МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 • 1997

УДК 532.546:517.9

 А.В. КОПАЕВ

МЕТОД ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ФИЛЬТРАЦИИ В СЛОИСТОЙ СРЕДЕ

Рассматривается стационарное течение несжимаемой жидкости в слоистой бесконечной пористой среде с четырьмя слоями, различающимися по проницаемости. Течение вызывается особенностями, произвольно расположенными в трех слоях. Считается известным решение задачи относительно потенциала скорости фильтрации для трехслойной среды (когда четвертый слой не выделяется). Тогда введение четвертого слоя эквивалентно возмущению поля.

Для решения возмущенной задачи применен разработанный автором ранее метод сведения к функциональному уравнению относительно специально введенной вспомогательной гармонической функции. Для решения линейного функционального уравнения автором разработано интегральное преобразование, позволяющее понизить размерность задачи. Приводятся примеры построения решения задачи в явном виде.

При решении прикладных задач подземной гидродинамики, таких, как фильтрация к скважинам, работа водозаборов в пластах с областями загрязнения, фильтрационные течения под плотинами и др., важную роль играет задача описания установившихся фильтрационных течений несжимаемой жидкости в кусочно-однородных средах [1, 2]. Для решения возникающих при этом задач сопряжения на границах раздела зон однородности среды аналитических или гармонических функций в [3–5] предложен достаточно универсальный метод "функциональных уравнений". При этом границами раздела областей однородности среды являлись концентрические окружности, концентрические сферы, параллельные прямые.

В настоящей работе показана возможность применения указанного метода и в случае слоистой среды, области однородности которой разделяются параллельными плоскостями. Возникающее при этом функциональное уравнение относительно неизвестной гармонической в полупространстве функции трех переменных решается методом интегральных преобразований. Сначала применяется введенное автором в [6] интегродифференциальное преобразование, которое каждой гармонической в полупространстве функции трех переменных (удовлетворяющей некоторым условиям роста на бесконечности) ставит в соответствие гармоническую в полуплоскости функцию двух переменных, зависящую от одного действительного параметра. Затем, как и в [5], применяется обратное преобразование Лапласа.

Рассматриваемая среда является четырехслойной, хотя метод функциональных уравнений применим и в случае произвольного числа слоев. Этот выбор объясняется тем, что с каждым добавленным слоем формулы для решения задачи существенно усложняются, а задача для трехслойной среды решается и другими методами, например "методом источников". В случае же четырехслойной среды метод источников уже неприменим, так как построенные формально этим методом функциональные ряды, представляющие решение, вообще говоря, расходятся. С математической точки зрения это объясняется тем, что оператор в соответствующем функциональном уравнении перестает быть сжимающим.

1. Постановка задачи. Рассмотрим установившуюся пространственную фильтрацию

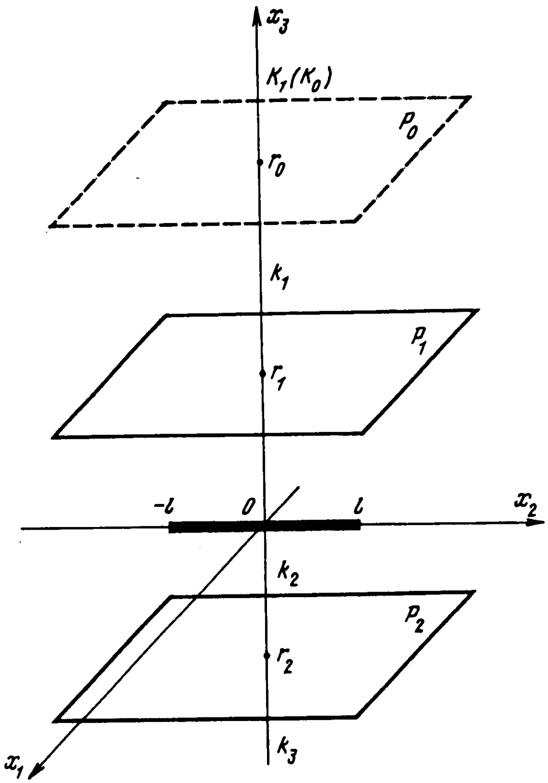

Схема четырехкомпонентной слоистой среды

жидкости в кусочно-однородной пористой среде. В каждой из областей однородности такой среды фильтрационное течение характеризуется гармоническим потенциалом $\varphi(x)$ (приведенным давлением)

$$\mathbf{v}(x) = k \operatorname{grad} \varphi(x), \quad x = (x_1, x_2, x_3)$$

где k – проницаемость среды. При этом особенности фильтрационного течения определяются особыми точками гармонической функции.

Пусть область фильтрационного течения состоит из областей, разделенных двумя параллельными плоскостями, заданными уравнениями $x_3 = r_j, j = 1, 2$ $(r_1 > r_2)$ (фигура). Особенности фильтрационного течения расположены произвольно в полупространстве $\{x\colon x_3 < r_0\}$ $(r_0 > r_1)$, исключая границы раздела областей.

Введем обозначения

$$P_j = \{x\colon x_3 = r_j\}, \quad D_j^+ = \{x\colon x_3 > r_j\}, \quad D_j^- = \{x\colon x_3 < r_j\}, \quad j = 0,1,2$$

$$E_j = D_j^+ \cap D_{j-1}^- = \{x\colon r_j < x_3 < r_{j-1}\}, \quad j = 1,2$$

Пусть потенциал $\varphi_1(x)$ описывает фильтрационное течение в полупространстве D_1^+ с проницаемостью k_1, $\varphi_2(x)$ – в области E_2 с проницаемостью k_2, $\varphi_3(x)$ – в полупространстве D_2^- с проницаемостью k_3 $(0 < k_j < +\infty, j = 1, 2, 3)$. При этом на плоскостях P_1 и P_2 выполняются условия непрерывности давления и расхода жидкости [1]

$$P_j\colon \ \varphi_j = \varphi_{j+1}, \quad k_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_3} = k_{j+1} \frac{\partial \varphi_{j+1}}{\partial x_3}, \quad j = 1,2 \tag{1.1}$$

Изменим проницаемость в полупространстве D_0^+ с k_1 на k_0 $(0 < k_0 < +\infty)$ и найдем потенциалы $\Phi_j(x), j = 0, 1, 2, 3$, описывающие возмущенное фильтрационное течение в областях D_0^+, E_1, E_2, D_2^- соответственно. Так как изменение проницаемости в полупространстве D_0^+ не влияет на особенности течения, то потенциалы $\Phi_j(x)$ можно представить в виде

$$\Phi_j(x) = \varphi_j(x) + g_j(x), \quad j = 1,2,3 \tag{1.2}$$

где $g_j(x), j = 1, 2, 3,$ – функции, гармонические и ограниченные соответственно в областях E_1, E_2, D_2^-. Учитывая (1.1) и (1.2), условия на границах раздела указанных областей запишем в виде

$$\begin{aligned} &P_0:\ \ g_1 = \Phi_0 - \varphi_1,\ \ \frac{\partial g_1}{\partial x_3} = \frac{k_0}{k_1}\frac{\partial \Phi_0}{\partial x_3} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} \\ &P_j:\ \ g_{j+1} = g_j,\ \ \frac{\partial g_{j+1}}{\partial x_3} = \frac{k_j}{k_{j+1}}\frac{\partial g_j}{\partial x_3},\quad j = 1,2 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Таким образом, задача о нахождении потенциалов $\Phi_j(x)$ возмущенного фильтрационного течения равносильна задаче сопряжения гармонических функций $\Phi_0(x)$, $g_j(x)$, $j = 1, 2, 3$, по краевым условиям (1.3) (в которых φ_1 – известная функция, гармоническая в полупространстве D_0^+).

2. Редукция задачи сопряжения к функциональному уравнению. Рассмотрим функции

$$\begin{aligned} &G_0(x) = \frac{k_0 + k_1}{2k_1}\Phi_0(x) - \varphi_1(x),\quad x_3 > r_0 \\ &G_1(x) = g_1(x) + \frac{k_0 - k_1}{2k_1}\Phi_0(x_1, x_2, 2r_0 - x_3),\quad r_1 < x_3 < r_0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$G_1(\eta) = G_0(\eta),\quad \frac{\partial G_1}{\partial x_3}(\eta) = \frac{\partial G_0}{\partial x_3}(\eta),\quad \eta_3 = r_0 \tag{2.2}$$

гармонические соответственно в областях D_0^+, E_1. В силу условий (2.2) функции $G_0(x)$ и $G_1(x)$ – гармонические продолжения друг друга через плоскость P_0, т. е. существует функция $H_1(x)$, гармоническая и ограниченная в полупространстве D_1^+, такая, что

$$H_1(x) = G_0(x),\quad x_3 > r_0;\ \ H_1(x) = G_1(x),\quad r_0 > x_3 > r_1 \tag{2.3}$$

Поясним, почему функции $G_0(x)$ и $G_1(x)$ определяются формулами (2.1). При рассмотрении в [5] плоскопараллельного случая наряду с гармоническими потенциалами рассматриваются комплексные аналитические потенциалы. При этом первое из краевых условий (1.3) заменено условием непрерывности давления и линий тока

$$\begin{aligned} &W_1(\zeta) = \frac{k_0 + k_1}{2k_1}F_0(\zeta) + \frac{k_1 - k_0}{2k_1}\overline{F_0(\overline{\zeta})} - f_1(\zeta),\ \ \operatorname{Re}\zeta = r_0 \\ &\varphi_1(x_1, x_3) = \operatorname{Re} f_1(x_3 + ix_1),\quad \Phi_0(x_1, x_3) = \operatorname{Re} F_0(x_3 + ix_1),\quad x_3 > r_0 \\ &g_1(x_1, x_3) = \operatorname{Re} W_1(x_3 + ix_1),\quad r_1 > x_3 > r_0 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Из условия (2.4) ясно, почему функции $G_0(x)$ и $G_1(x)$ определены формулами (2.1).
Рассуждая и далее аналогично [5], рассмотрим гармоническую и ограниченную в

полупространстве D_2^+ функцию $H_2(x)$ и гармоническую и ограниченную в пространстве R^3 функцию $H(x)$

$$H_2(x)=\frac{k_1+k_2}{2k_2}H_1(x)+\frac{(k_2-k_1)(k_1-k_0)}{4k_1k_2}\Phi_0(x_1,x_2,x_3+2h_1),\quad x_3>r_1$$

$$H_2(x)=g_2(x)+\frac{k_1-k_2}{2k_2}H_1(x_1x_2,2r_1-x_3)+ \tag{2.5}$$

$$+\frac{(k_1+k_2)(k_0-k_1)}{4k_1k_2}\Phi_0(x_1,x_2,2r_0-x_3),\quad r_1>x_3>r_2,\quad h_1=r_0-r_1$$

$$H(x)=\frac{k_2+k_3}{2k_3}H_2(x)+\frac{(k_3-k_2)(k_2-k_1)}{4k_2k_3}H_1(x_1,x_2,x_3+2h_2)+$$

$$+\frac{(k_3-k_2)(k_1+k_2)(k_1-k_0)}{8k_1k_2k_3}\Phi_0(x_1,x_2,x_3+2h_1+2h_2),\quad x_3>r_2$$

$$H(x)=g_3(x)+\frac{k_2-k_3}{2k_3}H_2(x_1,x_2,2r_2-x_3)+\frac{(k_2+k_3)(k_1-k_2)}{4k_2k_3}\times \tag{2.6}$$

$$\times H_1(x_1,x_2,2r_1-x_3)+\frac{(k_2+k_3)(k_1+k_2)(k_0-k_1)}{8k_1k_2k_3}\Phi_0(x_1,x_2,2r_0-x_3)$$

$$x_3<r_2,\quad h_2=r_1-r_2$$

При этом вместо принципа симметрии относительно прямой для аналитических функций используем принцип симметрии относительно плоскости для гармонических функций трех переменных.

По теореме Лиувилля для гармонических функций

$$H(x)=C_1=\mathrm{const} \tag{2.7}$$

В итоге получаем основную систему функциональных уравнений (2.1), (2.3), (2.5)–(2.7). Исключая из этой системы функции $H(x)$, $H_2(x)$, $g_1(x)$, $g_2(x)$, $g_3(x)$, $\Phi_0(x)$, $G_0(x)$, $G_1(x)$, получаем функциональное уравнение для нахождения функции $H_1(x)$ в полупространстве D_1^+

$$H_1(x)+\lambda\mu H_1(x_1,x_2,x_3+2h_1)+\mu\nu H_1(x_1,x_2,x_3+2h_2)+$$

$$+\lambda\nu H_1(x_1,x_2,x_3+2h_1+2h_2)=-\lambda\mu\varphi_1(x_1,x_2,x_3+2h_1)- \tag{2.8}$$

$$-\lambda\nu\varphi_1(x_1,x_2,x_3+2h_1+2h_2)+(1+\mu)(1+\nu)C_1,\quad x_3>r_1$$

$$\lambda=\frac{k_1-k_0}{k_0+k_1},\quad \mu=\frac{k_2-k_1}{k_1+k_2},\quad \nu=\frac{k_3-k_2}{k_2+k_3}$$

Заменой

$$F(x)=H_1(x)-\frac{k_3(k_0+k_1)}{k_1(k_0+k_3)}C_1,\quad x_3>r_1$$

переходим к функциональному уравнению (2.8) с $C_1=0$

$$F(x)+\lambda\mu F(x_1,x_2,x_3+2h_1)+\mu\nu F(x_1,x_2,x_3+2h_2)+$$

$$+\lambda\nu F(x_1,x_2,x_3+2h_1+2h_2)=-\lambda\mu\varphi_1(x_1,x_2,x_3+2h_1)- \tag{2.9}$$

$$-\lambda\nu\varphi_1(x_1,x_2,x_3+2h_1+2h_2),\quad x_3>r_1$$

Таким образом, нахождение потенциалов $\Phi_j(x)$, $j = 0, 1, 2, 3$, возмущенного фильтрационного течения сведено к решению функционального уравнения (2.9), в котором $\varphi_1(x)$ – известная функция, гармоническая в полупространстве D_0^+.

3. Основной математический аппарат. Пусть $F(x)$ – гармоническая в полупространстве $D_r^+ = \{x: x_3 > r\}$ функция, удовлетворяющая условиям на бесконечности

$$F(x) = O\left(\frac{1}{\|x\|^{\alpha}}\right), \quad \frac{\partial F}{\partial x_3}(x) = O\left(\frac{1}{\|x\|^{1+\beta}}\right), \quad x_1^2 + x_2^2 \to \infty \tag{3.1}$$

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad \alpha, \beta > 0$$

Множество всех таких функций образует линейное пространство. Наряду с функцией $F(x)$ для любого $t \in [0, 2\pi]$ рассмотрим функцию

$$K[F](u, v, t) = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial F}{\partial x_3}(v \cos t - \xi \sin t, v \sin t + \xi \cos t, u) d\xi \tag{3.2}$$

Так как функция $F(x)$ удовлетворяет условиям (3.1), то легко проверить, что для любого $t \in [0, 2\pi]$ функция $K[F]$ (u, v, t) (как функция двух действительных переменных u и v) определена в полуплоскости $B_r^+ = \{(u, v) \in R^2: u > r\}$. Так как

$$(v \cos t - \xi \sin t)^2 + (v \sin t + \xi \cos t)^2 = v^2 + \xi^2$$

то для любого $t \in [0, 2\pi]$

$$K[F](u, v, t) = O\left(\frac{1}{|w|^{\beta}}\right) \quad (w = u + iv)$$

В [6] получены следующие свойства преобразования (3.2) гармонических в полупространстве функций (считается, что все написанные ниже интегральные преобразования существуют).

Если функция $F(x)$ является гармонической в полупространстве D_r^+ и удовлетворяет условиям (3.1), то функция $K[F](u, v, t)$ при любом $t \in [0, 2\pi]$ является гармонической в полуплоскости B_r^+.

Преобразование (3.2) линейно, т. е.

$$K[\gamma F + \delta G] = \gamma K[F] + \delta K[G] \tag{3.3}$$

Если $G(x) = F(x_1, x_2, x_3 - a)$, то

$$K[G](u, v, t) = K[F](u - a, v, t) \tag{3.4}$$

$$K\left[\frac{\partial F}{\partial x_3}\right] = \frac{\partial}{\partial u}(K[F]) \tag{3.5}$$

$$K\left[x_1 \frac{\partial F}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial F}{\partial x_1}\right] = \frac{\partial}{\partial t}(K[F]) \tag{3.6}$$

Отсюда следует, что

$$F(x) = F\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2},\ x_3\right) \Rightarrow K[F](u, v, t) \equiv K[F](u, v)$$

Если функция $F(x)$ – гармоническая в полупространстве D_r^+ и удовлетворяет условиям (3.1), то в полупространстве D_r^+

$$F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K[F](x_3, x_1\cos t + x_2\sin t, t)dt$$

Отсюда следует

$$K[F](u,v,t) \equiv K[F](u,v) \Rightarrow F(x) \equiv F(\sqrt{x_1^2+x_2^2}, x_3)$$

(такие функции возникают при описании установившихся фильтрационных течений с осевой симметрией).

Для функции источника

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+(x_3-a)^2}}$$

$$K[F](u,v,t) = \frac{u-a}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\xi}{[(u-a)^2+v^2+\xi^2]^{3/2}} = \frac{u-a}{(u-a)^2+v^2} = \operatorname{Re}\frac{1}{w-a}$$

Здесь a – действительное число.

4. Решение функционального уравнения. Подействуем на функциональное уравнение (2.9) преобразованием K. Учитывая (3.3) и (3.4), получим

$$K[F](u,v,t) + \lambda\mu K[F](u+2h_1,v,t) + \mu\nu K[F](u+2h_2,v,t) +$$
$$+\lambda\nu K[F](u+2h_1+2h_2,v,t) = -\lambda\mu K[\varphi_1](u+2h_1,v,t) -$$
$$-\lambda\nu K[\varphi_1](u+2h_1+2h_2,v,t), \quad u > r_1$$

Так как функции $K[F](u, v, t)$ и $K[\varphi_1](u, v, t)$ при любом $t \in [0, 2\pi]$ гармонические в полуплоскостях B_1^+ и B_0^+ соответственно, то в этих полуплоскостях существуют аналитические при любом $t \in [0, 2\pi]$ функции $f(w, t)$ и $\varphi(w, t)$, такие, что

$$K[F](u,v,t) = \operatorname{Re} f(w,t), \quad K[\varphi_1](u,v,t) = \operatorname{Re}\varphi(w,t)$$

Так как аналитическая функция в односвязной области определяется своей действительной частью однозначно с точностью до произвольного чисто мнимого постоянного слагаемого, то получаем функциональное уравнение

$$f(w,t) + \lambda\mu f(w+2h_1,t) + \mu\nu f(w+2h_2,t) + \lambda\nu f(w+2h_1+2h_2,t) =$$
$$= -\lambda\mu\varphi(w+2h_1,t) - \lambda\nu\varphi(w+2h_1+2h_2,t) + iC_2(t), \quad \operatorname{Re} w > r_1 \qquad (4.1)$$

Заменой

$$\psi(w,t) = f(w,t) - i\frac{(k_0+k_1)(k_1+k_2)(k_2+k_3)}{4k_1k_2(k_0+k_3)}C_2(t)$$

переходим к уравнению (4.1) с $C_2(t) \equiv 0$

$$\psi(w,t) + \lambda\mu\psi(w+2h_1,t) + \mu\nu\psi(w+2h_2,t) + \lambda\nu\psi(w+2h_1+2h_2,t) =$$
$$= -\lambda\mu\varphi(w+2h_1,t) - \lambda\nu\varphi(w+2h_1+2h_2,t), \quad \operatorname{Re} w > r_1 \qquad (4.2)$$

Функциональное уравнение решается так же, как и соответствующее функциональное уравнение в [5] (в котором отсутствует параметр t). Действуем на уравнение (4.2) обратным преобразованием Лапласа и получаем

$$p(\tau,t) = -\frac{\lambda\exp(-2h_1\tau)(\mu+\nu\exp(-2h_2\tau))q(\tau,t)}{1+\lambda\mu\exp(-2h_1\tau)+\mu\nu\exp(-2h_2\tau)+\lambda\nu\exp(-2h_1\tau-2h_2\tau)}$$

$$\psi(w,t) \div p(\tau,t), \quad \varphi(w,t) \div q(\tau,t), \quad \tau\in[0,+\infty), \quad t\in[0,2\pi]$$

$$f(w,t)=\psi(w,t)+i\frac{(k_0+k_1)(k_1+k_2)(k_2+k_3)}{4k_1k_2(k_0+k_3)}C_2(t)$$

$$K[F](u,v,t)=\operatorname{Re}\psi(w,t)$$

$$H_1(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{Re}\psi(x_3,x_1\cos t+x_2\sin t,t)dt+\frac{k_3(k_0+k_1)}{k_1(k_0+k_3)}C_1$$

$$x_3>r_1$$

Находим функции $\Phi_j(x)$, $j=0,1,2,3$ (отбрасывая произвольные постоянные, что не приводит к изменению фильтрационного течения)

$$\Phi_0(x)=(1+\lambda)(F(x)+\varphi_1(x)),\quad x_3>r_0$$

$$\Phi_1(x)=\varphi_1(x)+\lambda\varphi_1(x_1,x_2,2r_0-x_3)+F(x)+\lambda F(x_1,x_2,2r_0-x_3)$$

$$r_0>x_3>r_1 \tag{4.3}$$

$$\Phi_2(x)=\varphi_2(x)-\frac{\mu\nu}{1+\mu}F(x_1,x_2,x_3+2h_2)+\frac{\mu}{1+\mu}F(x_1,x_2,2r_1-x_3)-$$

$$-\frac{\lambda\nu}{(1+\lambda)(1+\mu)}\Phi_0(x_1,x_2,x_3+2h_1+2h_2)+\frac{\lambda}{(1+\lambda)(1+\mu)}\Phi_0(x_1,x_2,2r_0-x_3)$$

$$r_1>x_3>r_2$$

$$\Phi_3(x)=\varphi_3(x)+\frac{\mu(1-\nu)}{1+\mu}F(x_1,x_2,2r_1-x_3)+\frac{\lambda(1-\nu)}{(1+\lambda)(1+\mu)}\Phi_0(x_1,x_2,2r_0-x_3)$$

$$x_3<r_2$$

$$F(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{Re}\psi(x_3,x_1\cos t+x_2\sin t,t)dt,\quad x_3>r_1$$

Полагая в формулах (4.3) $k_3=k_2$, $\varphi_3(x)\equiv\varphi_2(x)$, получим решение рассматриваемой задачи для трехслойной среды, которое приводится к виду, получаемому методом источников, применением разложения

$$\frac{1}{1+\lambda\mu\exp(-2h_1\tau)}=\sum_{j=0}^{\infty}(-\lambda\mu)^j\exp(-2h_1j\tau),\quad \tau\geqslant 0$$

и теоремы о смещении изображения для преобразования Лапласа.

Полагая затем $k_2=k_1$, $\varphi_2(x)\equiv\varphi_1(x)$, получим решение рассматриваемой задачи для двухслойной среды [7].

5. Горизонтальная скважина в четырехслойном пласте. Пусть в однородной среде с проницаемостью k_2, заполняющей все пространство, фильтрационное течение определяется стоками, расположенными на отрезке оси x_2 (горизонтальной скважиной)

$$p(x)=\int_{-l}^{l}\frac{q(\eta)d\eta}{\sqrt{x_1^2+(\eta-x_2)^2+x_3^2}}$$

Изменим проницаемость полупространства $\{x_3<r_2,\ r_2<0\}$ с k_2 на k_3 (фигура). Возмущенное таким образом фильтрационное течение в двухслойной среде определяется потенциалами [7]

$$p_2(x)=p(x)-\nu p(x_1,x_2,x_3-2r_2),\quad x_3>r_2$$

$$p_3(x)=(1-\nu)p(x),\quad x_3<r_2$$

Изменим проницаемость полупространства $\{x_3>r_1,\ r_1>0\}$ с k_2 на k_1 (фигура), Возмущенное таким образом фильтрационное течение в трехслойной среде определяется потенциалами

$$\varphi_1(x) = (1+\mu)\int_0^{+\infty}(1-\nu\exp(2r_2\tau))\exp(-x_3\tau)d\tau\int_0^{2\pi}L(x_1, x_2, \tau, t)dt, \quad x_3 > r_1$$

$$\varphi_2(x) = p(x) - \nu p(x_1, x_2, x_3 - 2r_2) - \frac{\mu\nu}{1+\mu}\varphi_1(x_1, x_2, x_3 + 2h_2) +$$

$$+\frac{\mu}{1+\mu}\varphi_1(x_1, x_2, 2r_1 - x_3), \quad r_2 > x_3 > r_1$$

$$\varphi_3(x) = (1-\nu)p(x) + \frac{\mu(1-\nu)}{1+\mu}\varphi_1(x_1, x_2, 2r_1 - x_3), \quad x_3 < r_2$$

$$L(x_1, x_2, \tau, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-l}^{l}\frac{q(\eta)\cos(\tau(x_1\cos t + (x_2 - \eta)\sin t))d\eta}{1+\mu\nu\exp(-2h_2\tau)}$$

Наконец, изменим проницаемость полупространства $\{x_3 > r_0, r_0 > r_1\}$ с k_1 на k_0 (фигура). Возмущенное таким образом фильтрационное течение в четырехслойной среде определяется потенциалами

$$\Phi_0(x) = (1+\lambda)(1+\mu)\Phi(x), \quad x_3 > r_0$$

$$\Phi_1(x) = (1+\mu)\Phi(x) + \lambda(1+\mu)\Phi(x_1, x_2, 2r_0 - x_3), \quad r_1 > x_3 > r_0$$

$$\Phi_2(x) = p(x) - \nu p(x_1, x_2, x_3 - 2r_2) - \mu\nu\Phi(x_1, x_2, x_3 + 2h_2) -$$

$$-\lambda\nu\Phi(x_1, x_2, x_3 + 2h_1 + 2h_2) + \mu\Phi(x_1, x_2, 2r_1 - x_3) + \lambda\Phi(x_1\ x_2, 2r_0 - x_3), \quad r_2 > x_3 > r_1 \quad (5.1)$$

$$\Phi_3(x) = (1-\nu)p(x) + \mu(1-\nu)\Phi(x_1, x_2, 2r_1 - x_3) + \lambda(1-\nu)\Phi(x_1, x_2, 2r_0 - x_3), \quad x_3 < r_2$$

$$\Phi(x) = \int_0^{+\infty}(1-\nu\exp(2r_2\tau))\exp(-x_3\tau)d\tau\int_0^{2\pi}M(x_1, x_2, \tau, t)dt$$

$$M(x_1, x_2, \tau, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-l}^{l}\frac{q(\eta)\cos(\tau(x_1\cos t + (x_2 - \eta)\sin t))d\eta}{1+\lambda\mu\exp(-2h_1\tau) + \mu\nu\exp(-2h_2\tau) + \lambda\nu\exp(-2h_1\tau - 2h_2\tau)}$$

Для практики наиболее интересны случаи $k_3 = 0$, $k_0 = 0$ или $k_3 = k_0 = 0$. Если $k_3 = 0$, а $k_0 \neq 0$, то функции $\Phi_0(x)$, $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$, определенные формулами (5.1) при $\nu = -1$, – также решения рассматриваемой задачи, хотя сама задача решается иначе. В этом случае не строится функция $H(x)$ по формулам (2.6), а последнее функциональное уравнение получается гармоническим продолжением в полупространство D_2^+ краевого условия

$$\frac{\partial g_2}{\partial x_3}(\eta) \equiv \frac{\partial H_2}{\partial x_3}(\eta) + \frac{k_1 - k_2}{2k_2}\frac{\partial H_1}{\partial x_3}(\eta_1, \eta_2, 2r_1 - r_2) +$$

$$+\frac{(k_1 + k_2)(k_0 - k_1)}{4k_1k_2}\frac{\partial \Phi_0}{\partial x_3}(\eta_1, \eta_2, 2r_0 - r_2) = 0, \quad \eta = (\eta_1, \eta_2, r_2)$$

Основное же функциональное уравнение (2.9) остается таким же (при $\nu = -1$). Случай $k_0 = 0$, $k_3 \neq 0$ рассматривается аналогично. И в этом случае формулы (5.1) ($\lambda = 1$) дают решение задачи.

В случае $k_0 = k_3 = 0$ ($\lambda = 1, \nu = -1$) формулы (5.1) использовать нельзя, так как

$$\lim_{\tau\to 0}(1 + \mu\exp(-2h_1\tau) - \mu\exp(-2h_2\tau) - \exp(-2h_1\tau - 2h_2\tau)) = 0$$

и интеграл, определяющий функцию $\Phi(x)$, расходится. Но в этом случае верны формулы, получающиеся дифференцированием формул (5.1) по x_3 (при $\lambda = 1, \nu = -1$)

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_3}(x) = (1+\mu)\frac{\partial \Phi}{\partial x_3}(x) - (1+\mu)\frac{\partial \Phi}{\partial x_3}(x_1, x_2, 2r_0 - x_3), \quad r_0 > x_3 > r_1$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial x_3}(x) = \frac{\partial p}{\partial x_3}(x) + \frac{\partial p}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3, -2r_2) + \mu\frac{\partial \Phi}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3 + 2h_2) +$$

$$+\frac{\partial \Phi}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3 + 2h_1 + 2h_2) - \mu\frac{\partial \Phi}{\partial x_3}(x_1, x_2, 2r_1 - x_3) - \tag{5.2}$$

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial x_3}(x_1, x_2, 2r_0 - x_3), \quad r_1 > x_3 > r_2$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_3}(x) = \int_0^{+\infty} (-\tau)(1+\exp(2r_2\tau))\exp(-x_3\tau)d\tau \int_0^{2\pi} M(x_1, x_2, \tau, t)dt$$

$$M(x_1, x_2, \tau, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-l}^{l} \frac{q(\eta)\cos(\tau(x_1\cos t + (x_2 - \eta)\sin t))d\eta}{1 + \mu\exp(-2h_1\tau) - \mu\exp(-2h_2\tau) - \exp(-2h_1\tau - 2h_2\tau)}$$

(за счет множителя $(-\tau)$, возникающего в числителе подынтегральной функции по теореме о дифференцировании изображения, интеграл, определяющий функцию $\partial\Phi/\partial x_3(x)$, сходится). Решение же задачи существенно отличается от рассмотренного. В этом случае используется представление

$$\Phi_j(x) = \varphi_j(x) + U_j(x) + V_{j-1}(x_1, x_2, 2r_{j-1} - x_3), \quad r_{j-1} > x_3 > r_j, \quad j = 1, 2$$

где $U_j(x)$ и $V_j(x)$ – функции, гармонические и ограниченные в полупространстве D_j^+. Затем все краевые условия гармонически продолжаются в соответствующее полупространство D_j^+. Из полученной системы функциональных уравнений исключаются все функции, кроме одной.

Заключение. Разработанные автором метод функциональных уравнений и интегральное преобразование гармонических функций позволяют решать практически важные пространственные задачи установившейся фильтрации жидкости в слоистых средах.

Автор благодарит М.Б. Панфилова за полезное обсуждение работы и постановку практически важной задачи о горизонтальной скважине.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Голубева О.В.* Курс механики сплошных сред. М.: Высш. шк., 1972. 368 с.
2. *Радыгин В.М., Голубева О.В.* Применение функций комплексного переменного в задачах физики и техники. М.: Высш. шк., 1983. 160 с.
3. *Копаев А.В., Радыгин В.М.* Фильтрационные теоремы об окружностях // Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. № 1. С. 179–183.
4. *Копаев А.В., Радыгин В.М.* Фильтрационные теоремы о сферах // Изв. АН СССР. МЖГ. 1991. № 2. С. 105–109.
5. *Копаев А.В., Радыгин В.М.* Фильтрационные теоремы о прямых // Изв. РАН. МЖГ. 1992. № 5. С. 86–90.
6. *Копаев А.В.* Об одном преобразовании гармонических в полупространстве функций // Тр. 2-й Междунар. науч.-техн. конф. "Актуальные проблемы фундаментальных наук". М.: Техносфера-Информ. 1994. Т. 1. Ч. 2. С. 57–59.
7. *Пивень В.Ф.* О фильтрации в неоднородной пористой среде // Проблемы теоретической гидродинамики. Тула: Тульск. пед. ин-т, 1977. Вып. 4. С. 54–56.

Москва

Поступила в редакцию
13.III.1996