МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 • 1997

УДК 532.527:532.59

 А.А. АБРАШКИН, Д.А. ЗЕНЬКОВИЧ

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ КЕЛЬВИНА НА ГРАНИЦЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ВИХРЯ

Рассматриваются стационарные волны малой, но конечной амплитуды, распространяющиеся в идеальной жидкости вдоль границы кругового вихря и обладающие некоторой собственной завихренностью. Течение внутри вихревой области изучается с помощью лагранжевых уравнений гидродинамики в комплексной форме при произвольной заданной завихренности возмущений различных порядков. Внешнее потенциальное течение, непрерывно сшивающееся с вихревым и убывающее вдали от вихря, строится в параметрическом представлении. Форма возмущений внутри вихря и на его границе, а также угловая скорость распространения стационарных волн определены вплоть до третьего приближения по малому параметру безразмерной амплитуды возмущений и зависят от заданной завихренности возмущений различных порядков. Полученные результаты иллюстрируются примерами и используются для интерпретации экспериментальных данных.

Волнами Кельвина называют азимутальные волны, распространяющиеся вдоль границы кругового вихря. В случае постоянной завихренности Ω_0 внутри вихревой области угловая скорость распространения линейных волн Кельвина равна $\omega_0 = \frac{1}{2}\Omega_0(m-1)/m$, m – порядок моды [1]. Для $m = 2$ Кирхгоф построил решение, описывающее динамику возмущений конечной амплитуды, согласно которому однородно завихренная область в виде эллипса вращается вокруг своего центра с постоянной угловой скоростью $\Omega_0 AB(A+B)^{-2}$, где A, B – полуоси эллипса [1, 2]. Точное решение Кирхгофа и приближенное, данное Кельвином, долгое время были исключительными примерами, формировавшими представление о динамике двумерных вихревых областей в окружающем потенциальном течении.

Интерес к изучению распределенных вихрей возродился после открытия когерентных структур в турбулентности. Форма равномерно вращающихся областей постоянной завихренности, для которых граница мало отличается от окружности, проанализирована методом возмущений вплоть до третьего приближения в [3] (и независимо в [4]). Сильнонелинейные возмущения границы вихря изучались численно [5, 6]. При однородном распределении завихренности внутри вихревого пятна возмущения потенциальны и их можно рассматривать как потенциальные волны Кельвина.

Вихревые волны Кельвина впервые исследовались в [7, 8]. В этих работах найден класс точных решений уравнений гидродинамики, описывающих эволюцию одиночной области с неоднородным распределением завихренности. Начальная форма вихря при этом может быть в значительной степени произвольной. По мере вращения вокруг центра завихренности область в общем случае деформируется и возвращается через период к своему первоначальному виду. По характеру траекторий частиц внутри ядра вихри были названы птоломеевскими. Вихрь Кирхгофа является их частным случаем. Границей птоломеевских вихрей, вращающихся без изменения формы, служат гипоциклоиды. Для всех гипоциклоидальных вихрей завихренность минимальна в центре ядра и возрастает к границе.

Экспериментально стационарные волны Кельвина наблюдались в [9]. Вихревое ядро создавалось в пространстве между двумя вращающимися дисками. Завихренность, постоянная в основной части ядра, в области границы вихря резко спадала и практически равнялась нулю во внешней области течения. В ходе опытов удалось возбудить несколько первых мод. Как оказалось, угловая скорость волн всегда меньше скорости линейных волн при однородно завихренном ядре, причем относительная разность этих величин достигает 30%.

Для объяснения этого факта птоломеевские вихри, очевидно, не подходят, поскольку их завихренность нарастает по мере приближения к границе. В связи с этим в настоящей работе рассматриваются стационарные слабонелинейные волны Кельвина с более общим распределением завихренности. Предполагается, что завихренность волновых возмущений в каждом порядке по малому параметру – произвольная функция радиальной лагранжевой переменной. Определены линейные и квадратичные по амплитуде отклонений границы поправки к скорости распространения линейных волн. Предложено качественное объяснение экспериментальных результатов [9].

1. Постановка задачи. Рассмотрим одиночную область завихренности Ω, вращающуюся без изменения формы с постоянной угловой скоростью ω в идеальной несжимаемой жидкости. Течение полагаем двумерным, вне вихря оно потенциально.

Вихревое движение удобно изучать во вращающейся с частотой ω системе отсчета. В ней течение стационарно, граница вихря неподвижна, а завихренность внутри нее равна $\Omega - 2\omega$. При стационарном движении жидкости величина завихренности вдоль линии тока $\psi = \mathrm{const}$ остается неизменной и поэтому ее можно задать как некоторую функцию $\Omega(\psi)$. Вне рассматриваемой области течение теперь имеет завихренность -2ω. На границе вихря потребуем выполнения условия непрерывности полной скорости, а относительно его формы будем предполагать, что она незначительно отличается от круговой.

Уравнения двумерной гидродинамики запишем в виде [1, 10, 11]

$$\frac{D(X,\ Y)}{D(a,\ b)} = \frac{D(X_0,\ Y_0)}{D(a,\ b)} = S(a,\ b) \tag{1.1}$$

$$\frac{D(X_t,\ X)}{D(a,\ b)} + \frac{D(Y_t,\ Y)}{D(a,\ b)} = (\Omega - 2\omega)S(a,\ b) \tag{1.2}$$

Здесь $X(a, b, t)$, $Y(a, b, t)$ – текущие координаты жидкой частицы, X_0, Y_0 – ее начальное положение, a, b – лагранжевы переменные, функция $S(a, b)$ имеет смысл объема элементарной жидкой частицы с координатами a, b. Примем, что границе вихревой области на плоскости лагранжевых переменных отвечает значение $b = 0$, а внутренности вихря – полуполоса $0 \leqslant a < 2\pi$, $b \geqslant 0$; $b = \infty$ соответствует центру вихря.

Введем комплексные координаты $W = X + iY$, $\overline{W} = X - iY$ и комплексную скорость $V = W_t$. В новых переменных уравнения (1.1), (1.2) примут вид

$$\frac{D(W,\ \overline{W})}{D(a,\ b)} = -2iS, \quad \frac{D(W_t,\ \overline{W})}{D(a,\ b)} = (\Omega - 2\omega)S \tag{1.3}$$

где $W(a, b, t)$, $V(a, b, t)$ – периодические функции a с периодом 2π.

Воспользуемся еще тем, что движение в выбранной системе отсчета стационарно. В лагранжевых координатах стационарное течение будем искать в виде

$$W = W(q,\ b), \quad V = W_t(q,\ b) = \sigma W_t(q,\ b); \quad q = a + \sigma(b)t$$

Здесь $\sigma(b)$ – функция, подлежащая определению. Поскольку при такой форме задания потока и комплексная скорость, и комплексная координата зависят только от переменных q, b, то эйлерово поле скорости $V(W,\ \overline{W})$ не зависит от времени и, следовательно, течение стационарно. Переменные q, b были введены в работе [12] и названы модифицированными лагранжевыми координатами. В этих переменных уравнения (1.3) запишутся так

$$[W,\ \overline{W}] = -2iS,\quad \sigma[W_q,\ \overline{W}] - \sigma' |W_q|^2 = (\Omega - 2\omega)S \tag{1.4}$$

где квадратные скобки обозначают операцию взятия якобиана по q и b. В силу независимости от времени S и Ω (объем и завихренность жидких частиц сохраняются) обе они в стационарном течении являются функциями только переменной b. Комплексная координата W зависит от q периодически, сама переменная q изменяется вдоль линии тока, а b поперек, так что изолинии b и ψ совпадают. Можно показать, что в стационарном течении $\sigma(b) = S^{-1}(d\psi / db)$, т.е. σ пропорционально потоку жидкости между линиями тока, соответствующими изменению лагранжевой координаты b на единицу.

Перейдем теперь к исследованию на основе системы уравнений (1.4) малых, но конечных возмущений границы вихря при заданном распределении завихренности внутри него $\Omega(b)$.

2. Метод решения. Будем рассматривать движение внутри вихря как возмущения кругового течения вида

$$W_0 = e^{i(q+ib)} = e^{i\eta},\quad b \geqslant 0$$

Физический смысл функции $\sigma(b)$ для такого вихря очевиден – это угловая скорость движения жидких частиц. Вид решения для возмущений будем искать, полагая

$$W = e^{i\eta} + e^{i\overline{\eta}} w(q,\ b) \tag{2.1}$$

Уравнения для неизвестной функции w при этом запишутся так

$$w + iw_q - P(w,\ \overline{w}) - S + e^{-2b} + \text{к.с.} = 0 \tag{2.2}$$

$$\sigma(w_{qq} - iw_{qb}) + \sigma'(w - iw_q + \text{к.с.}) = -(\Omega - 2\omega)S - \lambda' e^{-2b} + R(w,\ \overline{w}) \tag{2.3}$$

$$P = e^{2b}\{iw_q\overline{w}_b + (iw_q - w_b)\overline{w} - |w|^2\}$$

$$R = \sigma e^{2b}\{(w_{qq} + iw_{qb})\overline{w} + w_{qq}\overline{w}_b - w_{qb}\overline{w}_q + w_q(i\overline{w}_b + 2i\overline{w} - \overline{w}_q)\} -$$

$$-\sigma' e^{2b}\{|w_q|^2 + (iw\overline{w}_q + \text{к.с.}) + |w|^2\}$$

Здесь $\lambda = \sigma + \omega$. Вводя функцию $u = \frac{1}{2}\sigma(w + \overline{w})$, из (2.2), (2.3) получим

$$u_{qq} + u_{bb} + \frac{2\sigma' + \sigma''}{\sigma}u = (2\lambda - \Omega)S - \lambda' e^{-2b} + \operatorname{Re} R + \frac{1}{\sigma}\frac{\partial}{\partial b}[\sigma^2(\operatorname{Re} R + e^{-2b} - S)] \tag{2.4}$$

Уравнение (2.4) является «незамкнутым», так как нелинейные члены R и P не удается представить в зависимости только от u. Тем не менее оно удобно для исследования. Представим все функции и неизвестные величины, входящие в уравнения (2.2)–(2.4), в виде рядов по малому параметру ε – отношению амплитуды возмущения к радиусу невозмущенного кругового вихря

$$\{\Omega,\ \sigma,\ \lambda,\ \omega,\ S\} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \{\Omega_n,\ \sigma_n,\ \lambda_n,\ \omega_n,\ S_n\}$$

$$\{w,\ u\} = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \{w_n,\ u_n\},\quad \{P,\ R\} = \sum_{n=2}^{\infty} \varepsilon^n \{P_n,\ R_n\}$$

Нулевому приближению отвечают значения

$$S_0(b) = e^{-2b},\quad \Omega_0 = 2\omega_0 + 2\sigma_0 - \sigma' = 2\lambda_0 - \lambda_0'$$

Функция $\lambda_0(b)$ имеет смысл угловой скорости вращения частиц в лабораторной системе отсчета. Величина ω_0 определится при решении уравнений первого приближения. В случае однородного распределения завихренности внутри круговой области $\Omega_0' = \lambda_0' = 0$.

Течение внутри вихря необходимо продолжить во внешнюю область («склеить» с течением снаружи). На границе потоков потребуем выполнения условия непрерывности скорости.

Удовлетворять условиям на границе вихревой области удобнее уже в лабораторной системе отсчета, где граница вихря равномерно вращается, а течение вне ее потенциально. Траектории жидких частиц в этой системе отсчета $W^*(q, b, t)$ определяются по известному выражению (2.1) для комплексной координаты во вращающейся системе $W(q, b, t)$ домножением на $e^{i\omega t}$

$$W^* = \{e^{i\eta} + w(q,\ b)e^{i\bar\eta}\}e^{i\omega t}, \quad b = \operatorname{Im}\eta \geqslant 0 \tag{2.5}$$

Скорость внутри вихревой области соответственно определяется соотношением

$$V^* = \{i\lambda e^{i\eta} + \sigma w_q(q,\ b)e^{i\bar\eta} + i\lambda w e^{i\bar\eta}\}e^{i\omega t} \tag{2.6}$$

Выражения (2.5), (2.6) параметрически задают распределение скорости $V^*(q,\ b,\ t)|_{b=0}$ в точках границы вихря $W^*(q,\ b,\ t)|_{b=0}$. Для потенциального течения комплексно сопряженная скорость $\bar V^* = X_t - iY_t$ является функцией комплексной координаты W^*. Чтобы удовлетворить этому условию, достаточно так параметрически продолжить функции $\bar V^*$ и W^* во внешность вихря чтобы $\bar V^*$ была только функцией W^* и t.

Для кругового вихря, когда $w = 0$ (нулевое приближение), параметрическое представление потенциального поля скорости имеет вид

$$W^* = \xi e^{i\omega t}, \quad \xi = e^{i(q_0 + ib)}, \quad q_0 = a + \sigma(0)t \tag{2.7}$$

$$\bar V^* = -\frac{i\lambda_0(0)}{\xi}e^{-i\omega t}, \quad |\xi| \geqslant 1 \tag{2.8}$$

Здесь ξ – комплексный параметр. Формулы (2.7), (2.8) определяют поле скорости, спадающее обратно пропорционально расстоянию от центра вихря. На границе вихревой области $|\xi| = 1$ функции W^* и $\bar V^*$, очевидно, непрерывны – см. (2.5), (2.6).

Возмущения первого и более высоких порядков удается потенциально продолжить с границы вихря, предполагая, что во внешней области комплексные координата и скорость являются функциями двух комплексных параметров: $W^* = W^*(\xi,\ \bar\xi,\ t)$, $\bar V^* = \bar V^*(\xi,\ \bar\xi,\ t)$. При двухпараметрическом представлении условие потенциальности течения $\bar V^* = \bar V^*(W^*,\ t)$ принимает вид

$$\frac{D(\bar V^*,\ W^*)}{D(\xi,\ \bar\xi)} = 0 \tag{2.9}$$

3. Линейное приближение. Возмущения первого порядка по ε удовлетворяют уравнениям

$$u_{1qq} + u_{1bb} + \frac{2\sigma_0' - \sigma_0''}{\sigma_0}u_1 = (2\lambda_1 - \lambda_1' - \Omega_1)e^{-2b}, \quad w_{1b} + iw_{1q} + \text{к.с.} = 0, \quad S_1 = 0$$

Их решение, не содержащее линейных по q слагаемых, запишется так

$$u_1 = \sigma_0 \operatorname{Re} w_1 = F_1(b)\cos mq \tag{3.1}$$

$$w_1 = \Phi_1^+(b)e^{imq} + \Phi_1^-(b)e^{-imq}, \quad \Phi_1^\pm = \frac{1}{2}\left[\frac{F_1}{\sigma_0} \pm \frac{1}{m}\left(\frac{F_1}{\sigma_0}\right)'\right] \tag{3.2}$$

где $m \geqslant 2$ – целое положительное число, а функции F_1, λ_1 удовлетворяют уравнениям

$$F_1'' + \left(\frac{2\sigma_0' - \sigma_0''}{\sigma_0} - m^2\right)F_1 = 0, \quad b > 0 \tag{3.3}$$

$$\lambda_1' - 2\lambda_1 + \Omega_1 = 0 \tag{3.4}$$

Чтобы обеспечить малость возмущений в (2.1), величины $\Phi_1^\pm e^b$ должны стремиться к нулю при приближении к центру вихревой области. Уравнение (3.3) является цилиндрическим аналогом уравнения Рэлея в теории линейных волн на сдвиговом потоке. Переход к эйлеровому описанию в уравнениях первого приближения сводится к замене лагранжевой переменной b на величину $-\ln r$, r – радиус, а функция F_1 приобретает смысл амплитуды функции тока возмущений. В эйлеровых переменных уравнение (3.3) преобразуется к виду

$$\frac{d^2F_1}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dF_1}{dr} - \left(\frac{\sigma_0'' + 3\sigma_0'/r}{\sigma_0} + m^2\right)F_1 = 0, \quad \sigma_0 = \sigma_0(r) \tag{3.5}$$

Для волн, описываемых уравнением (3.5), справедлив результат [13], аналогичный теореме Рэлея: нарастающие возмущения в невязком цилиндрическом вихре могут существовать лишь при наличии точек, где завихренность экстремальна. В этих точках обращается в ноль величина $\Omega_0' = 2\sigma_0' - \sigma_0''$.

Параметрическое представление течения вне вихревой области будем искать в виде

$$W^* = e^{i\omega t}\xi\left\{1 + \varepsilon\left[\frac{\Phi_1^+(0)}{\overline{\xi^m}} + \frac{\Phi_1^-(0)}{\xi^m}\right]\right\} + Q(\varepsilon^2), \quad |\xi| > 1 \tag{3.6}$$

$$\overline{V}^* = \frac{-ie^{i\omega t}}{\xi}\left\{\lambda_0(0) + \varepsilon\left[\lambda_1(0) + \frac{\omega_0 + (m+1)\sigma_0(0)}{\xi^m}\Phi_1^+(0) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\omega_0 - (m-1)\sigma_0(0)}{\overline{\xi^m}}\Phi_1^-(0)\right]\right\} + Q(\varepsilon^2) \tag{3.7}$$

При $|\xi| \to \infty$ эти выражения отвечают полю скорости точечного вихря. Чтобы соотношения (3.6), (3.7) удовлетворяли условию потенциальности поля скорости (2.9), необходимо потребовать

$$(\lambda_0 - n\sigma_0)\Phi_1^- + \lambda_0\Phi_1^+ = 0, \quad b = 0$$

Анализ линейных колебаний на границе кругового вихря связан с решением уравнения (3.3). Оно выписывается аналитически только для однородного или кусочно-однородного распределения завихренности. Если величина Ω_0, а значит, и значения σ_0 и λ_0 постоянны, то искомое решение имеет вид

$$F_1 = \sigma_0 e^{-mb}, \quad \Phi_1^+ = 0, \quad \Phi_1^- = e^{-mb} \tag{3.8}$$

$$\omega_0 = \frac{m-1}{2m}\Omega_0 = (m-1)\sigma_0 = \frac{m-1}{m}\lambda_0 \tag{3.9}$$

С учетом этих равенств поле скорости течения вне вихря перепишется так

$$W^* = e^{i\omega t}\xi\left(1 + \frac{\varepsilon}{\xi^m}\right) + Q(\varepsilon^2), \quad |\xi| > 1$$

$$\bar{V}^* = \frac{-ie^{-i\omega t}}{\xi}[\lambda_0 + \varepsilon\lambda_1(0)]$$

Функция $\lambda_1(b)$ задает слабый, порядка амплитуды возмущений границы вихря ε дополнительный азимутальный дрейф жидких частиц. Как и завихренность первого приближения Ω_1, она может быть произвольной. Значение $\lambda_1(0)$ определяет добавку к циркуляции вокруг вихревой области нулевого приближения. Случай $\lambda_1 \equiv 0$ отвечает линейным потенциальным волнам Кельвина.

Вид функции $\sigma_1 = \lambda_1 - \omega_1$ будет найден во втором приближении после вычисления величины ω_1. Все дальнейшее рассмотрение проводится в предположении, что $\Omega_0 =$ $=$ const и решение первого приближения имеет вид (3.8), (3.9). Это позволит получить все необходимые результаты в явном аналитическом виде.

4. Квадратичное приближение. Решение уравнений второго порядка будем искать в виде

$$u_2 = F_{21}(b)\cos mq + F_{22}(b)\cos 2mq$$

$$F_{21}'' - m^2 F_{21} = (\lambda_1'' - 2\lambda_1')e^{-mb} \tag{4.1}$$

$$F_{21}'' - 4m^2 F_{22} = 0 \tag{4.2}$$

Для того чтобы скорость в центре вихря равнялась нулю, необходимо, чтобы (см. (2.5), (2.6))

$$F_{21}e^b, \ F_{22}e^b \to 0, \quad b \to \infty$$

Удовлетворяющее этому условию решение имеет вид

$$F_{21} = \lambda_1 e^{-mb} + 2(m-1)\int_{\infty}^{b} \lambda_1 e^{-2m\tau}d\tau \tag{4.3}$$

$$F_{22} = \alpha\sigma_0 e^{-2mb}$$

При записи (4.3) было отброшено и спадающее к центру вихря решение однородного уравнения (4.1), так как оно совпадает с выражением для F_1 и его учет приведет лишь к переобозначению величины ε. В формуле для F_{22} величина α постоянна, она будет определена при потенциальном продолжении решения во внешность вихря.

Зная F_{21}, F_{22} и используя уравнение неразрывности, найдем выражение для величины w_2.

$$w_2 = \Phi_{21}^{+}e^{imq} + \Phi_{21}^{-}e^{-imq} + \alpha e^{-2m(b+iq)} \tag{4.4}$$

$$\Phi_{21}^{\pm} = \frac{1}{2\sigma_0}\left\{F_{21} \pm \frac{1}{m}F_{21}' - \frac{1}{\sigma_0}\left[\sigma_1 F_1 \pm \frac{1}{m}(\sigma_1 F_1)'\right]\right\} \tag{4.5}$$

Поскольку в формулу для w_2 входят только осциллирующие по q члены, то из уравнений (2.2), (2.3) следует

$$S_2 = -(m-1)^2 e^{-2(m-1)b}, \quad \Omega_2 = 2\lambda_2 - \lambda_2' - 2m\sigma_0 S_2 \tag{4.6}$$

Завихренность второго приближения состоит из двух частей: первая, зависящая от λ_2, связана с азимутальным дрейфом жидких частиц, а вторая, определяемая последним слагаемым, является завихренностью волновых возмущений.

Потенциальное поле скорости вне вихря представим в форме

$$W^* = e^{i\omega t}\xi\left[1+\frac{\varepsilon}{\xi^m}+\varepsilon^2\left(\frac{\overline{\Phi_{21}^+}}{\xi^m}+\frac{\Phi_{21}^-}{\xi^m}+\frac{\alpha}{\xi^{2m}}\right)\right]+O(\varepsilon^3) \tag{4.7}$$

$$\overline{V}^* = \frac{-ie^{i\omega t}}{\xi}\left[\lambda_0+\varepsilon\lambda_1+\varepsilon^2\left(\lambda_2+\frac{\lambda_1-m\sigma_1}{\overline{\xi^m}}+\frac{2\lambda_0\Phi_{21}^+}{\xi^m}-\frac{\alpha\lambda_0}{\overline{\xi^{2m}}}\right)\right]+O(\varepsilon^3),\quad |\xi|>1 \tag{4.8}$$

Коэффициенты σ_1, λ_1, λ_2, $\Phi_{21}^{\pm}$ взяты при $b = 0$. Параметрическое представление поля скорости $\overline{V}^*(W^*,\ t)$ строилось таким образом, чтобы, с одной стороны, функции W^* и $\overline{V}^*$ оставались непрерывными при переходе через границу вихря $|\xi|=1$, а с другой – чтобы слагаемые внутри квадратных скобок (4.8) не нарастали при приближении к бесконечно удаленной точке на плоскости параметра ξ. На расстояниях, существенно превышающих масштаб вихря ($|\xi|\gg 1$), выражения (4.7), (4.8) имеют асимптотики, соответствующие полю скорости точечного вихря.

Из условия потенциальности течения (2.9) следует, что в формулах (4.3), (4.7), (4.8) надо положить

$$\alpha=0,\quad (\lambda_1-m\sigma_1+\lambda_0\Phi_{21}^+)|_{b=0}=0$$

Используя последнее из этих условий, найдем

$$\omega_1 = 2(m-1)\int_0^\infty \lambda_1 e^{-2mb}db \tag{4.9}$$

Таким образом, по известной завихренности первого приближения Ω_1 можно определить функцию λ_1, а следовательно, и линейную поправку к угловой скорости вращения вихревой области. В зависимости от распределения $\lambda_1(b)$ величина ω_1 может быть как положительной, так и отрицательной.

5. Величина квадратичной поправки к угловой скорости вращения вихря. Исследование решений третьего и более высоких приближений не представляет принципиальных трудностей, но связано с проведением чрезвычайно громоздких выкладок. В третьем приближении, в отличие от второго, в выражении для координат траектории жидких частиц уже присутствуют слагаемые, содержащие вторую гармонику по q. Для определения скорости вращения, однако, по-прежнему достаточно знать лишь ту часть полного решения, которая содержит члены с первой гармоникой (т.е. пропорциональные $e^{\pm imq}$).

Опуская схожую с приведенной в предыдущем разделе процедуру вычислений, запишем сразу же окончательную формулу для квадратичной поправки к скорости вращения вихревой области. Она имеет вид

$$\omega_2 = -\frac{1}{2\lambda_0}\int_0^\infty \lambda_1'\{[F_{21}'-(m-2)F_{21}]e^{-mb}-[\sigma_1'-2(m-1)\sigma_1]e^{-2mb}\}db+$$

$$+2(m-1)\int_0^\infty \lambda_2 e^{-2mb}db \tag{5.1}$$

Здесь не входящие под знак интеграла функции берутся при $b = 0$. Величина ω_2 находится по заданному распределению угловой скорости вращения (или завихренности Ω_2) и известному решению второго приближения.

6. Примеры. Потенциальные возмущения на границе однородно завихренной области (потенциальные волны Кельвина) соответствуют случаю $\Omega_1 = \Omega_2 = 0$. Линейные возмущения определяются выражениями (3.8), (3.9). Из равенства (3.4) следует, что $\lambda_1 = 0$, а следовательно, и $\omega_1 = 0$. Значения λ_2 и ω_2 определяются из соотношений (4.6), (5.1). Они равны соответственно

$$\lambda_2 = -\tfrac{1}{2}(m-1)\Omega_0 e^{-2(m-2)b}, \quad \omega_2 = -\tfrac{1}{4}(m-1)\Omega_0 \tag{6.1}$$

что совпадает с результатами [3, 4].

Стационарные птоломеевские вихри [7, 8] описываются точным решением уравнений гидродинамики. Для вихрей неизменной формы во вращающейся системе отсчета это решение записывается так

$$W = \xi + d(\bar{\xi})^{m-1}, \quad \xi = e^{i(a+ib+\sigma t)}, \quad b \geqslant 0 \tag{6.2}$$

Здесь $\sigma = \text{const}$, d – амплитуда возмущения круговой границы $(d \leqslant 1/(m-1))$. Случай $m = 2$ отвечает классическому решению для эллиптического вихря Кирхгофа. Для $m \geqslant 3$ выражение (6.2) описывает семейство вихрей гипоциклоидальной формы с числом выступов m. Если $d = 1/(m-1)$, профиль границы имеет заострения.

Завихренность внутри вихревого ядра распределена следующим образом:

$$\Omega = \frac{2m\sigma}{1 - d^2(m-1)^2 e^{-2(m-2)b}} \tag{6.3}$$

Если для эллиптического вихря завихренность постоянна, то для остальных членов семейства она минимальна в центре ядра и возрастает к границе. При малом отличии гипоциклоидального вихря от кругового ($\varepsilon = d \ll 1$) выражение (6.3) представимо рядом

$$\Omega = 2m\sigma[1 + \varepsilon^2(m-1)^2 e^{-2(m-2)b}] + O(\varepsilon^4) \tag{6.4}$$

Итак, для стационарных птоломеевских вихрей

$$\Omega = 2m\sigma_0, \quad \Omega_1 = 0, \quad \Omega_2 = 2m(m-1)^2 \sigma e^{-2(m-2)b}$$

Используя эти выражения, из (3.4), (4.6) легко получить, что $\omega_1 = \omega_2 = 0$.

Из точного решения [7, 8] известно, что для гипоциклоидальных вихрей $\omega = (m - 1)\sigma$ и, следовательно, частота вращения вихря не зависит от амплитуды «лепестков». Выполненные выше расчеты подтверждают этот результат.

В линейном пределе угловая скорость вращения птоломеевского вихря равна $\tfrac{1}{2}\Omega_0(m-1)/m$ и совпадает со скоростью линейных волн Кельвина.

Рассмотрим также случай $\Omega_1 = \delta e^{-\gamma b}$, $\gamma > 0$; $\Omega_2 = 0$. В зависимости от знака величины δ завихренность может либо нарастать, либо убывать при приближении к границе вихря. Подставляя выбранное представление для завихренности в соотношения (3.4), (4.9), получим

$$\lambda_1 = \frac{\delta}{\gamma+2} e^{-\gamma b}, \quad \omega_1 = \frac{2\delta(m-1)}{(\gamma+2)(\gamma+2m)}$$

Есл $\delta > 0$, то угловая скорость вращения вихревой области больше скорости линейных волн, а при $\delta < 0$ она соответственно меньше величины ω_0. Последняя ситуация качественно моделирует условия эксперимента [9]. В случае $\delta < 0$ азимутальное дрейфовое течение $\lambda_1(b)$ направлено против основного потока, отчего угловая скорость волн Кельвина уменьшается ($\omega_1 < 0$). В следующем порядке находим

$$\lambda_2 = -\frac{1}{2}(m-1)\Omega_0 e^{-2(m-2)b}$$

$$\omega_2 = -\frac{(m-1)\Omega_0}{4} - \frac{\delta^2\gamma(m-1)[\gamma^2 + 2m\gamma + 2m(m-1)]}{\Omega_0(\gamma+2)^2(\gamma+2m)^2(\gamma+m)}$$

При $\delta = 0$ эти выражения совпадают с (6.1). Азимутальное дрейфовое течение $\lambda_2(b)$ является аналогом стоксова дрейфа для гравитационных поверхностных волн. Величина ω_2 не зависит от знака δ и всегда отрицательна. Таким образом, учет квадратичных по амплитуде слагаемых приводит к дополнительному снижению угловой скорости вращения вихря. Ее уменьшение станет еще более значительным, если положить, что Ω_2 отрицательна.

Настоящий теоретический анализ в силу своего асимптотического характера не может быть непосредственно сопоставлен с экспериментальными результатами [9], где отклонения завихренности от постоянной величины не являлись малыми. Тем не менее построенное решение выявляет механизм уменьшения угловой скорости вихря с «лепестками» из-за убывания завихренности на его периферии, что соответствует экспериментальным наблюдениям.

Заключение. Определены линейные и квадратичные поправки к скорости распространения стационарных слабозавихренных возмущений вдоль границы однородно завихренной круговой области (нелинейных волн Кельвина). Если возмущения завихренности противоположны по знаку ее фоновой величине, то угловая скорость волн падает с ростом амплитуды.

Данная работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-00585).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lamb H.* Hydrodynamics. Cambridge: Univ. Press, 1932. 738 p. (Рус. перев.: *Ламб Г.* Гидродинамика. М., Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.)
2. *Kirchhoff G.* Vorlesungen uber mathematische Physik. Mechanik. Leipzig: Teubner, 1876. 466 S. (Рус. перев.: Кирхгоф Г. Механика. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 402 с.)
3. *Su C.H.* Motion of fluid with constant vorticity in a singly-connected region // Phys. Fluids. 1979. V. 22. № 10. P. 2032–2033.
4. *Миндлин И.М.* О волнах в однородной несжимаемой жидкости, индуцированных вихрем // ПММ. 1984. Вып. 5. Т. 48. С. 761–767.
5. *Burbea J., Landau M.* The Kelvin waves in vortex dynamics and their stability // J. Comput. Phys. 1982. V. 45. № 1. P. 127–156.
6. *Deem G., Zabusky N.* Vortex waves: stationary "V states", interactions, recurrence and breaking // Phys. Rev. Lett. 1978. V. 40. № 13. P. 859–862.
7. *Абрашкин А.А., Якубович Е.И.* О плоских вихревых течениях идеальной жидкости // ДАН СССР. 1984. Т. 276. № 1. С. 76–78.
8. *Абрашкин А.А., Якубович Е.И.* О нестационарных вихревых течениях идеальной несжимаемой жидкости // ПМТФ. 1985. № 2. С. 57–64.
9. *Ахметов А.Г., Тарасов В.Ф.* О структуре и эволюции вихревых ядер // ПМТФ. 1986. № 5. С. 68–73.
10. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. Ч. 1. М.: Физматгиз, 1963. 583 с.
11. *Stoker J.* Water waves. The mathematical theory with applications. N.Y.: Intersci. Publ., 1957. 567 p. (Рус. перев.: Стокер Дж. Волны на воде. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. 617 с.)
12. *Абрашкин А.А., Зенькович Д.А.* Вихревые стационарные волны на сдвиговом течении // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1990. Т. 26. № 1. С. 35–46.
13. *Michalke A., Timme A.* On the inviscid instability of certain twodimensional vortex-type flows // J. Fluid Mech. 1967. V. 29. Pt 4. P. 647–666.

Нижний Новгород

Поступила в редакцию
26.III.1996