН УССР. Сер. А. 1990. № 1. С. 7–10.
23. *Голубев В.В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. 436 с.
24. *Кочина И.Н., Полубаринова-Кочина П.Я.* О применении плавных контуров основания гидротехнических сооружений // ПММ. 1952. Т. 16. № 4. С. 55–66.
25. *Береславский Э.Н.* О конформном отображении некоторых круговых многоугольников на прямоугольник // Изв. вузов. Математика. 1980. № 5. С. 3–7.
26. *Уиттекер Э.Д., Ватсон Дж.Н.* Курс современного анализа. Т. 2: Пер. с англ. М.: Физматгиз, 1963. 515 с.
27. *Береславский Э.Н.* Математическое моделирование фильтрационных течений из каналов и оросителей // Тр. семинара по крайвым задачам. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1990. Вып. 25. С. 70–90.

Санкт-Петербург
Москва

Поступила в редакцию
8.11.1996