

УДК 532.529.2 : 536.24

© 1997 г. Л.Х. БЕЛЕНЬКАЯ

О ВОЗНИКНОВЕНИИ ВТОРИЧНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ В ГОРИЗОНТАЛЬНОМ СЛОЕ ЖИДКОСТИ С ПРИМЕСЬЮ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВЕРТИКАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Рассматривается задача о возникновении вторичных P - и $2P$ -периодических конвективных течений в горизонтальном слое вязкой несжимаемой жидкости с примесью. Слой совершает вертикальные периодические колебания. Рассмотрен случай конвекции в морской воде. Границы слоя предполагаются свободными изотермическими, концентрация примеси на каждой из них считается заданной.

Данная задача в линейной постановке исследована в [1]. Рассмотрена потеря устойчивости механического равновесия смеси, связанная с возникновением периодических течений периода P и удвоенного периода $2P$, $P = 2\pi/\omega$. Рассчитаны нейтральные колебания на плоскостях (α, Ra) , (Rs, Ra) , (h, Ra) , (ω, Ra) , при этом число Рэлея минимизировалось по волновому числу α . Здесь Rs , Ra – концентрационное и температурное числа Рэлея; h , ω – амплитуда и частота модуляции слоя, α – горизонтальное волновое число. Нейтральная кривая на плоскости (Rs, Ra) в отличие от стационарного случая, а также случая однокомпонентной жидкости обладает следующими свойствами.

Существует несколько значений Rs_{*i} , при которых происходит смена лидерства P - и $2P$ -периодических режимов, причем с уменьшением частоты ω количество таких смен увеличивается.

Пики на кривой соответствуют точкам пересечения ветвей P - и $2P$ -периодических режимов. При этом $\alpha_*^{(1)}(Rs_{*i}) \neq \alpha_*^{(2)}(Rs_{*i})$, так что в точках $Rs = Rs_{*i}$ функция $\alpha_*(Rs)$ терпит разрыв. С механической точки зрения этот факт означает: когда концентрация Rs , увеличиваясь, переходит значение Rs_{*i} , то вместе с удвоением периода должно наблюдаться внезапное изменение длины волны – размера конвективных валов. Здесь $\alpha_*^{(1)}$, $\alpha_*^{(2)}$ – минимальные изменения волнового числа α , соответствующие P - и $2P$ -периодическим течениям. Зависимость минимизированного числа Ra от Rs осциллирующая, что характерно для параметрического резонанса. При фиксированных значениях Rs ($Rs > 0$) зависимость (h, Ra) имеет аналогичный характер.

В отличие от стационарного случая на плоскости (α, Ra) (остальные параметры фиксированы) имеется несколько локальных минимумов, обнаружены также замкнутые нейтральные кривые – "облака", на которых число Ra достигает своего минимального значения. Появление облаков приводит к резкому уменьшению критического числа Рэлея. При $Rs < 0$, $Ra > 0$ увеличение амплитуды модуляции дестабилизирует равновесие и его потеря связана с возникновением лишь P -периодических режимов.

Аналогичная картина имеет место на плоскости (h, Ra) . В случае однокомпонентной жидкости развитие конвекции при $0 \leq h \leq 1$ связано с появлением лишь P -периодических режимов. Увеличение амплитуды модуляции h на отрезке $[0; h_*)$

стабилизирует состояние равновесия, а при $h_* \leq h \leq 1$ – дестабилизирует. Далее, с увеличением Rs на плоскости (h, Ra) существует уже несколько значений h_{*i} , при которых происходит смена лидерства P - и $2P$ -периодических режимов. Когда h мало, на плоскости (α, Ra) имеется один минимум, как и в стационарной конвекции. При достижении амплитудой некоторого значения h_0 на плоскости (α, Ra) появляются замкнутые области неустойчивости – облака, на которых число Рэлея достигает минимального значения. Так, при $Rs = 50$, $\omega = 2$, $h_0 \approx 0,2$ минимальное критическое число Рэлея, которое соответствует в данном случае $2P$ -периодическому течению, приблизительно в 8 раз меньше критического числа Рэлея в стационарной конвекции ($h = 0$).

В настоящей работе исследуется околочитическое поведение вторичных P - и $2P$ -периодических режимов конвекции в бинарной смеси. Для исследования периодических режимов применяется метод Ляпунова – Шмидта.

Аналогичная задача в случае однокомпонентной жидкости исследована в [2–4]. В стационарном случае задача о возникновении вторичных стационарных и автоколебательных режимов конвекции в горизонтальном слое жидкости с примесью изучена в [5–7].

1. Постановка задачи. Рассмотрим бесконечный горизонтальный слой вязкой несжимаемой жидкости толщиной L , содержащей примесь. Границы будем считать недеформируемыми, свободными (касательные напряжения отсутствуют), изотермическими, с заданным значением концентрации примеси. Пусть слой как единое целое совершает вертикальные колебания так, что в системе координат, связанной с ним, ускорение силы тяжести изменяется по закону $g_f = g(1 + h \cos \Omega t')$, где h , Ω – амплитуда и частота модуляции.

Уравнение состояния жидкости имеет вид $\rho' = \rho_0(1 - \beta T' + \beta_s S')$ где ρ_0 – средняя плотность, соответствующая некоторым фиксированным средним значениям температуры T' и концентрации примеси S' , β – коэффициент теплового расширения, β_s – его концентрационный аналог.

Уравнения Навье – Стокса в приближении Буссинеска и граничные условия запишем в виде [8]

$$\frac{d\mathbf{V}'}{dt'} + (\mathbf{V}', \Delta)\mathbf{V}' = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p' + \nu \Delta \mathbf{V}' + g_f (\beta T' - \beta_s S') \boldsymbol{\gamma} \quad (1.1)$$

$$\frac{dT'}{dt'} + \mathbf{V}' \nabla T' = \chi \Delta T', \quad \frac{dS'}{dt'} + \mathbf{V}' \nabla S' = D \Delta S', \quad \text{div} \mathbf{V}' = 0$$

$$\frac{\partial V'_{x'}}{\partial z'} + \frac{\partial V'_{z'}}{\partial x'} = 0, \quad V'_{z'} = 0, \quad z = 0, L$$

$$T' = T'_1, \quad S' = S'_1, \quad z' = 0, \quad T' = T'_2, \quad S' = S'_2, \quad z' = L$$

Здесь штрихи означают размерные величины: \mathbf{V}' – вектор относительной скорости жидкости, p – давление, T' – температура, S' – концентрация примеси (соленость), χ – коэффициент температуропроводности, D – коэффициент диффузии примеси, $\boldsymbol{\gamma}$ – единичный вектор, направленный вертикально вверх.

В состоянии равновесия имеем

$$\mathbf{V}' = 0,$$

$$T'_0 = Az' + B, \quad S'_0 = Cz' + D, \quad P'_0 = \rho g_f \int_0^z (\beta T'_0 - \beta_s S'_0) dz' + F$$

$$A = (T'_2 - T'_1)/L, \quad B = T'_1, \quad C = (S'_2 - S'_1)/L, \quad D = S'_1$$

Здесь T'_1, T'_2, S'_1, S'_2 – температура и концентрация примеси на нижней и верхней границах слоя.

Исключая давление p' из системы (1.1) и вводя функцию тока $\psi = \psi(t, x, z)$, получим следующую безразмерную систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta\psi}{dt} - \sigma\Delta^2\psi + \sigma Ra(1+h\cos\omega t)\frac{\partial T}{\partial x} - \sigma Rs(1+h\cos\omega t)\frac{\partial S}{\partial x} &= \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial z} - \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial z} &= \Delta T \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial S}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial S}{\partial z} = \tau\Delta S$$

$$\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = T = S = 0, \quad z = 0; 1$$

$$Ra = \frac{\beta g AL^4}{\nu\chi}, \quad Rs = \frac{\beta_s g CL^4}{\nu\chi}, \quad \tau = \frac{D}{\chi}, \quad \sigma = \frac{\nu}{\chi}, \quad \omega = \frac{L^2\Omega}{\chi}$$

$$(x, z) = \frac{(x', z')}{L}, \quad T = \frac{T'}{At}, \quad S = \frac{S'}{CL}, \quad \psi = \frac{\psi'}{\chi}$$

$$V = \frac{LV'}{\chi}, \quad t = \frac{\chi t'}{L^2}, \quad p = \frac{L^2 p'}{\nu\chi\rho_0}$$

Здесь Ra, Rs – температурное и концентрационное числа Рэлея, σ – число Прандтля.

Представим решение (ψ, T, S) системы (1.2) в виде

$$\psi = \psi', \quad T = T_0 + T', \quad S = S_0 + S', \quad Ra = Ra_* + \varepsilon^2 \quad (1.3)$$

где Ra_* – критическое число Рэлея, определяемое линейной задачей [1]. Тогда систему (1.2) можно записать в виде векторного уравнения

$$\frac{dM}{dt} \mathbf{U} + A_t \mathbf{U} = K(\mathbf{U}, \mathbf{U}) + \varepsilon^2 B\mathbf{U} \quad (1.4)$$

$$\mathbf{U} = 0, \quad D\mathbf{U} = 0 \quad (z = 0, 1) \quad (1.5)$$

$$\mathbf{U} = (\psi, T, S), \quad M\mathbf{U} = (\Delta\psi, T, S), \quad D = \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

$$K(\mathbf{U}, \mathbf{U}) = \left(\frac{D(\Delta\psi, \psi)}{D(x, z)}, -\frac{D(T, \psi)}{D(x, z)}, -\frac{D(S, \psi)}{D(x, z)} \right) \quad (1.6)$$

$$P(\omega t) = 1 + h \cos \omega t$$

$$A_t \mathbf{U} = \left(-\sigma\Delta^2\psi + \sigma Ra_* P(\omega t)\frac{\partial T}{\partial x} - \sigma Rs P(\omega t)\frac{\partial S}{\partial x}, -\Delta T + \frac{\partial\psi}{\partial x}, -\tau\Delta S + \frac{\partial\psi}{\partial x} \right)$$

$$B\mathbf{U} = \left(-P(\omega t)\frac{\partial T}{\partial x}, 0, 0 \right)$$

Считаем, что оператор-функции A, M, B, K определены на множестве вектор-функций \mathbf{U} , удовлетворяющих краевому условию (1.5) и достаточно гладких.

2. Вторичные P - и $2P$ -периодические режимы. Будем разыскивать решения ψ, T, S

задачи (1.4)–(1.6), периодические по x, z, t , с периодами $2\pi/\alpha, 2, 2\pi/\omega$ ($4\pi/\omega$), такие, что ψ нечетна по x, z ; T, S четны по x и нечетны по z .

Для исследования вторичных P -периодических режимов, ответвляющихся от основного (Ψ_0, T_0, S_0) при переходе числа Рэлея через критическое значение Ra_* , применим метод Ляпунова – Шмидта.

Решение (1.5)–(1.6) ищем в виде

$$U(x, z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(x, z, t) \epsilon^k \quad (2.1)$$

где $U_k(x, z, t)$ – P -периодические по времени вектор-функции, $P = 2\pi/\omega$.

Подставляя (2.1) в систему (1.4)–(1.6) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ϵ , получим

$$\frac{dM}{dT} U_k + AU_k = \sum_{r+s=k} K(U_r, U_s) + BU_{k-2} \equiv f_k \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.2)$$

индекс k соответствует номеру уравнения системы. При этом $U_k = 0$, если $k < 0$.

Для существования P -периодического решения системы (2.2) необходимо и достаточно выполнения условия ортогональности

$$\langle (f_k, \Psi_*) \rangle = \frac{1}{P} \int_0^P (f_k, \Psi_*)_E dt = \frac{1}{P} \int_0^P \int_{-2\pi/\alpha}^{2\pi/\alpha} f_k \Psi_* dx dz dt = 0 \quad (2.3)$$

Скалярное произведение в (2.3) определено следующим образом: для произвольных вектор-функций $U = (\psi, T, S)$, $U' = (\psi', T', S')$

$$(U, U')_E = ((\psi, T, S), (\psi', T', S'))_E = (\psi, \psi')_{L_2} + (T, T')_{L_2} + (S, S')_{L_2}$$

Вектор-функция $\Psi_* = (\varphi_*(t), T_*(t), S_*(t))$ – решение сопряженной задачи

$$\frac{dM}{dt} \Psi_* + A_t^* \Psi_* = 0 \quad (2.4)$$

$$A_t^* \Psi_* = \left(\sigma \Delta^2 \varphi_* - \frac{\partial T_*}{\partial x} - \frac{\partial S_*}{\partial x}, \Delta T - \sigma R a_* P(\omega t) \frac{\partial \varphi_*}{\partial x}, \tau \Delta S_* + \sigma R s P(\omega t) \frac{\partial \varphi_*}{\partial x} \right)$$

Последовательно решая систему (2.2), находим U_k . При $k = 1$ система линейная

$$\frac{dM U_1}{dt} + A_t U_1 = 0 \quad (2.5)$$

и служит для определения критических значений Ra_* в зависимости от параметров рассматриваемой системы [1]. Ее решение имеет вид

$$U_1 = \gamma_1 \varphi \sin \pi n z \quad (2.6)$$

$$\varphi = (\Psi_0, T_0, S_0) = (\psi(t) \sin \alpha x, T(t) \cos \alpha x, S(t) \cos \alpha x)$$

Здесь γ_1 – неизвестная константа – амплитуда вторичного режима, подлежащая определению. При $k = 2$ имеем

$$\frac{dM U_2}{dt} + A_t U_2 = K(U_1, U_1) \equiv \frac{1}{2} \pi n \alpha \gamma_1^2 \sin 2\pi n z f_2 \quad (2.7)$$

$$f_2 = (0, \psi(t)T(t), \psi(t)S(t))$$

Общее решение уравнения (2.7) имеет вид

$$U_2 = \gamma_2 \varphi + \gamma_1^2 U_2^\circ$$

где φ определяется из (2.6), U_2° есть частное P ($2P$ -) периодическое решение неоднородной задачи (2.7)

$$U_2^\circ = \mathbf{W}(t) \sin 2\pi n z \quad (2.8)$$

$$\mathbf{W}(t) = (0, T^\circ, S^\circ)$$

$$T^\circ(t) = \frac{\alpha \pi n}{2} e^{-4\pi^2 n^2 t} \left(\Phi(t) + \frac{e^{-4\pi^2 n^2 P}}{1 - e^{-4\pi^2 n^2 P}} \Phi(P) \right)$$

$$\Phi(t) = \int_0^t \psi(t) T(t) e^{4\pi^2 n^2 t} dt$$

$$S^\circ(t) = \frac{\alpha \pi n}{2} e^{-4\pi^2 n^2 t} \left(\Phi_s(t) + \frac{e^{-4\pi^2 n^2 P}}{1 - e^{-4\pi^2 n^2 P}} \Phi_s(P) \right)$$

$$\Phi_s(t) = \int_0^t \psi(t) S(t) e^{4\pi^2 n^2 t} dt$$

При $k = 3$ система (2.2) принимает вид

$$\frac{dM\mathbf{U}_3}{dt} + A_1 \mathbf{U}_3 = K^\circ(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2) B \mathbf{U}_1 = \alpha \sin \pi n z \mathbf{f}_3 \quad (2.9)$$

$$K^\circ(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2) = K(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2) + K(\mathbf{U}_2, \mathbf{U}_1),$$

$$\mathbf{f}_3 = (\gamma_1 P(\omega t) \sigma T(t) \sin \alpha x, 2\gamma_1 \gamma_2 \pi n \psi(t) T(t) \cos \pi n z + 2\gamma_1^3 \pi n T^\circ(t) \psi(t) \cos \alpha x \cos 2\pi n z, 2\gamma_1 \gamma_2 \pi n \psi(t) S(t) \cos \pi n z + 2\gamma_1^3 \pi n S^\circ(t) \psi(t) \cos \alpha x \cos 2\pi n z)$$

Записывая условие разрешимости для системы (2.9), определяем амплитуду γ_1 вторичного P -периодического течения

$$\gamma_1^2 = \frac{2\sigma \langle (1 + h \cos \omega t) T \psi^* \rangle}{\alpha \pi^2 n^2 (\langle \psi T^\circ T^* \rangle + \langle \psi S^\circ S^* \rangle)} \quad (2.10)$$

где $\psi^*(t)$, $T^*(t)$, $S^*(t)$ – решение сопряженной системы (2.4). Из условия разрешимости системы, полученной приравниванием коэффициентов при ε^4 задачи (2.2), следует, что $\gamma_2 = 0$. Следовательно, решение (2.1) можно записать в виде

$$U_{00} = \varepsilon \gamma \varphi_1 + \varepsilon^2 \gamma_1^2 U_2^0 + O(\varepsilon^3), \quad \varepsilon = |Ra - Ra_*|^{1/2}, \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad (2.11)$$

От знака γ_1 зависит характер ветвления $P - (2P)$ периодических течений. Если $\gamma_1^2 > 0$, то при переходе числа Рэлея Ra через критическое значение Ra_* возникает пара $P - (2P)$ периодических вторичных течений (2.11), т. е. ветвление сверхкритическое. Если $\gamma_1^2 < 0$, то при переходе числа Рэлея через критическое Ra_* гибнет пара $P - (2P)$ периодических течений (2.11), т. е. ветвление докритическое. В этом случае в соотношении (1.3) параметр ε^2 следует заменить на $-\varepsilon^2$.

3. Устойчивость вторичного течения. Для исследования устойчивости вторичного течения U_{00} , определяемого выражением (2.11), положим в системе (1.4)–(1.6) $U = U_{00} + U'$, где U' – вектор бесконечно малых возмущений. Линеаризуя полученную

систему, приходим к следующей:

$$\frac{dMU'}{dt} + AU' = K^\circ(U_{00}, U') + \varepsilon^2 BU' \quad (3.1)$$

Обоснованию метода линеаризации в задаче устойчивости диссипативных сплошных сред посвящена работа [12].

Решение системы (3.1) разыскиваем в виде $U' = e^{\lambda t}U$, U – периодическая по времени вектор-функция с периодом P . Из системы (3.1) получим спектральную задачу

$$\frac{dMU}{dt} + AU = -\lambda MU + K^\circ(U_{00}, U) + \varepsilon^2 BU \quad (3.2)$$

Будем разыскивать решение U системы (3.2) и собственное значение λ в виде рядов

$$U = \sum_{k=1}^{\infty} U_k \varepsilon^k, \quad \lambda = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \varepsilon^k, \quad \varepsilon^2 = |Ra - Ra_*| \quad (3.3)$$

Аналогично предыдущей процедуре из условия разрешимости полученной системы уравнений при $k = 3$ определяем первый отличный от нуля член ряда (3.5)

$$\lambda_2 = \frac{2\alpha\sigma \langle (1 + h \cos \omega t) T \psi^* \rangle}{\theta^2 \langle \psi, \psi^* \rangle - \langle T \ T^* \rangle - \langle S \ S^* \rangle} \quad (3.4)$$

Таким образом, имеем $\lambda = \lambda_2 |Ra - Ra_*| + O(\varepsilon^3)$.

Характер возмущений во времени определяется вещественной частью λ : отрицательной вещественной части соответствуют затухающие возмущения, положительной – рост, а следовательно, неустойчивость исследуемого режима.

Аналогичным путем исследуем устойчивость основного течения $\psi = 0$, $T = T_0$, $S = S_0$, в результате получим первый отличный от нуля член ряда инкремента затухания

$$\lambda_2^\circ = -\frac{\sigma\alpha \langle (1 + h \cos \omega t) T \psi^* \rangle}{\theta^2 \langle \psi, \psi^* \rangle - \langle T \ T^* \rangle - \langle S \ S^* \rangle} \quad (3.5)$$

Таким образом, $\lambda' = \lambda_2^\circ |Ra - Ra_*| + o(\varepsilon^2)$. Из выражений (3.4) и (3.5) видно, что $\lambda_2 = -2\lambda_2^\circ$, т. е. происходит обмен устойчивостью между основным течением и возникающим вторичным $P - 2P$ -периодическим режимом.

4. Расчет периодических течений. Для отыскания P -периодических течений уравнения (2.5) воспользуемся методом цепных дробей (см. библиографию в [1]). Запишем (2.5) в виде

$$\begin{aligned} \dot{\psi}(t) + \sigma\theta^2\psi(t) + \frac{\alpha\sigma}{\theta^2} Ra(1 + h \cos \omega t)T(t) - \frac{\alpha\sigma}{\theta^2} Rs(1 + h \cos \omega t)S(t) &= 0 \\ \dot{T}(t) + \theta^2 T(t) + \alpha\psi(t) &= 0, \quad \dot{S}(t) + \tau\theta^2 S(t) + \alpha\psi(t) &= 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

Решение $(\psi(t), T(t), S(t))$ системы (4.1) разыскиваем в виде рядов Фурье

$$(\psi, T, S) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (f_k, T_k, S_k) e^{i\omega k t} \quad (4.2)$$

$$(f_{-k}, T_{-k}, S_{-k}) = (\bar{f}_k, \bar{T}_k, \bar{S}_k)$$

Здесь черта обозначает комплексно-сопряженную величину.

Коэффициенты T_k удовлетворяют бесконечной системе линейных алгебраических

уравнений

$$a_k T_k + c_{k-1} T_{k-1} + c_{k+1} T_{k+1} = 0 \quad (4.3)$$

$$S_k = \frac{\theta^2 + i\omega k}{\tau\theta^2 + i\theta k} T_k, \quad f_k = -\frac{\theta^2 + i\omega k}{\alpha} T_k$$

$$a_k = \sigma\theta^4 - \frac{\alpha^2\sigma Ra}{\theta^2} - \omega^2 k^2 + \frac{\alpha^2\sigma Rs(\tau\theta^4 + \omega k^2)}{\theta^2(\tau^2\theta^4 + \omega^2 k^2)} + i\omega k \left(\theta^2(1 + \sigma) + \frac{\alpha^2\sigma Rs(\tau - 1)}{\tau\theta^4 + \omega^2 k^2} \right)$$

$$c_k = -\frac{\alpha^2\sigma Ra h}{2\theta^2} + \frac{\alpha^2\sigma Rs h(\tau\theta^4 + \omega^2 k^2)}{2\theta^2(\tau^2\theta^4 + \omega^2 k^2)} + i \frac{\alpha^2\sigma Rs h\omega k(\tau - 1)}{2(\tau^2\theta^4 + \omega^2 k^2)}$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Разыскиваем нетривиальные решения системы (4.3), такие, что $|T_k| \rightarrow 0$ при $|k| \rightarrow \infty$. В этом случае $|T_k| |k|^l \rightarrow 0$ при $|k| \rightarrow \infty$ для любого целого l , отсюда следует сходимость ряда (4.2) и возможность почленного дифференцирования.

Введем обозначение

$$g_k = T_k / T_{k-1}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.4)$$

Тогда система (4.3) примет вид

$$a_k + \frac{c_{k-1}}{g_k} + c_{k+1} g_{k+1} = 0$$

Отсюда выводим представление для g_k

$$g_k = -\frac{c_{k-1}}{a_k - \frac{c_k c_{k+1}}{a_{k+1} - \frac{c_{k+1} c_{k+2}}{a_{k+2} - \dots}}} \quad (4.5)$$

Решение системы (4.3) с $|T_k| \rightarrow 0$ при $|k| \rightarrow \infty$ единственно с точностью до постоянного множителя и с использованием соотношения (4.4), дается формулами

$$T_0 = 1, \quad T_1 = g_1, \quad T_2 = g_1 g_2, \dots, \quad T_n = g_1 g_2 \dots g_n \quad (4.6)$$

Коэффициенты S_k, f_k определяются через T_k по формулам (4.3). Таким образом, используя соотношения (4.4)–(4.6), определяем решение $U(t) = (\psi, T, S)$. Аналогично находится P -периодическое решение сопряженной системы (2.4).

Для отыскания $2P$ -периодических режимов системы (4.1) решение $U(t)$ ищем в виде

$$U(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \mathbf{q}_{2k+1} e^{i/2 \omega (2k+1)t}, \quad \mathbf{q}_{2k+1} = (f'_{2k+1}, T'_{2k+1}, S'_{2k+1}) \quad (4.7)$$

Коэффициенты \mathbf{q}_{2k+1} находим из системы

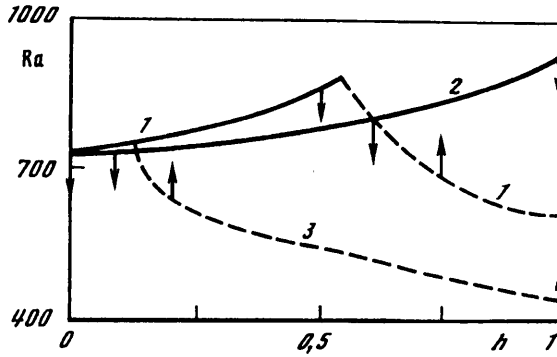
$$a'_{2k+1} T'_{2k+1} + c'_{2k-1} T'_{2k-1} + c'_{2k+3} T'_{2k+3} = 0 \quad (4.8)$$

$$a'_{2k+1} = a_{2k+1}(\omega/2), \quad c'_{2k-1} = c_{2k-1}(\omega/2), \quad S'_{2k+1} = S_{2k+1}(\omega/2)$$

$$f'_{2k+1} = f_{2k+1}(\omega/2), \quad T'_{2k+1} = T_{2k+1}(\omega/2)$$

Аналогично предыдущему, делая в (4.8) замену

$$g_{2k+1} = T'_{2k+1} / T'_{2k-1} \quad (4.9)$$



Фиг. 1. Зависимости критического значения числа Рэлея Ra от амплитуды модуляции h . Сплошные кривые соответствуют P -периодическим, штриховые – $2P$ -периодическим течениям. $Rs = 0,9$, $\omega = 5, 10, 2$ (кривые 1–3)

получаем выражение для g_{2k+1} в виде цепной дроби

$$g_{2k+1} = - \frac{c'_{2k-1}}{a'_{2k+1} - \frac{c'_{2k+3}c'_{2k+1}}{a'_{2k+3} - \frac{c'_{2k+5}c'_{2k+3}}{a'_{2k+5} - \dots}}}$$

отсюда

$$g_1 = - \frac{c'_{-1}}{a'_1 - \frac{c'_1c'_3}{a'_3 - \frac{c'_3c'_5}{a'_5 - \dots}}}}$$

Из выражения (4.9) найдем T'_1 , затем T'_3, T'_5, \dots и т. д.

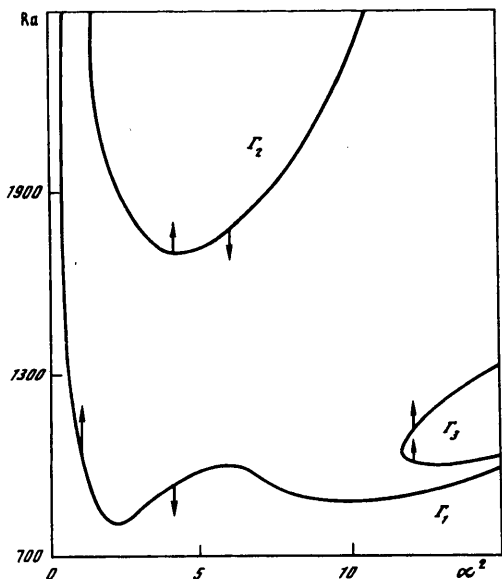
$$T'_3 = g_3 T'_1, \quad T'_5 = T'_3 g_5 = g_3 g_5 T'_1, \dots, \quad T'_{2k+1} = T_1 g_3 g_5 \dots g_{2n+1} \quad (4.10)$$

Таким образом, используя соотношения (4.6), (4.10), находим интегралы в формулах для γ_1^2 и λ_2 в случае P - и $2P$ -периодических течений.

5. Результаты вычислений для морской воды: $\sigma = 10$, $\tau = 0,01$. Нейтральные кривые рассчитаны в [1]. На фиг. 1 представлена зависимость минимизированного по волновому числу α критического значения числа Рэлея от амплитуды модуляции h . Нейтральные кривые соответствуют P - (сплошная линия) и $2P$ - (штриховая линия) периодическим течениям (обычный параметрический резонанс). Заметим, что $2P$ -периодическое течение линейной задачи обладает свойством антипериодичности, т. е. $\psi(t+P) = -\psi(t)$, $T(t+P) = -T(t)$, $S(t+P) = -S(t)$. С механической точки зрения это означает, что под действием модуляции слоя через время P все конвективные валы синхронно меняют направление вращения на противоположное.

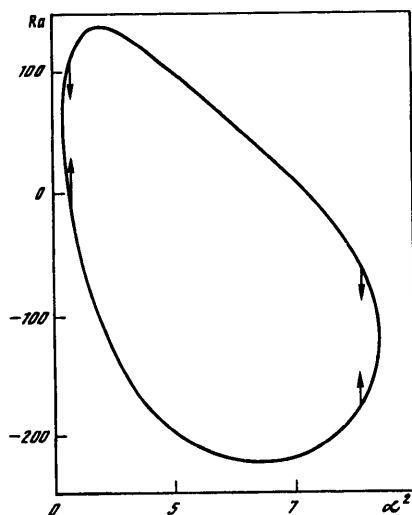
Неустойчивые градиенты солёности, естественно, дестабилизируют равновесие – нейтральная кривая на плоскости (h, Ra) выпуклая (например, при $Rs = -5$, $\omega = 2, 5, 10$), в то время как при $Rs = 0$ она вогнутая. Увеличение h приводит к дестабилизации состояния равновесия. В этом случае потеря устойчивости обусловлена возникновением P -периодических режимов.

Для значения $Rs = -5$ при различных значениях частоты модуляции ω ($\omega = 2, 3, 5$,



Фиг. 2

Фиг. 2. Нейтральные кривые на плоскости α^2 , Ra, соответствующие $2P$ -периодическим режимам. $Rs = 300$, $h = 0,9$, $\omega = 10$



Фиг. 3

Фиг. 3. Нейтральная кривая на плоскости α^2 , Ra при высокочастотной вибрации ($\omega = 10000$, $h = 136$) для P -периодических режимов. $Rs = -7$

10, 20) в интервале амплитуды модуляции $h \in [0; 1]$ (критические числа Рэлея минимизированы по волновому числу α) реализуется мягкая потеря устойчивости ($\gamma_1^2 > 0$, $\lambda_2 < 0$).

На фиг. 1 ($Rs = 0,9$) для значений $\omega = 2$, $h \in [0; 0,12]$ (кривая 3); $\omega = 10$, $h \in [0; 1]$ (кривая 2); $\omega = 5$, $h \in [0; 0,47]$ (кривая 1) имеет место докритическое ветвление ($\gamma_1^2 < 0$). При этом декремент затухания λ_2 отрицателен. Это говорит о том, что первая потеря устойчивости для приведенных значений частоты и амплитуды модуляции связана с возникновением колебательных режимов. Этот факт подтверждается вычислением мультипликаторов системы (4.1). В случае $\omega = 2$, $h \in (0,012; 1)$; $\omega = 5$, $h \in (0,47; 1)$ первая потеря устойчивости связана с возникновением $2P$ -периодических режимов, при переходе числа Ra через критическое значение мягко возникает пара $2P$ -периодических вторичных течений ($\gamma_1^2 > 0$, $\lambda_2 < 0$).

На фиг. 2 представлена нейтральная кривая на плоскости (α^2, Ra) , $Rs = 300$, $h = 0,9$, $\omega = 10$ и соответствует $2P$ -периодическим режимам. Здесь на кривой Γ_1 в интервале волновых чисел $\alpha^2 \in (0; 3,6)$ реализуется мягкая потеря устойчивости; при $\alpha^2 \in (3,6; 12,2)$ – жесткая потеря устойчивости основного режима ($\gamma_1^2 < 0$; $\lambda_2 > 0$); далее, для $\alpha^2 \in (12,2; 15)$ имеет место вновь мягкая потеря устойчивости. При $\alpha^2 \approx 12,2$ происходит смена типа потери устойчивости, при этом амплитуда вторичных режимов обращается в бесконечность. На кривой Γ_3 , как на нижней, так и на верхней ветвях, реализуется сверхкритическое ветвление основного режима. На кривой Γ_2 : для значений $\alpha^2 \in (0; 5)$ – сверхкритическое ветвление основного режима, на интервале $(5; 12)$ – докритическое.

На фиг. 3 представлена замкнутая нейтральная кривая на плоскости (α^2, Ra) в случае высокочастотной вибрации: $\omega \rightarrow \infty$, $h = \delta\omega$ ($\omega = 10000$, $Rs = -7$, $\delta = 0,0316$). Как

показывают результаты вычисления γ_1^2 и λ_2 , с уменьшением числа Ra, при переходе им критического значения, возникает мягко вторичный P -периодический режим, т. е. периодический режим ответвляется внутрь нейтральной кривой. В работе [13], применяя метод усреднения, аналитически показано, что в данном случае имеет место принцип изменения устойчивости.

Заключение. В бесконечном горизонтальном слое жидкости с примесью под действием вертикальных колебаний в случае неустойчивых градиентов солёности ($R_s < 0$) и амплитуд модуляции слоя $h \leq 1$ реализуется мягкая потеря устойчивости основного течения, при малых числах Рэлея $Ra > Ra_*$ существуют устойчивые вторичные периодические течения. Для устойчивых градиентов солёности тип потери устойчивости существенно зависит от частоты и амплитуды модуляции слоя (остальные параметры фиксированы). Когда число Рэлея, возрастая, проходит через критические значения, основное течение бинарной жидкости может терять и приобретать устойчивость. При этом либо рождается, либо гибнет пара $P(2P)$ -периодических течений. При достижении амплитудой модуляции некоторого значения h_* тип потери устойчивости меняется. При этом амплитуда вторичных течений в окрестности h_* меняет знак, обращаясь в бесконечность при $h = h_*$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Беленькая Л.Х., Юдович В.И.* Численное исследование возникновения конвекции в бинарной смеси под действием периодических по времени внешних сил. Ростов н/Д, 1981. 74 с. – Деп. в ВИНТИ 04.01.81, № 4–81.
2. *Маркман Г.С.* О возникновении периодических по времени вторичных конвективных течений // Изв. АН СССР. МЖГ. 1973. № 3. С. 58–63.
3. *Маркман Г.С., Юдович В.И.* Возникновение конвекционных режимов двойного периода в периодическом поле внешних сил // ПМТФ. 1972. № 6. С. 65–70.
4. *Маркман Г.С., Уринцев А.Л.* О возникновении конечно-амплитудной конвекции в вибрирующем слое жидкости, нагреваемой сверху // Изв. АН СССР. МЖГ. № 1. 1978. С. 27–35.
5. *Моршнева И.В.* Возникновение конвекции в слое жидкости с примесью. Ростов н/Д., 1981. 24 с. – Деп. в ВИНТИ 10.04.81, № 1574–81.
6. *Veronis G.* On finite amplitude instability in thermohaline convection // J. Marine Res. 1965. V. 23. № 1. P. 1–17.
7. *Veronis G.* Effect of a stabilizing gradient of solute on thermal convection // J. Fluid Mech. 1968. V. 34. Pt. 2. P. 315–336.
8. *Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
9. *Юдович В.И.* Метод линеаризации в гидродинамической теории устойчивости. Ростов н/Д.: Изд-во Рост. ун-та. 1984. 191 с.
10. *Зеньковская С.М.* О влиянии вибрации на возникновение конвекции в бинарной смеси. Ростов н/Д. 1981. 27 с. – Деп. в ВИНТИ 10.04.81. № 1570–81.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
31.I.1995