

УДК 532.526.4:536.24

© 1997 г. Б.И. КУРМАНОВ, Г.Л. ПОДВИДЗ

РАСЧЕТ ВНЕШНЕЙ ТЕПЛОТДАЧИ В РЕШЕТКАХ ТУРБОМАШИН С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РАЗЛИЧНЫХ МОДЕЛЕЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Определяются параметры течения газа и локального коэффициента теплоотдачи в плоских решетках турбомашин на базе уравнений Эйлера и пограничного слоя. Двумерное течение невязкого газа рассчитывается путем интегрирования нестационарной системы уравнений по неявной монотонной схеме Годунова. Для двумерного турбулентного пограничного слоя вдоль контура профиля применены четыре комбинации дифференциальных моделей турбулентности. Вблизи стенки использованы известные пристеночные функции. Расчетные значения давления газа и локального коэффициента внешней теплоотдачи на контуре профиля сопоставлены с экспериментальными данными на трех турбинных решетках.

Определение газодинамической эффективности и теплового состояния охлаждаемых лопаток турбин основывается, как правило, на расчетах внешнего обтекания плоских решеток и локального коэффициента теплоотдачи. Решение этой задачи путем численного интегрирования системы уравнений Навье – Стокса [1, 2] связано с большими затратами времени ЭВМ.

В данной работе применен один из наиболее распространенных в настоящее время подходов, заключающийся в последовательном решении систем уравнений Эйлера и пограничного слоя. Для численного интегрирования уравнения Эйлера используется неявная разностная схема, аналогичная [3].

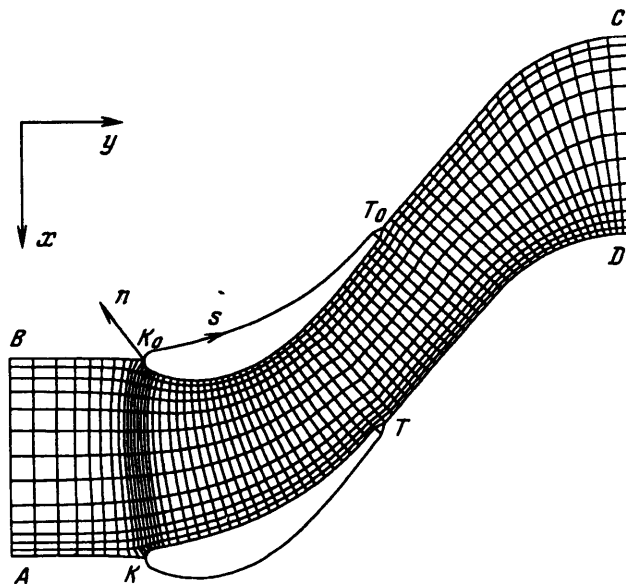
Для решения уравнений пограничного слоя используются различные методы и модели турбулентности [4]. Широкое распространение получила программа, разработанная на основе конечно-разностной аппроксимации [5] и модифицированная введением в нее дифференциальной двухпараметрической модели турбулентности ($k - \epsilon$) Лэма и Бремборста для низких чисел Рейнольдса [6, 7].

В данной работе рассчитывается двумерный пограничный слой на контуре профиля турбинной решетки с различными математическими моделями турбулентности. Для внешней области слоя используются: однопараметрическая дифференциальная модель для коэффициента турбулентной вязкости ν_t [8]; двухпараметрическая модель ($k - \epsilon$) в стандартной форме и в модификации для низких чисел Re [7]. Для внутренней области слоя вблизи стенки используются: алгебраическая модель для ν_t [9], полуэмпирические аппроксимации для безразмерных k^+ , ϵ^+ [10]. Рассматриваются различные сочетания этих моделей по толщине слоя.

1. Расчет двумерного течения невязкого газа в решетке турбинных профилей. Физическая область двумерного течения газа в решетке профилей с прямоугольными координатами x, y (фиг. 1) с помощью преобразования

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y) \quad (1.1)$$

отображается в прямоугольную расчетную область. Уравнения сохранения массы, количества движения и энергии в криволинейной системе координат ξ, η могут быть



Фиг. 1. Область расчета ABCD и сетка двумерного течения газа в решетке профилей

записаны в дивергентной векторной форме [4]

$$\frac{\partial Q^*}{\partial t} + \frac{\partial E^*}{\partial \xi} + \frac{\partial F^*}{\partial \eta} = 0 \quad (1.2)$$

$$Q^* = \frac{1}{J} \begin{vmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{vmatrix}, \quad E^* = \frac{1}{J} \begin{vmatrix} \rho U \\ \rho U u + p \xi_x \\ \rho U v + p \xi_y \\ U(E + p) \end{vmatrix}$$

$$F^* = \frac{1}{J} \begin{vmatrix} \rho V \\ \rho V u + p \eta_x \\ \rho V v + p \eta_y \\ V(E + p) \end{vmatrix}$$

$$E = \rho e + \rho(u^2 + v^2)/2$$

$$U = u \xi_x + v \xi_y, \quad V = u \eta_x + v \eta_y$$

где t – время; ρ – плотность; u, v – проекции скорости газа на оси x, y ; p – давление; E – полная энергия на единицу объема; U, V – контравариантные составляющие вектора скорости газа в системе координат ξ, η .

Для преобразования (1.1) метрические коэффициенты $\xi_x, \xi_y, \eta_x, \eta_y$ и якобиан J вычисляются по соотношениям

$$\xi_x = y_\eta J, \quad \xi_y = -x_\eta J, \quad \eta_x = -y_\xi J, \quad \eta_y = -x_\xi J$$

$$J = 1/(x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)$$

Используются уравнение состояния и дополнительные соотношения калорически

совершенного газа

$$\begin{aligned} \rho &= p / (RT), \quad e = RT / (k - 1) \\ i^* &= kRT / (k - 1) + (u^2 + v^2) / 2 \\ s &= \ln(p / \rho^k), \quad i = c_p T = kRT / (k - 1) \end{aligned} \quad (1.3)$$

где e – внутренняя энергия, i^* – полная энтальпия, s – функция энтропии, k – показатель адиабаты, R – газовая постоянная; i – энтальпия.

В качестве граничных условий задаются: а) на контуре профиля условие непротекания; б) во входном сечении AB – полная энтальпия i^* , энтропия s , угол α_1 набегающего потока с фронтом решетки; в) в выходном сечении CD – постоянное статическое давление $p_2(x) = \text{const}$; г) на линиях BK_0, AK , а также T_0C, TD – условие периодичности течения.

Используется разностная схема третьего порядка точности по координатам и второго по времени, имеющая следующие особенности: а) схема является трехслойной по времени, записывается в дельта-форме, используется приближенная факторизация неявного оператора по координатным направлениям; б) матрицы Якоби для конвективных членов диагонализуются и расщепляются на положительные и отрицательные составляющие в зависимости от знака их собственных значений. Этим учитывается локальная структура потока при обращении неявного оператора; в) при вычислении потоков на границах ячейки используется кусочно-параболическое распределение характеристических переменных по ячейкам сетки, подчиненное условиям монотонности разностной схемы, и процедура распада произвольного разрыва; г) граничные условия при обращении неявного оператора реализуются в неявном виде.

Для конвективных членов уравнения (1.2) введем матрицы Якоби

$$A^* = \frac{\partial E^*}{\partial Q^*}, \quad B^* = \frac{\partial F^*}{\partial Q^*}$$

Обозначим матрицы

$$A = A^* / J, \quad B = B^* / J, \quad Q = JQ^*$$

Неявная процедура интегрирования по времени системы уравнений (1.2) основана на следующем соотношении [3]:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial Q}{\partial t} \right)^{n+1/2} - \Theta \tau \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} \right)^{n+1/2} &= (1-s) \left(\frac{\partial Q}{\partial t} \right)^n + s \left(\frac{\partial Q}{\partial t} \right)^{n-1/2} + \\ + O \left(\left(\Theta - \frac{1}{2} - \frac{s}{2} \right) \tau + \left(\frac{\Theta}{2} - \frac{1}{8} + \frac{s}{8} \right) \tau^2 + \tau^3 \right) \end{aligned} \quad (1.4)$$

где $\tau = t^{n+1/2} - t^{n-1/2}$ – временной шаг; s, Θ – параметры.

При условии

$$s = 2\Theta - 1 \quad (1.5)$$

соотношение (1.4) является однопараметрическим (Θ) семейством трехслойных разностных схем второго порядка аппроксимации по времени.

Матрицы A, B с использованием матриц преобразования S_ξ, S_η приводятся к диагональному виду

$$A = S_\xi \Lambda_A S_\xi^{-1}, \quad B = S_\eta \Lambda_B S_\eta^{-1} \quad (1.6)$$

где диагональные матрицы

$$\Lambda_A = \text{diag}(\lambda_A^1, \lambda_A^2, \lambda_A^3, \lambda_A^4)$$

$$\Lambda_B = \text{diag}(\lambda_B^1, \lambda_B^2, \lambda_B^3, \lambda_B^4)$$

составлены из собственных значений матриц **A**, **B**

$$\lambda_A^1 = \lambda_A^2 = U/J, \quad \lambda_A^3 = U/J + a\sqrt{g_{22}}, \quad \lambda_A^4 = U/J - a\sqrt{g_{22}}$$

$$\lambda_B^1 = \lambda_B^2 = V/J, \quad \lambda_B^3 = V/J + a\sqrt{g_{11}}, \quad \lambda_B^4 = V/J - a\sqrt{g_{11}}$$

$$g_{22} = x_\eta^2 + y_\eta^2, \quad g_{11} = x_\xi^2 + y_\xi^2$$

где a – скорость звука.

Выражения для матриц $S_\xi, S_\xi^{-1}, S_\eta, S_\eta^{-1}$ согласуются с полученными в [4].

Далее матрицы **A**, **B** расщепляются на составляющие с положительными и отрицательными собственными значениями

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^+ + \mathbf{A}^- = S_\xi (\Lambda_A^+ + \Lambda_A^-) S_\xi^{-1} \quad (1.7)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}^+ + \mathbf{B}^- = S_\eta (\Lambda_B^+ + \Lambda_B^-) S_\eta^{-1}$$

где $\Lambda_A^\pm = (\Lambda_A \pm |\Lambda_A|)/2$, $\Lambda_B^\pm = (\Lambda_B \pm |\Lambda_B|)/2$, диагональные матрицы $|\Lambda_A|, |\Lambda_B|$ составлены из абсолютных значений Λ_A, Λ_B .

В соотношении (1.4) подставляются выражения

$$\left(\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t}\right)^{n+1/2}, \quad \left(\frac{\partial^2 \mathbf{Q}}{\partial t^2}\right)^{n+1/2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t}\right)\right)^{n+1/2}$$

с использованием (1.2); матрицы **A**, **B** представляются по (1.6), (1.7); матрицы S_ξ, S_η выносятся из-под знаков производных по ξ, η . Проводится факторизация в левой части по координатам ξ, η .

При аппроксимации производных в левой части соотношения (1.4) (неявный оператор) для Λ_A^+, Λ_B^+ применяются левосторонние разности, а для Λ_A^-, Λ_B^- – правосторонние, что учитывает локальную структуру потока и позволяет получить матрицу системы разностных уравнений, обладающую свойством диагонального преобладания. В правой части соотношения (1.4) (явный оператор) величины потоков $\mathbf{E}^*, \mathbf{F}^*$ вычисляются на границах ячеек, а значение вектора \mathbf{Q} – в центре ячеек сетки (i, j) . Заменяя производные конечными разностями, полагая в расчетной области $\Delta\xi = \Delta\eta = 1$, используя общепринятую индексацию для сеточных функций [4], получим разностную схему, записанную в дельта-форме для произвольной ячейки сетки (i, j)

$$\begin{aligned} & \{S_\xi [\mathbf{I} + \Theta\tau J(\nabla_\xi \Lambda_A^+ + \Delta_\xi \Lambda_A^-)] S_\xi^{-1} S_\eta [\mathbf{I} + \Theta\tau J(\nabla_\eta \Lambda_B^+ + \Delta_\eta \Lambda_B^-)] S_\eta^{-1}\}_{i,j}^n \delta \mathbf{Q}_{i,j}^{n+1} = \\ & = -(1-s) J\tau (\mathbf{E}_{i+1/2,j}^* - \mathbf{E}_{i-1/2,j}^* + \mathbf{F}_{i,j+1/2}^* - \mathbf{F}_{i,j-1/2}^*)^n + s \delta \mathbf{Q}_{i,j}^n \equiv \delta \mathbf{Z}_{i,j}^n \end{aligned} \quad (1.8)$$

где введены обозначения

$$\delta \mathbf{Q}_{i,j}^{n+1} = \mathbf{Q}_{i,j}^{n+1} - \mathbf{Q}_{i,j}^n, \quad (\nabla_\xi f)_{i,j} = f_{i,j} - f_{i-1,j}$$

$$(\nabla_\eta f)_{i,j} = f_{i,j} - f_{i,j-1}$$

$$(\Delta_\xi f) = f_{i+1,j} - f_{i,j}, \quad (\Delta_\eta f)_{i,j} = f_{i,j+1} - f_{i,j}$$

Течение рассматривается в одной полосе периода плоской решетки $ABCD$ (фиг. 1).

Входное сечение AB параллельно фронту решетки. Вычислительная сетка типа H перед решеткой и внутри канала строится по линиям тока $\psi = \text{const}$ и линиям равного значения потенциала $\phi = \text{const}$ для течения несжимаемой жидкости, которые получены из решения интегрального уравнения относительно скорости на контуре профиля [11]. Сетка близка к ортогональной. За решеткой сетка плавно поворачивается, чтобы выходное сечение CD было также параллельно фронту решетки.

В расчете правой части уравнения (1.8) используются приращения ∇W , ΔW характеристических переменных для направлений ξ , η [4], определяемые соотношениями

$$(\nabla W)_\xi = S_\xi^{-1} \cdot \nabla_\xi Q, \quad (\Delta W)_\xi = S_\xi^{-1} \cdot \Delta_\xi Q$$

$$(\nabla W)_\eta = S_\eta^{-1} \cdot \nabla_\eta Q, \quad (\Delta W)_\eta = S_\eta^{-1} \cdot \Delta_\eta Q$$

Для ∇W , ΔW принято кусочно-параболическое распределение по направлениям ξ , η в ячейке сетки (i, j) [12]. Левое Q^- и правое Q^+ значения вектора Q на границах ячейки (i, j) (например, в направлении ξ) находятся по соотношениям, где у ∇W , ΔW опущен нижний индекс ξ

$$Q_{i+1/2, j}^- = Q_{i, j} + S_{\xi i, j} \left(\frac{1-\phi}{4} \nabla^* W_{i, j} + \frac{1+\phi}{4} \Delta^* W_{i, j} \right)$$

$$Q_{i-1/2, j}^+ = Q_{i, j} - S_{\xi i, j} \left(\frac{1-\phi}{4} \Delta^* W_{i, j} + \frac{1+\phi}{4} \nabla^* W_{i, j} \right)$$

Векторы ограниченных приращений характеристических переменных

$$\nabla^* W_{i, j} = \min \text{mod}(\nabla W_{i, j}, b \Delta W_{i, j})$$

$$\Delta^* W_{i, j} = \min \text{mod}(\Delta W_{i, j}, b \nabla W_{i, j})$$

где функция $\min \text{mod}$ задается в виде

$$\min \text{mod}(x, y) = (\text{sign}(x) + \text{sign}(y)) / 2 \cdot \min(|x|, |y|)$$

$$b = (3 - \phi) / (1 - \phi)$$

обеспечивают монотонность в поведении решения Q разностной схемы (1.8) [12]. При условии

$$\phi = 1/3, \quad b = 4 \tag{1.9}$$

достигается третий порядок аппроксимации по координатам ξ , η .

Из задачи о распаде произвольного разрыва для границы ячейки $i + 1/2, j$ по левому и правому значениям $Q_{i+1/2, j}^-$, $Q_{i+1/2, j}^+$ рассчитываем величину $Q_{i+1/2, j}$ и по (1.2) находим поток $E_{i+1/2, j}^*$ на границе ячейки. Аналогично вычисляется вся правая часть уравнения (1.9) $\delta Z_{i, j}^n$.

В левой части (1.8) неявный оператор $\{ \}_{i, j}^n \delta Q_{i, j}^{n+1} = \delta Z_{i, j}^n$ обращается (индексы i, j, n опущены)

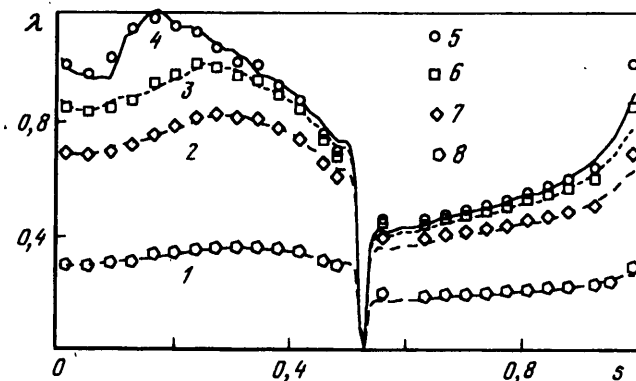
$$1) \quad \delta W_1 = S_\xi^{-1} \cdot \delta Z$$

$$2) \quad \delta W_2 = [I + \theta \tau J (\nabla_\xi \Lambda_A^+ + \Delta_\xi \Lambda_A^-)]^{-1} \cdot \delta W_1$$

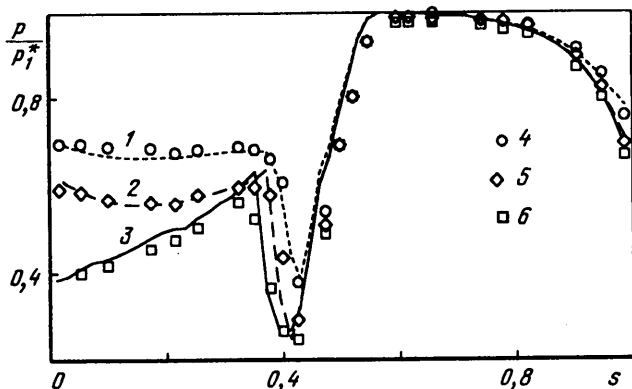
$$3) \quad \delta W_3 = S_\eta^{-1} \cdot S_\xi \cdot \delta W_2$$

$$4) \quad \delta W_4 = [I + \theta \tau J (\nabla_\eta \Lambda_B^+ + \Delta_\eta \Lambda_B^-)]^{-1} \cdot \delta W_3$$

$$5) \quad \delta Q = S_\eta \cdot \delta W_4$$



Фиг. 2. Распределение приведенной скорости λ по контуру профиля s в экспериментальной решетке 1 для четырех режимов λ_2 : расчет 1 - $\lambda_2 = 0,283$, 2 - $0,64$, 3 - $0,795$, 4 - $0,94$, 5-8 - эксперимент соответственно



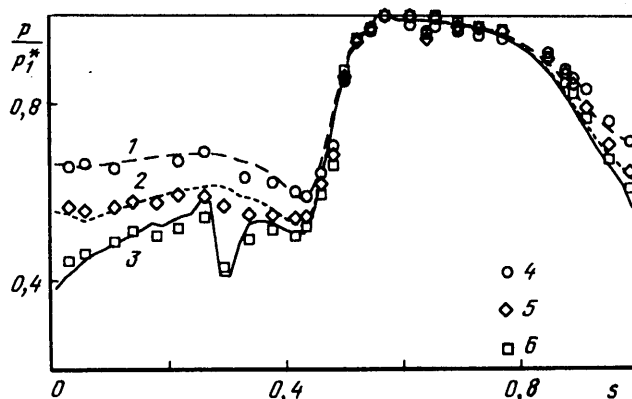
Фиг. 3. Распределение отношения давлений p/p_1^* по контуру профиля s в решетке 2 (MARKII) для трех режимов λ_2 : расчет 1 - $\lambda_2 = 0,774$, 2 - $0,903$, 3 - $1,034$, 4-6 - эксперимент соответственно

На этапах 2), 4) используются скалярная прогонка и неявный способ задания граничных условий.

Все расчеты выполнены при следующих значениях параметров, удовлетворяющих условиям (1.5), (1.9): $\theta = 2/3$, $s = 1/3$, $\phi = 1/3$, $b = 4$; число Куранта $K = \alpha\tau/\Delta\xi = 8 - 13$, число шагов по времени 150-250. На первом шаге параметры течения брались из расчета течения несжимаемой жидкости при решении интегрального уравнения при построении сетки.

Расчет обтекания экспериментальной решетки 1 (фиг. 1) проводился на сетке из 73×13 ячеек. Распределение приведенной скорости по контуру профиля удовлетворительно согласуется с экспериментальными данными (фиг. 2). При $\lambda_2 = 0,94$ у выходной кромки образуется висячий скачок уплотнения.

Сравнение различных методов расчета на одной сетке показало, что схема [13] первого порядка точности имеет наибольшие ошибки для энтропийной функции s ; переход к схеме второго порядка точности дает значительное уменьшение ошибок; рассмотренная схема (1.8) дает дополнительное снижение ошибок для s , в большей части области течения не превосходя 0,1%, но возрастая на контуре профиля до 1%.



Фиг. 4. Распределение отношения давлений p/p_1^* по контуру профиля s в решетке 3 (СЗХ) для трех режимов λ_2 : расчет 1 – $\lambda_2 = 0,784$, 2 – $0,913$, 3 – $1,042$, 4–6 – эксперимент соответственно

Расчеты распределения давления по контуру профиля решеток 2, 3 (решетки MARK II, СЗХ из [14]) на трех режимах λ_2 удовлетворительно согласуются с экспериментом (фиг. 3, 4). В решетке 2 на толстой входной кромке поток резко разгоняется и сверхзвуковая область замыкается интенсивным скачком уплотнения. В решетке 3 перерасширение потока значительно снижено.

2. Расчет двумерного турбулентного пограничного слоя вдоль контура профиля.

В области потока вводится ортогональная система координат s, n , связанная с профилем (фиг. 1): координата s от передней критической точки K направлена по сторонам профиля, координата n – по нормали к контуру. Кривизной контура пренебрегается. Система уравнений неразрывности, движения, энергии в приближении стационарного двумерного турбулентного пограничного слоя имеет вид [4, 15]

$$\frac{\partial(\rho c_s)}{\partial s} + \frac{\partial(\rho c_n)}{\partial n} = 0 \quad (2.1)$$

$$\rho c_s \frac{\partial c_s}{\partial s} + \rho c_n \frac{\partial c_n}{\partial n} = -\frac{dp}{ds} + \frac{\partial}{\partial n} \left[\rho(v + v_t) \frac{\partial c_s}{\partial n} \right] \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \rho c_s \frac{\partial i^*}{\partial s} + \rho c_n \frac{\partial i^*}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial n} \left\{ \rho \left(\frac{v}{Pr} + \frac{v_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial i^*}{\partial n} + \right. \\ \left. + \rho \left[v \left(1 - \frac{1}{Pr} \right) + v_t \left(1 - \frac{1}{Pr_t} \right) \right] \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{c_s^2}{2} \right) \right\} \quad (2.3) \end{aligned}$$

$$i^* = kRT / (k - 1) + c_s^2 / 2$$

$$v = \frac{\mu}{\rho}, \quad Pr = \frac{\rho v c_p}{\lambda}, \quad Pr_t = \frac{\rho v_t c_p}{\lambda_t}$$

где в отличие от обозначений (1.2) c_s, c_n – проекции скорости газа на оси s, n ; i^* – полная энтальпия; μ, v, v_t – коэффициенты молекулярной, кинематической, турбулентной вязкости; λ, λ_t – коэффициенты ламинарной, турбулентной теплопроводности газа; Pr, Pr_t – ламинарное, турбулентное числа Прандтля.

Используется уравнение состояния калорически совершенного газа (1.3). Коэффициент молекулярной вязкости газа в диапазоне $T = 873 - 1800$ К аппроксимируется выражением

$$\mu = 44,3 \cdot 10^{-6} (T/1073)^{0,678}, \quad [\mu] = \text{Па} \cdot \text{с}$$

Предполагается, что молекулярный и турбулентный переносы импульса и тепла протекают независимо один от другого. Суммарные касательные напряжения и тепловой поток в пограничном слое

$$\tau_{\Sigma} = \rho(v + v_t) \frac{\partial c_s}{\partial n}, \quad q_{\Sigma} = \rho \left(\frac{v}{\text{Pr}} + \frac{v_t}{\text{Pr}_t} \right) \frac{\partial i}{\partial n}$$

Во внешней части пограничного слоя использовались различные дифференциальные модели турбулентности.

А. Однопараметрическая модель для v_t , описываемая в стационарном течении уравнением [8]

$$\begin{aligned} \rho c_s \frac{\partial v_t}{\partial s} + \rho c_n \frac{\partial v_t}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial n} \left[\rho(v + \kappa v_t) \frac{\partial v_t}{\partial n} \right] + \\ + \alpha \rho v_t \left| \frac{\partial c_s}{\partial n} \right| - \frac{\gamma \rho v_t (v + \beta v_t)}{n^2} + \xi v_t c_s \frac{\partial \rho}{\partial s} \end{aligned} \quad (2.4)$$

В модели (2.4) приняты следующие выражения для эмпирической функции α и констант $\beta, \gamma, \kappa, \xi$, дающие наилучшее сопоставление расчетного и экспериментального значения локального коэффициента теплоотдачи $\alpha = q_{\Sigma w} / (T_1^* - T_w)$ на контуре профиля решеток газовых турбин [15]

$$\begin{aligned} \alpha = 0,1 (v_t / (7v))^{0,71}, \quad v_t / (7v) \leq 1 \\ \alpha = 0,1, \quad v_t / (7v) > 1 \\ \beta = 0,1354, \quad \gamma = 12, \quad \kappa = 1, \quad \xi = 1 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Б. Двухпараметрическая модель для кинетической энергии пульсаций скорости газа и скорости диссипации турбулентности ($k - \epsilon$), описываемая в стационарном течении уравнениями [4, 6, 9]

$$\frac{\partial}{\partial s} (\rho c_s k) + \frac{\partial}{\partial n} (\rho c_n k) = \frac{\partial}{\partial n} \left[\rho \left(v + \frac{v_t}{\text{Pr}_k} \right) \frac{\partial k}{\partial n} \right] + \rho v_t \left(\frac{\partial c_s}{\partial n} \right)^2 - \rho \epsilon \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} (\rho c_s \epsilon) + \frac{\partial}{\partial n} (\rho c_n \epsilon) = \frac{\partial}{\partial n} \left[\rho \left(v + \frac{v_t}{\text{Pr}_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial n} \right] + c_1 f_1 \rho v_t \left(\frac{\partial c_s}{\partial n} \right)^2 - c_2 f_2 \rho \frac{\epsilon^2}{k} \quad (2.7)$$

$$v_t = c_v f_v k^2 / \epsilon \quad (2.8)$$

Выбраны следующие значения констант:

$$c_v = 0,09; \quad c_1 = 1,44; \quad c_2 = 1,92; \quad \text{Pr}_k = 1; \quad \text{Pr}_\epsilon = 1,3 \quad (2.9)$$

Стандартная модель ($k - \epsilon$) описывает турбулентное течение в ядре потока при больших числах Re и демпфирующие функции

$$f_1 = f_2 = f_v = 1 \quad (2.10)$$

Для учета вязких и пристеночных эффектов при низких числах Re использованы демпфирующие функции f_1, f_2, f_v , предложенные в работах Лэма и Бремхорста [7] и

использованные в расчете коэффициента теплоотдачи в турбинных решетках [6]

$$f_1 = 1 + (0,06 / f_v)^3, \quad f_2 = 1 - \exp(-Re_t^2)$$

$$f_v = [1 - \exp(-0,016 Re_n)]^2 (1 + 19,5 / Re_t) \quad (2.11)$$

Если $f_v < 0,15$, то $f_v = 0,15$

$$Re_n = \sqrt{kn} / \nu, \quad Re_t = k^2 / (\nu \varepsilon)$$

В вязком подслое для описания турбулентности также использовались различные модели.

Алгебраическая модель ν_t Ван Драйста [9]

$$\nu_t = \nu / 2 \{ (1 + [2\kappa_1 n^+ (1 - \exp(-n^+ / A))]^2)^{1/2} - 1 \} \quad (2.12)$$

$$n^+ = nc_\tau(n) / \nu, \quad c_\tau(n) = (\tau_\Sigma(n) / \rho)^{1/2}$$

$$\kappa_1 = 0,39 - 0,41, \quad a = 26 - 27$$

В пристеночной области использованы выражения для безразмерных величин $k^+ = k/c_{\tau w}^2$, $\varepsilon^+ = \varepsilon\nu/c_{\tau w}^4$, определенных по полуэмпирическим зависимостям для развитого турбулентного течения в каналах Пейтела, Чжэня [10]

$$k^+ = \begin{cases} 0,05\eta^2, & 0,01 \leq \eta \leq 5 \\ 1,25 + 0,325(\eta - 5), & 5 < \eta \leq 15 \\ 4,5 - (\eta - 15) / 37,5, & 15 < \eta \leq 60 \end{cases} \quad (2.13)$$

$$\varepsilon^+ = \begin{cases} 0,1 + \eta / 120, & 0 < \eta \leq 12 \\ 1 / (\kappa_1 \eta), & 12 < \eta \end{cases} \quad (2.14)$$

$$\eta = nc_{\tau w} / \nu, \quad c_{\tau w} = (\tau_{\Sigma w} / \rho)^{1/2}$$

Исследованы четыре вида комбинированной двухслойной математической модели турбулентности с заданием характеристик турбулентности следующим образом:

1) ν_t модифицированная: в вязком подслое ν_t по (2.12); во внешней области ν_t по (2.4), (2.5);

2) $(k - \varepsilon)$ стандартная: в вязком подслое ν_t по (2.12), k^+ , ε^+ по (2.13), (2.14); во внешней области $(k - \varepsilon)$ по (2.6)–(2.10);

3) $(k - \varepsilon)$ модифицированная: в вязком подслое ν_t по (2.8), k^+ , ε^+ по (2.13), (2.14); во внешней области $(k - \varepsilon)$ по (2.6)–(2.9); функции f_1, f_2, f_v по (2.11);

4) $(k - \varepsilon)$ модифицированная: в вязком подслое ν_t по (2.12), k^+ , ε^+ по (2.13), (2.14); во внешней области $(k - \varepsilon)$ по (2.6)–(2.9), (2.11).

В точке склейки вязкого подслоя и внешней области пограничного слоя $\eta_0 = 8-10$; в моделях 2 и 4 имеется незначительный скачок ν_t .

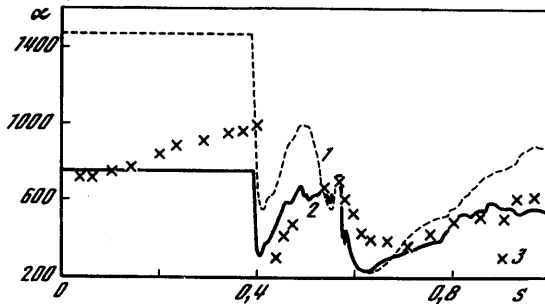
В качестве граничных условий задаются:

в сечении AB перед решеткой – T_1^* , p_1^* , пульсации скорости c'_{s1} и масштаб пульсаций L_1 , откуда находятся [9]

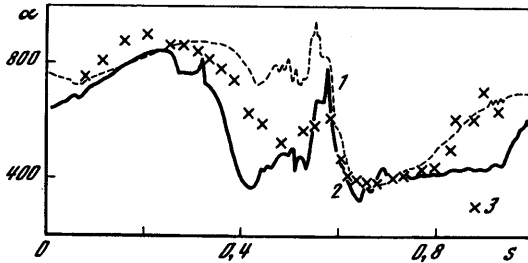
$$k_1 = 3 / 2c_{s1}^{\prime 2}, \quad \nu_{t1} = c_2 c'_{s1} L_1, \quad c_2 \cong 0,2$$

$$\varepsilon_1 = c_\varepsilon k_1^{3/2} / L_1, \quad c_\varepsilon = 0,45 - 0,9$$

вблизи критической точки K – толщина слоя δ , распределение $c_s(n)$, $T(n)$ из решения для двухмерного пограничного слоя



Фиг. 5. Распределение локального коэффициента теплоотдачи α , Вт/м² · К по контуру профиля s в решетке 2 (MARKII) при $\lambda_2 = 0,913$, $Re_{2l} = 1,98 \cdot 10^6$: расчет 1 – по стандартной модели 2 – $(k - \epsilon)$; 2 – по модифицированной модели 3 – $(k - \epsilon)$; 3 – эксперимент



Фиг. 6. Распределение локального коэффициента теплоотдачи α , Вт/м² · К по контуру профиля s в решетке 3 (C3X) при $\lambda_2 = 0,913$, $Re_{2l} = 2,025 \cdot 10^6$: расчет 1 – по модели 1; 2 – по модифицированной модели 3 – $(k - \epsilon)$; 3 – эксперимент

на пластине; для модели v_i : $v_i(n)/v_{i1} = (c_s(n)/c_{se})^4$; для модели $(k - \epsilon)$: $k(n)/k_1 = k^+/k_e^+$, $\epsilon(n)/\epsilon_1 = \epsilon^+/\epsilon_e^+$ по (2.13), (2.14);

на твердом непроницаемом контуре – условие прилипания $c_{sw} = c_{nw} = 0$, $T_w = T_w(s)$; для модели v_i : $v_w = 0$, для модели $(k - \epsilon)$: $k_w = 0$, $\epsilon_w^+ = 0,1$ по (2.14);

на внешней границе слоя: $c_s = c_{se}(s)$, $T_e^* = T_1^*$; для модели v_i : $v_{te} = v_{i1}$; для модели $(k - \epsilon)$:

$$k_e(s) = \frac{3}{2} c_s'^2(s), \quad \epsilon_e(s) = c_e k_e^{3/2}(s) / L(s)$$

В задании граничных условий на контуре профиля для параметров турбулентности c_s' , L имеется большая неопределенность [6].

Переменные s , n преобразуются: $x = ls - s_K/l$, $y = n/\delta(s)$, где l – хорда профиля; $\delta(s)$ – толщина слоя в начальном приближении, полученная из решения интегрального соотношения импульсов; область расчета сводится к прямоугольной. Вблизи стенки узлы сетки по n сгущаются. Используется неявная разностная схема первого порядка по x и второго по y [5, 15]. Уравнения решаются маршевым методом по x и прогонкой по y до точки отрыва потока.

3. Сопоставление с экспериментами по распределению коэффициента теплоотдачи на контуре профиля. Расчеты локального коэффициента теплоотдачи $\alpha(s)$ по контуру профиля в решетках 2, 3 сопоставлены с экспериментом [14] на близких режимах: $p_1^* = 0,356-0,347$ МПа, $T_1^* = 811$ К, $T_w / T_1^* = 0,71-0,73$; $Re_{2l} = (1,97-2,025) \cdot 10^6$; $\lambda_2 = 0,913$ (фиг. 5, 6). Газ имеет следующие физические свойства: $k = 1,33$; $R =$

$= 287,3 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$; $\text{Pr} = 0,7$; $\text{Pr}_t = 0,9$. Уровень турбулентности перед решеткой $c'_{s1} / c_1 = 0,065$; $L_1/l = (0,5-1,1) \cdot 10^{-3}$. Для расчета по модели 1 (v_t) принято $v_{t1} / v(T_1^*) = 5$.

Расчетная сетка содержит 160 узлов по s и 51 узел по n ; итерации в прогонке быстро сходятся; достигнута погрешность $\delta(c_s) \cong 10^{-3}$ и в коэффициенте трения на профиле $\delta(c_{fw}) \approx 10^{-5}$. В решетке 2 (фиг. 3, 5) в месте падения скачка уплотнения на выпуклую поверхность профиля слой отрывается от контура. В решетке 3 (фиг. 4, 6) течение безотрывное на всем профиле.

Расчет по модели 1 – (v_t) (кривая 1, фиг. 6) показал, что на участке входной кромки расчетное α превышает экспериментальное, а на остальной части профиля согласование $\alpha(s)$ удовлетворительное.

Стандартная модель 2 – ($k - \epsilon$) при низких Re завышает уровень v_t и коэффициент $\alpha(s)$ (кривая 1, фиг. 5).

Расчеты $\alpha(s)$ по модифицированной модели 3 – ($k - \epsilon$) дают удовлетворительное согласование с экспериментальными значениями (кривые 2, фиг. 5, 6).

Расчеты α по моделям 3 и 4 – ($k - \epsilon$) согласуются между собой вследствие близости расчетных значений v_t в вязком подслое.

Заключение. Расчет внешнего течения невязкого газа в решетке профилей по неявной монотонной схеме Годунова высокого порядка точности позволяет достигнуть погрешности энтропийной функции в ядре потока $\Delta s = 0,1\%$. Расчеты пограничного слоя на контуре с моделями турбулентности 1 – v_t и модифицированной 3 – ($k - \epsilon$) дают удовлетворительное согласование с экспериментами по локальному коэффициенту теплоотдачи. Разработанные методы применимы для плоских решеток в широком диапазоне режимных параметров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бим Р.М., Уорминг Р.Ф. Неявная факторизованная разностная схема для уравнения Навье–Стокса течения сжимаемого газа // Ракетная техника и космонавтика. 1978. Т. 16. № 4. С. 145–156.
2. Иванов М.Я., Крупа В.Г. Неявный нефакторизованный метод расчета турбулентных течений вязкого теплопроводного газа в решетках турбомашин // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1991. Т. 31. № 5. С. 754–766.
3. Иванов М.Я., Низматуллин Р.З. Неявная схема С.К. Годунова повышенной точности для численного интегрирования уравнений Эйлера // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1987. Т. 27. № 11. С. 1725–1735.
4. Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидродинамика и теплообмен. М.: Мир, 1990. Т. 1. 384 с.; Т. 2. 726 с.
5. Патанкар С.В., Сполдинг Д.Б. Тепло- и массообмен в пограничных слоях. М.: Энергия, 1971. 127 с.
6. Rodi W., Scheuerer G. Calculation of heat transfer to convection-cooled gas-turbine blades // Trans. ASME J. Eng. Gas Turbines and Power. 1985. V. 107. № 3. P. 620–627. (Рус. перев.: Роди, Шойерер. Расчет теплоотдачи к лопаткам турбин с конвективным охлаждением // Энергетические машины и установки. 1985. Т. 107. № 3. С. 29–38.)
7. Пейтел В.К., Роди В., Шойерер Г. Модели турбулентности для течений в пристеночной области с малыми числами Рейнольдса. Обзор // Аэрокосмич. техника. 1986. № 2. С. 183–197.
8. Секундов А.Н. Применение дифференциального уравнения для турбулентной вязкости к анализу плоских неавтономных течений // Изв. АН СССР. МЖГ. 1971. № 5. С. 114–127.
9. Турбулентность / Под ред. П. Брэдшоу. М.: Машиностроение, 1980. 343 с.
10. Пейтел В.К., Чен Х.К. Турбулентный след за пластиной // Аэрокосмич. техника. 1988. № 3. С. 13–22.
11. Богод А.Б., Курманов Б.И., Подвидз Г.Л. Исследование плоского трансзвукового течения газа через решетку объединенным методом интегральных уравнений и установления // Изв.

- АН СССР. МЖГ. 1980. № 1. С. 105–111.
12. *Chakravarty S.R., Ocher S.* A new class of high accuracy TVD schemes for hyperbolic conservation laws // AIAA Paper. 1985. № 363. 11 p.
 13. *Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я. и др.* Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976. 400 с.
 14. *Нили, Михелик, Хилтон, Глэддон.* Измерения распределения теплоотдачи на поверхностях высоконагруженных лопаток соплового аппарата турбины // Энергетические машины и установки. 1984. Т. 106. № 1. С. 86–96.
 15. *Подвидз Г.Л.* Расчет трения и теплоотдачи на профиле решетки турбомшины // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. 1983. № 4. С. 108–116.

Москва

Поступила в редакцию
22.III.1996