

УДК 532.51.013.4:536.25+537.363

© 1997 г. М.Ю. ЖУКОВ, Н.В. ПЕТРОВСКАЯ

## КОЛЕБАТЕЛЬНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ В ПОЧТИ НЕСТРАТИФИЦИРОВАННОЙ БЕСКОНЕЧНОКОМПОНЕНТНОЙ СМЕСИ

В приближении Обербека – Буссинеска построена модель концентрационной гравитационной конвекции в бесконечнокомпонентной смеси при наличии электрического поля. Физико-химические свойства смеси таковы, что под действием электрического поля в плоском горизонтальном слое может быть задана произвольная крупномасштабная стратификация плотности жидкости. Для асимптотической модели в предельном случае высоких напряжений показано, что процессы переноса смеси (но не жидкости) и процессы диффузии в вертикальном направлении отсутствуют. Рассмотрен случай, когда распределения концентраций смеси представляют собой дельтообразные функции, огибающая максимумов которых постоянно – сильная мелкомасштабная стратификация плотности слоя при отсутствующей крупномасштабной стратификации. Обнаружено, что в этом случае в жидкости возможна колебательная конвективная неустойчивость. Исследование такой неустойчивости проведено в линейном приближении численными методами. Кроме того, для нелинейной задачи сконструированы и изучены конечномерные модели гидродинамического типа.

Рассмотрена задача, встречающаяся в практике изоэлектрофокусирования – методе разделения многокомпонентных смесей при помощи электрического поля [1–3]. Одна из основных трудностей этого метода препятствующая получению высокого качества разделения смеси, – концентрационная гравитационная конвекция.

Процесс изоэлектрофокусирования весьма стабилен по отношению к диффузионным процессам перемешивания, которые полностью претовращаются внешним электрическим полем. Однако фракционирование смесей на отдельные компоненты приводит к сильной стратификации плотности жидкости и опасности возникновения в поле тяжести концентрационной конвекции (тепловую конвекцию в данном методе можно достаточно эффективно предотвращать специальными техническими приемами, например соответствующим охлаждением электрофоретической камеры). Более подробная информация о методе изоэлектрофокусирования и математических моделях этого процесса, в том числе и моделях для бесконечнокомпонентных смесей, содержится в [1–5].

Следует различать по крайней мере два типа стратификации плотности смеси – мелкомасштабную стратификацию в окрестности изоэлектрических точек, где, как правило, распределение концентрации близко к дельтообразным функциям, и крупномасштабную стратификацию, возникающую в случае, когда количество компонент смеси весьма велико и изоэлектрические точки находятся почти рядом, а для бесконечнокомпонентной смеси непрерывно распределены по электрофоретической камере. В последнем случае плотность смеси в целом задается непрерывной огибающей максимумов концентраций.

Для предельного случая электрического поля большой интенсивности построена асимптотическая модель, описывающая процессы конвекции. Особенностью такой модели является полное отсутствие переноса электрическим полем и диффузии компонент смеси в вертикальном направлении. Такой перенос осуществляется в смеси

лишь за счет движения жидкости. Результаты, полученные ниже, являются естественным продолжением работ [5–9], где аналогичная модель была построена лишь для линейного приближения. В частности, численными [7] и аналитическими [8] методами был детально изучен спектр линейной краевой задачи, построена и строго обоснована асимптотика собственных значений [9].

Целью настоящей работы является детальное изучение специальной стратификации жидкости, когда крупномасштабная плотность постоянна в вертикальном направлении. Оказалось, что монотонной потери устойчивости механического равновесия в этом случае не происходит, зато возможно возникновение колебательной конвективной неустойчивости. Физический механизм возникновения такой неустойчивости довольно ясен. Мелкомасштабное распределение плотности представляет собой дельтаобразные функции и в вертикальном направлении почти непрерывно расположены чередующиеся положительные и отрицательные градиенты плотности. Возникающая в областях положительных градиентов плотности конвекция затухает в прилегающих областях с отрицательным градиентом плотности. Именно этим скорее всего и объясняется колебательный характер неустойчивости. Для ее исследования была сконструирована и численно исследована конечномерная модель конвекции.

**1. Постановка задачи.** Пусть плоский горизонтальный слой с приложенной к нему разностью электрических потенциалов заполнен бесконечнокомпонентной смесью, компоненты которой характеризуются непрерывным параметром сорта  $s$ . Физико-химические свойства смеси, такие, как коэффициенты диффузии и концентрационного сжатия, задаем соответствующими функциями распределения. Предполагаем, что джоулево тепловыделение пренебрежимо мало и уравнение переноса тепла не рассматриваем. Основное внимание сосредоточено на концентрационных эффектах. Система уравнений, описывающих поведение смеси в приближении Обербека – Бусинеска, в безразмерных переменных имеет вид (см. [1, 2, 5–9])

$$\frac{dv}{dt} = -\nabla p + \Delta v - \mathbf{k} \int_{\Gamma} G(s) a(s, \mathbf{x}, t) ds, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (1.1)$$

$$P(s) \frac{da(s, \mathbf{x}, t)}{dt} + \operatorname{div} \mathbf{i}(s, \mathbf{x}, t) = 0, \quad -\frac{1}{2} \leq z \leq +\frac{1}{2} \quad (1.2)$$

$$\mathbf{i}(s, \mathbf{x}, t) = -\nabla a(s, \mathbf{x}, t) + Ua(s, \mathbf{x}, t) \nabla H(s, \mathbf{x}), \quad s \in \Gamma \quad (1.3)$$

Краевые условия, отвечающие твердым (1.4) либо свободным (1.5) непроницаемым для жидкости и смеси границам, возьмем в форме

$$\mathbf{v} = 0; \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = 0; \quad z = \mp \frac{1}{2} \quad (1.4)$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{k} = 0; \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = 0; \quad z = \mp \frac{1}{2} \quad (1.5)$$

$$\sigma_{31} = 0, \quad \sigma_{32} = 0; \quad z = \mp \frac{1}{2} \quad \left( \sigma_{\alpha\beta} = \frac{\partial v_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} + \frac{\partial v_{\beta}}{\partial x_{\alpha}} \right)$$

Распределение по параметру сорта  $s$  среднего количества вещества в смеси задаем условием

$$\frac{1}{\operatorname{mes} D} \int_D a(s, \mathbf{x}, t) dx = M(s) \quad (1.6)$$

Здесь  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, z)$ ,  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  – скорость смеси;  $p(\mathbf{x}, t)$  – давление;  $a(s, \mathbf{x}, t)$ ,  $\mathbf{i}(s, \mathbf{x}, t)$ ,  $M(s)$  – распределение по параметру сорта  $s$  концентрации компонент смеси, плотности потока концентрации, среднего количества вещества;  $\sigma_{\alpha\beta}$  – тензор вязких напряжений;  $H(s, \mathbf{x})$  – распределение потенциала внешних сил, возникающих в результате

действия электрического поля на компоненты смеси;  $\Gamma$  – пространство параметров сорта;  $\mathbf{k}$  – орт оси  $z$ , направленной против действия поля тяжести;  $D$  – некоторая конечная область бесконечного слоя, в частности в случае периодичности вдоль слоя  $D$  – параллелепипед периодов.

Безразмерные распределения по параметру сорта  $s$  диффузионных аналогов чисел Грасгофа  $G(s)$ , Прандтля  $P(s)$  и параметр  $U$ , характеризующий величину разности потенциалов электрического поля, имеют вид

$$U = \frac{\gamma_* U_*}{d_*}, \quad P(s) = \frac{\mu_*}{d_* \delta(s)}, \quad G(s) = \frac{\beta_* \beta(s) a_* g_* L_*^3}{\mu_*^2} \quad (1.7)$$

где  $d_*$ ,  $\gamma_*$ ,  $L_*$ ,  $a_*$ ,  $\mu_*$ ,  $g_*$ ,  $\beta_*$ ,  $U_*$  – характерные величины коэффициента диффузии, электрофоретической подвижности, поперечного размера слоя, концентрации, вязкости смеси, ускорения силы тяжести, коэффициента концентрационного сжатия и разности потенциалов;  $\beta_* \beta(s)$ ,  $d_* \delta(s)$  – распределения по параметру сорта коэффициентов концентрационного сжатия и диффузии. Кроме этого, предполагаем отсутствующими поток жидкости и электрический ток вдоль слоя.

Распределение потенциала  $H(s, x)$  выбираем в виде

$$H(s, x) = H(s, z) = -\frac{1}{2} \{z - z_0(s)\}^2, \quad z'_0(s) > 0 \quad (1.8)$$

где  $z_0(s)$  – монотонная (для определенности – возрастающая) функция распределения изоэлектрических точек по параметру сорта.

Функция  $z_0(s)$  характеризует местоположение точек в слое, к которым в результате эволюции стремится компонента смеси сорта  $s$ . В стационарном состоянии в каждой точке  $z_0(s)$  содержится вещество только лишь сорта  $s$  и, следовательно, величина  $z_0$  может быть выбрана в качестве параметра сорта. Далее будем считать, что [1, 2, 5, 7–9]

$$z_0(s) \equiv s, \quad -\frac{1}{2} \leq z_0 \leq +\frac{1}{2}, \quad \Gamma = [-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}] \quad (1.9)$$

**2. Механическое равновесие.** Задача (1.1)–(1.8) допускает решение, отвечающее механическому равновесию

$$\mathbf{v}_0 = 0, \quad p_0(z) = -\int_{\Gamma}^z d\zeta \int G(s) a_0(s, \zeta) ds \quad (2.1)$$

$$a_0(s, z) = A(s) \exp(UH(s, z)), \quad M(s) = A(s) \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \exp(UH(s, y)) dy$$

Функция  $A(s)$  характеризует распределение максимумов равновесных концентраций  $a_0(s, z)$

$$\max_{-\frac{1}{2} \leq s \leq +\frac{1}{2}} a_0(s, z_0(s)) = A(s) \quad (2.2)$$

При  $U \rightarrow +\infty$  для интеграла в (2.1) имеется асимптотическое разложение [10] и с учетом (1.9) величина  $A(s)$  связана со средним количеством вещества  $M(s)$  формулой

$$\frac{A(s)}{M(s)} = \left\{ \frac{-UH_{zz}(s, z_0(s))}{2\pi} \right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{ \frac{U}{2\pi} \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad U \rightarrow +\infty \quad (2.3)$$

Плотность жидкости  $\rho$  в используемом приближении определяется уравнением состояния  $\rho = \rho(a)$  и фактически формула (2.3) означает возможность задания в

механическом равновесии произвольной стратификации плотности жидкости поперек слоя путем соответствующего выбора функции среднего распределения количества вещества  $M(s)$ . При этом распределение концентраций описывается дельтообразными функциями.

**3. Главный член асимптотики для задачи (1.1)–(1.9) в случае  $U \rightarrow +\infty$ .** Построим задачу для получения главного члена асимптотического разложения исходной задачи (1.1)–(1.9) (см. также [5, 7–9]). Введем следующие обозначения и замены переменных:

$$a(s, \mathbf{x}, t) = a_0(s, z) + \theta(s, \mathbf{x}, t) \{G(s)M(s)\}^{-1} A(s) \exp\{UH(s, z)\}$$

$$p(\mathbf{x}, t) = p_0(z) + q(\mathbf{x}, t), \quad D \equiv \frac{\partial}{\partial z} \quad (3.1)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{k}w, \quad \mathbf{v} = (v_1, v_2, w), \quad \mathbf{u} = (v_1, v_2, 0), \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{k} = 0, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{k} = w$$

Здесь  $\mathbf{u}$  – компонента скорости вдоль слоя;  $w$  – вертикальная компонента скорости. Для новой переменной  $\theta$  в случае механического равновесия будет  $\theta_0(s, z) = 0$ .

С учетом (3.1) уравнения для концентраций (1.2)–(1.3) и соответствующее краевое условие запишем в виде

$$P(s) \left\{ e^{UH} \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta \right) + w D (e^{UH} (\theta + M(s)G(s))) \right\} = \text{div} \{ e^{UH} \nabla \theta \},$$

$$e^{UH} \mathbf{k} \cdot \nabla \theta = 0, \quad z = \mp \frac{1}{2} \quad (3.2)$$

Интегрирование этого уравнения по  $z$  на интервале  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  с учетом краевых условий для  $w$  и  $\theta$  дает соотношение

$$P(s) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{UH} \left\{ \frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla_0 \theta - (\theta + M(s)G(s)) Dw \right\} dz = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{UH} \Delta_0 \theta dz$$

$$\nabla_0 = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, 0 \right), \quad \Delta_0 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \quad \mathbf{u} \cdot \nabla \theta = \mathbf{v} \cdot \nabla_0 \theta \quad (3.3)$$

Условия прилипания или отсутствия касательных напряжений на границе слоя не используются и неважно, имеет ли слой твердую или свободную поверхность.

Используя асимптотическую формулу Лапласа [10], с учетом свойств функции  $H(s, z)$  (см. (1.8), (1.9)) для главного члена асимптотики имеем

$$P(s) \left\{ \frac{\partial \theta(s, s)}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla_0 \theta(s, s) - (\theta(s, s) + M(s)G(s)) Dw(s) \right\} = \Delta_0 \theta(s, s)$$

$$\theta(s, z) \equiv \theta(s, x_1, x_2, z, t), \quad w(z) \equiv w(x_1, x_2, z, t); \quad -\frac{1}{2} \leq s \leq +\frac{1}{2} \quad (3.4)$$

Краевое условие для  $\theta$  имеет вид

$$\frac{\partial \theta(s, z)}{\partial z} = 0, \quad z = \mp \frac{1}{2} \quad (3.5)$$

Используя уравнение неразрывности, уравнение (3.4) преобразуем к виду

$$P(s) \left\{ \frac{\partial \theta(s, s)}{\partial t} + \text{div}(\mathbf{u}(\theta(s, s) + M(s)G(s))) \right\} = \Delta_0 \theta(s, s) \quad (3.6)$$

Фактически получено уравнение для описания процессов переноса вещества в плоскости  $z = \text{const}$  – вертикальная компонента скорости  $w$  отсутствует и нет процессов

диффузии в вертикальном направлении. Конечно, такой результат следовало ожидать. Сильное внешнее поле ( $U \rightarrow +\infty$ ) сосредоточило отдельные компоненты смеси сорта  $s$  в плоскостях горизонтального слоя  $z = z_0(s) = s$ , делая невозможным движение компонент смеси (но не жидкости!) в вертикальном направлении.

Аналогичным образом, используя (1.9), (2.3) и замены (3.1), получаем главный член асимптотики для интеграла в уравнении движения жидкости (1.1)

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \frac{A(s)}{M(s)} \theta(s, z) e^{uH(s, z)} ds = \left\{ \frac{H_{ss}(z, z)}{H_{zz}(z, z)} \right\}^{\frac{1}{2}} \theta(z, z), \quad U \rightarrow +\infty \quad (3.7)$$

Введем величины

$$R = \frac{\beta_* a_* g_* L_*^3}{\mu_* d_*}, \quad F(z) = \frac{\beta(z)M(z)}{\delta(z)}, \quad P(z)G(z)M(z) = RF(z) \quad (3.8)$$

где  $R$  – концентрационный аналог числа Рэлея;  $F(z)$  – функция, характеризующая распределение параметров смеси поперек слоя.

Величина  $\beta(z)M(z)$  фактически характеризует распределение плотности жидкости в слое:  $\rho(z) = \rho_0(1 + \beta(z)M(z))$ ,  $\rho_0 = \text{const}$ . Довольно типичной является ситуация, когда коэффициенты диффузии отдельных компонент смеси практически совпадают, т.е. функция распределения  $\delta(z) = \text{const}$ ; без умаления общности можно считать  $\delta(z) = 1$ . В этом случае  $F(z)$  задает стратификацию плотности жидкости в слое. При этом распределение числа Прандтля  $P(s) = P = \text{const}$  (см. (1.7)).

Окончательно, полагая  $s = z$  в (3.6), с учетом обозначений (3.8) запишем задачу для главного члена асимптотики (ср. с [5, 7, 8])

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla q + \Delta \mathbf{v} - \mathbf{k}\theta(z, z), \quad \text{div } \mathbf{v} = 0 \quad (3.9)$$

$$P(z) \left\{ \frac{\partial \theta(z, z)}{\partial t} + \text{div}(\mathbf{u}\theta(z, z)) \right\} + RF(z) \text{div } \mathbf{u} = \Delta_0 \theta(z, z) \quad (3.10)$$

$$w = 0, \quad z = \mp \frac{1}{2} \quad (3.11)$$

$$\mathbf{u} = 0; \text{ (или) } \sigma_{31} = 0, \sigma_{32} = 0; \quad z = \mp \frac{1}{2} \quad (3.12)$$

Во избежание недоразумений, укажем, что для функции  $\theta(z, z)$ , вообще говоря, не требуется краевого условия. Уравнение (3.10), как уже говорилось выше, описывает поведение смеси вдоль плоскости  $z = \text{const}$  и не является дифференциальным уравнением относительно переменной  $z$ .

Сделаем несколько замечаний о выборе потенциала  $H(s, z)$  в виде (1.8) и области применимости рассматриваемой модели конвекции. В [2, 4] приведена формула, связывающая потенциал  $H(s, z)$  электрофоретической подвижностью компонент  $\chi(s, z)$ , молярной проводимостью компонент  $\sigma_0(s)$  и проводимостью смеси  $\sigma$ , а в [1] дана связь электрофоретической подвижности с физико-химическими характеристиками смеси – монотонным распределением концентрации ионов водорода в растворе  $\Phi(z)$  (рН раствора) и распределением констант диссоциации  $m(s)$ . При выборе параметра сорта в виде (1.9) имеем (в интегралах  $y$  – вертикальная координата)

$$H = \int_s^z \frac{\chi(s, y)}{\sigma} dy \left\{ \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dy}{\sigma} \right\}^{-1} \quad (3.13)$$

$$\chi(s, z) = \frac{\text{sh}(\Phi(z) - \Phi(s))}{\text{ch}(\Phi(z) - \Phi(s)) + m(s)}, \quad \sigma = \int_{\Gamma} \sigma_0(s) a(s, z, x_1, x_2, t) ds$$

Величина  $\sigma$  и потенциал  $H$  в общем случае функционально зависят от  $a(x, t)$  и соотношения (3.13) и по существу являются интегральными уравнениями для определения потенциала, так как величина  $a$  после замены переменных (3.1) зависит от  $H$ . Из (3.13) следует, что  $H_{ss}(s, z) = H_{zz}(s, z)$  при  $z = s$ , функциональная (вариационная) производная  $\delta H / \delta a = 0$  при  $z = s$  и, следовательно, асимптотическая модель (3.9)–(3.12) не изменится (см. (3.7)). Это достаточно очевидно, так как уравнение (3.6) для концентраций не содержит  $H$ , а в уравнение движения потенциал  $H$  входит лишь как отношение  $H_{zz}(s, s) / H_{ss}(s, s)$ . Более того, результат не изменится, если функция  $\gamma(s, z)$  будет иметь вид  $\gamma(s, z) = T(\Phi_0(z) - \Phi_0(s))Q(s, z, x_1, x_2, t)$ , где  $T, \Phi_0, Q$  – произвольные функции, такие, что  $T(0) = 0, T'(0) \neq 0, Q$  знакоопределена и  $\Phi_0$  монотонна. Иными словами, выбор потенциала  $H(s, z)$  в виде (1.8) сделан для упрощения выкладок и модель (3.9)–(3.12) применима в достаточно большом классе потенциалов.

Приведенные рассуждения, в частности, означают, что, несмотря на то что проводимость смеси зависит от концентрации компонент, величина электрического поля в рассматриваемом приближении фактически не отклоняется от своих значений при механическом равновесии. С физической точки зрения при  $U \rightarrow +\infty$  внешнее электрическое поле столь велико, что конвективные процессы, приводящие к отклонению от механического равновесия, не в состоянии индуцировать какое-либо заметное "внутреннее" электрическое поле. Одна из причин этого – отсутствие в электронейтральном растворе заряда и, как следствие, отсутствие пондеромоторных сил, типичных, например, для диэлектрических сред. Естественно, при конечных значениях  $U$ , т.е. в исходной задаче или при учете следующих членов асимптотики, возможно влияние индуцированного электрического поля на поведение смеси, в частности на величину критических параметров возникновения конвекции. Однако в настоящей работе такие эффекты не исследованы.

**4. Линеаризованная задача (3.9)–(3.12).** Для исследования конвективной устойчивости смеси в линейном приближении линеаризуем задачу (3.9)–(3.12) в окрестности нулевого решения, отвечающего механическому равновесию. Задача (3.9)–(3.11) при  $v \equiv 0$  допускает в качестве решения произвольную функцию  $\theta = \theta_0(z)$  и в принципе можно исследовать устойчивость такого механического равновесия. Однако исходной задаче (1.1)–(1.9) отвечает механическое равновесие  $\theta_0(z) \equiv 0$  (см. (3.1)).

Решение линейной задачи, периодическое вдоль слоя с периодами  $2\pi/\alpha_1, 2\pi/\alpha_2$ , ищем в виде

$$\{v, q, \theta\} = \{u'_1(z), u'_2(z), w'(z), q'(z), \theta'(z)\} e^{\lambda t + i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} \quad (4.1)$$

где  $u'_1(z), u'_2(z), w'(z), q'(z), \theta'(z)$  – амплитуды бесконечно малых возмущений;  $\lambda$  – декремент затухания;  $\alpha_1, \alpha_2$  – волновые числа.

Очевидные преобразования позволяют исключить величину  $\theta(z, z)$  и записать спектральную задачу устойчивости в виде (знак штриха в дальнейшем опущен)

$$\lambda(D^2 - \alpha^2)w(z) = (D^2 - \alpha^2)^2 w(z) + \frac{R\alpha^2 F(z)Dw(z)}{\lambda P(z) + \alpha^2} \quad (4.2)$$

$$\theta(z, z) = \frac{RF(z)Dw(z)}{\lambda P(z) + \alpha^2}, \quad D = \frac{d}{dz}, \quad \alpha^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 \quad (4.3)$$

$$w(\mp \frac{1}{2}) = 0 \quad (4.4)$$

$$Dw(\mp \frac{1}{2}) = 0 \quad (\text{или}) \quad D^2 w(\mp \frac{1}{2}) = 0 \quad (4.5)$$

$P$	I			II		
	$R_*$	$\alpha_*$	$\mp\Omega_*$	$R_*$	$\alpha_*$	$\mp\Omega_*$
7	3646	3,340	9,44	1396	2,000	3,56
10	4314	3,400	8,02	1651	2,000	2,97
20	6026	3,420	5,66	2307	2,000	2,10
40	8468	3,430	4,04	3243	2,000	1,48
60	10349	3,440	3,31	3964	2,000	1,21
80	11938	3,445	2,87	4573	2,000	1,05
100	13338	3,450	2,57	5109	2,000	0,94

$P$	III			IV		
	$R_*$	$\alpha_*$	$\mp\Omega_*$	$R_*$	$\alpha_*$	$\mp\Omega_*$
7	4803	3,338	9,23	1418	1,937	3,34
10	5684	3,367	7,79	1678	1,955	2,83
20	7943	3,402	5,57	2347	1,976	2,02
40	11164	3,420	3,96	3299	1,987	1,44
60	13644	3,426	3,24	4032	1,990	1,18
80	15739	3,429	2,81	4652	1,992	1,02
100	17585	3,431	2,51	5198	1,993	0,91

Поведение нейтральных кривых монотонной ( $\lambda = 0$ ) потери устойчивости  $R = R(\alpha^2)$  было достаточно полно изучено в [5–9]. В частности, при  $R > 0$ ,  $F'(z) \geq 0$  монотонной потери устойчивости не происходит. Это вытекает из очевидного соотношения, полученного интегрированием по  $z$  (4.2) при  $\lambda = 0$  с учетом условия (4.4).

Численное исследование спектральной задачи (4.2)–(4.5) показало, что в случае, когда  $R > 0$ ,  $F'(z) \geq 0$ , возможно возникновение колебательной неустойчивости ( $\lambda = i\Omega$ ,  $\text{Im}\Omega = 0$ ). В частности, наиболее интересна возможность возникновения колебательной неустойчивости в случае, когда плотность жидкости в механическом равновесии постоянна поперек слоя и распределение коэффициентов диффузии не зависит от параметра сорта  $s$ , т.е.  $F(z) = \text{const}$  и  $P(z) = \text{const}$ . Конечно, имеется в виду крупномасштабное распределение плотности по слою. Мелкомасштабная стратификация компонент смеси, напротив, весьма значительна, так как функции распределения концентраций – дельтаобразные функции как по параметру сорта  $s$ , так и по координате  $z$ .

Без умаления общности положим

$$P(z) \equiv P, \quad F(z) \equiv 1 \quad (4.6)$$

Результаты расчета критических чисел колебательной потери устойчивости  $R_* = R(\alpha_*^2, P) = \min_{\alpha^2} R(\alpha^2, P)$  и критических частот  $\Omega_* = \Omega(\alpha_*^2, P)$  для спектральных задач (4.2)–(4.5) в случае  $\lambda = i\Omega$  при некоторых фиксированных значениях числа Прандтля приведены в таблице (колонки I отвечают задаче с твердыми границами слоя, колонки II – задаче со свободными границами).

Для значений чисел Прандтля  $P > 100$  справедливы асимптотические формулы (4.7) для твердых границ слоя и (4.8) для свободных границ слоя

$$R_* \approx 1330,38P^{1/2}, \quad \Omega_* \approx \mp 25,72P^{-1/2}, \quad \alpha_* \approx 3,450 \quad (4.7)$$

$$R_* \approx 509,64P^{1/2}, \quad \Omega_* \approx \mp 9,49P^{-1/2}, \quad \alpha_* \approx 2,020 \quad (4.8)$$

Для построения асимптотики решение задач (4.2)–(4.5) ищем в виде

$$\Omega = \Omega_0 P^{-1/2} + \Omega_1 P^{-1} + \dots, \quad \lambda = i\Omega \quad (4.9)$$

$$w = w_0 + w_1 P^{-1} + \dots, \quad R = R_0 P^{1/2} + R_1 + \dots$$

Подставляя (4.9) в (4.2)–(4.5), получим спектральные задачи

$$(D^2 - \alpha^2)^2 w_0 - i \frac{R_0}{\Omega_0} \alpha^2 D w_0 = 0 \quad (4.10)$$

$$w_0 = D w_0 = 0; \text{ (или) } w_0 = D^2 w_0 = 0; \quad z = \mp 1/2 \quad (4.11)$$

Функция  $w_0$  – комплексная, задачи (4.10), (4.11) – самосопряженные и, в частности,  $w_0^*(z) = w_0(-z)$ . Собственные значения этих задач позволяют определить лишь отношение  $R_0/\Omega_0$ . Недостающее уравнение для определения по отдельности величин  $R_0, \Omega_0$  получим из условия разрешимости задачи для определения  $w_1$

$$\alpha^2 \int_{-1/2}^{1/2} \{|w_0''|^2 + 2\alpha^2 |w_0'|^2 + \alpha^4 |w_0|^2\} dz = \Omega_0^2 \int_{-1/2}^{1/2} \{|w_0'|^2 + \alpha^2 |w_0|^2\} dz$$

**5. Конечномерные модели.** Для более детального изучения колебательной неустойчивости строим конечномерные модели конвекции, считая выполненными требования (4.6) и ограничивая рассмотрение двумерной плоской задачей.

Введем функцию тока  $\psi$

$$w = \psi_x, \quad u_1 = -\psi_z, \quad u_2 = 0, \quad x_1 = x, \quad \frac{\partial}{\partial x_2} = 0 \quad (5.1)$$

Задачу (3.9)–(3.12) запишем в форме

$$\Delta \psi_t - \psi_z \Delta \psi_x + \psi_x \Delta \psi_z = \Delta^2 \psi - \theta_x \quad (5.2)$$

$$P\{\theta_t - (\theta \psi_z)_x\} - R \psi_{xz} = \theta_{xx} \quad (5.3)$$

$$\psi = 0, \quad \psi_z = 0, \quad \theta = 0; \quad z = \mp 1/2 \quad (5.4)$$

$$\psi = 0, \quad \Delta \psi = 0, \quad \theta_z = 0; \quad z = \mp 1/2 \quad (5.5)$$

Дополнительные условия  $\theta = 0$  при  $z = \mp 1/2$  для твердых границ слоя и  $\theta_z = 0$  при  $z = \mp 1/2$  для свободных границ слоя выбраны в соответствии с уравнением (4.3) линеаризованной задачи.

Разыскиваем решение задач (5.2)–(5.3), (5.4) и (5.2)–(5.3), (5.5), периодические вдоль слоя с периодом  $2\pi/\alpha$  ( $\alpha$  – волновое число) и обладающее следующими свойствами четности:

$$\psi(-x, z) = -\psi(x, z), \quad \theta(-x, z) = \theta(x, z) \quad (5.6)$$

Для построения конечномерных моделей используем метод Галеркина ([11]). Конечномерную аппроксимацию функций  $\psi$  и  $\theta$  возьмем в виде

$$\psi = \sin \alpha x (\psi_{11} f_1(z) + \psi_{12} f_2(z))$$

$$\theta = \cos \alpha x (\theta_{11} g_1(z) + \theta_{12} g_2(z)) + \cos 2\alpha x (\theta_{21} g_1(z) + \theta_{22} g_2(z))$$

$$f_1(-z) = f_1(z), \quad f_2(-z) = -f_2(z), \quad f_i(\mp 1/2) = 0 \quad (5.7)$$

$$Df_i(\mp 1/2) = 0 \text{ (или) } D^2 f_i(\mp 1/2) = 0, \quad g_i(z) = k_i Df_i(z)$$

$$(f_i, f_i) = 1, \quad (g_i, g_i) = 1, \quad i = 1, 2; \quad (u, v) = \int_{-1/2}^{1/2} u(z)v(z) dz$$



Здесь  $\Psi_{11}, \Psi_{12}, \theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{21}, \theta_{22}$  – амплитуды, зависящие от времени  $t$ ; функции  $g_i(z)$  выбраны в соответствии с линеаризованной задачей;  $k_i$  – нормирующие множители, возможно, отрицательные.

Выбор такой аппроксимации продиктован стремлением построить простейшие модели с сохранением качественных свойств исходной задачи. В частности, оказывается, что потеря устойчивости тривиального решения получаемых галеркинских моделей является колебательной. Более того, для соответствующих критических чисел Рэля при  $P \rightarrow +\infty$  сохраняется вид асимптотических формул (4.7), (4.8).

Подставляя (5.7) в (5.2), (5.3) и используя обычную процедуру построения галеркинских аппроксимаций, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}_{1j} &= -a_j \Psi_{1j} - b_j \theta_{1,3-j} \\ \dot{\theta}_{1j} &= -\varepsilon \alpha^2 \theta_{1j} + G c_j \Psi_{1j} - \frac{1}{2} (d_0 \Psi_{11} \theta_{2,3-j} + d_j \Psi_{12} \theta_{2j}) \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_{2j} &= -4\varepsilon \alpha^2 \theta_{2j} + (d_0 \Psi_{11} \theta_{1,3-j} + d_j \Psi_{12} \theta_{1j}) \\ a_j &= -\frac{((D^2 - \alpha^2)^2 f_j, f_j)}{((D^2 - \alpha^2) f_j, f_j)} > 0, \quad b_j = -\frac{\alpha (g_{3-j}, f_j)}{((D^2 - \alpha^2) f_j, f_j)} \\ c_j &= \alpha (D f_j, g_j), \quad d_0 = \alpha (g_1 D f_1, g_2), \quad d_j = \alpha (g_j D f_2, g_j) \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$\varepsilon = P^{-1}, \quad G = R P^{-1}, \quad j = 1, 2$$

Механическому равновесию задачи (3.9)–(3.12) отвечает тривиальное равновесие  $\Psi_{1j} = 0, \theta_{1j} = 0, \theta_{2j} = 0, j = 1, 2$ , модели (5.8). При  $\varepsilon > 0$  и достаточно малых  $|R|$  оно асимптотически устойчиво. Критические числа  $R_m, R_0$  монотонной и колебательной потери устойчивости определяются соотношениями

$$R_m^2 = \frac{a_1 a_2 \alpha^4}{b_1 b_2 c_1 c_2} \quad (5.10)$$

$$R_0^2 = R_m^2 + \frac{\Omega^2 (\Omega^2 - a_1 a_2 - 2\varepsilon \alpha^2 (a_1 + a_2) - \varepsilon^2 \alpha^4)}{\varepsilon^2 b_1 b_2 c_1 c_2} \quad (5.11)$$

$$\Omega^2 = \varepsilon \alpha^2 \frac{2a_1 a_2 + \varepsilon \alpha^2 (a_1 + a_2)}{(a_1 + a_2) + 2\varepsilon \alpha^2}$$

В случае свободных границ естественно выбрать

$$f_1 = \sqrt{2} \cos \pi z, \quad f_2 = \sqrt{2} \sin 2\pi z, \quad g_1 = \sqrt{2} \sin \pi z, \quad g_2 = \sqrt{2} \cos 2\pi z \quad (5.12)$$

Для твердых границ возьмем

$$f_1 = \sqrt{\frac{9}{5}} \left( \cos \pi z + \frac{1}{3} \cos 3\pi z \right), \quad f_2 = \sqrt{\frac{8}{5}} \left( \sin 2\pi z + \frac{1}{2} \sin 4\pi z \right) \quad (5.13)$$

$$g_1 = \sin \pi z + \sin 3\pi z, \quad g_2 = \cos 2\pi z + \cos 4\pi z$$

Формулы (5.9) дают  $c_1 < 0, c_2 > 0, a_j > 0, b_j > 0, j = 1, 2$ . В обоих случаях из (5.10) следует, что монотонная потеря устойчивости тривиального равновесия невозможна. При фиксированных  $\varepsilon > 0, \alpha > 0$  равновесие с ростом  $|R|$  теряет устойчивость в результате бифуркации рождения предельного цикла – область устойчивости имеет вид  $|R| < R_0$ , где  $R_0$  определяется из (5.11). Результаты расчета критических чисел Рэля колебательной потери устойчивости  $R_* = R_0(\alpha_*, \varepsilon) = \min_{\alpha > 0} R_0(\alpha, \varepsilon)$  и критических частот  $\Omega_* = \Omega(\alpha_*, \varepsilon)$  для моделей (5.8), (5.9), (5.13) (твердые границы) и (5.8), (5.9),

(5.12) (свободные границы) приведены в таблице, колонки III и IV. При  $|R| > R_0$  свойства построенных моделей изучались численно (см. разд. 6).

Уравнения (5.8) инвариантны относительно преобразования (5.14), а также относительно одновременной замены переменных и параметров (5.15)

$$(\Psi_{11}, \Psi_{12}, \theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{21}, \theta_{22}) \rightarrow (-\Psi_{11}, -\Psi_{12}, -\theta_{11}, -\theta_{12}, \theta_{21}, \theta_{22}) \quad (5.14)$$

$$(\Psi_{11}, \Psi_{12}, \theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{21}, \theta_{22}) \rightarrow (-\Psi_{11}, \Psi_{12}, \theta_{11}, -\theta_{12}, \theta_{21}, -\theta_{22}) \quad (5.15)$$

$$(\varepsilon, G, \alpha) \rightarrow (\varepsilon, -G, \alpha)$$

Последнее позволяет без потери общности считать, что  $G \geq 0$ .

**6. Результаты вычислений.** Численные исследования установившихся конвективных движений, описываемых моделями, проводились для параметра  $\varepsilon \in [0, 2]$ . Для реальных водных многокомпонентных растворов параметр  $\varepsilon$  достаточно мал ( $\varepsilon < 0,01$ ). Однако никаких термодинамических ограничений на величину этого параметра, точнее, на коэффициенты диффузии и вязкости не существует. В частности, для неводных растворов, когда в качестве растворителя выбирается сверхтекучий жидкий гелий [12], значения  $\varepsilon$  лежат в интервале  $[0, 1; 2]$  (см. [13]).

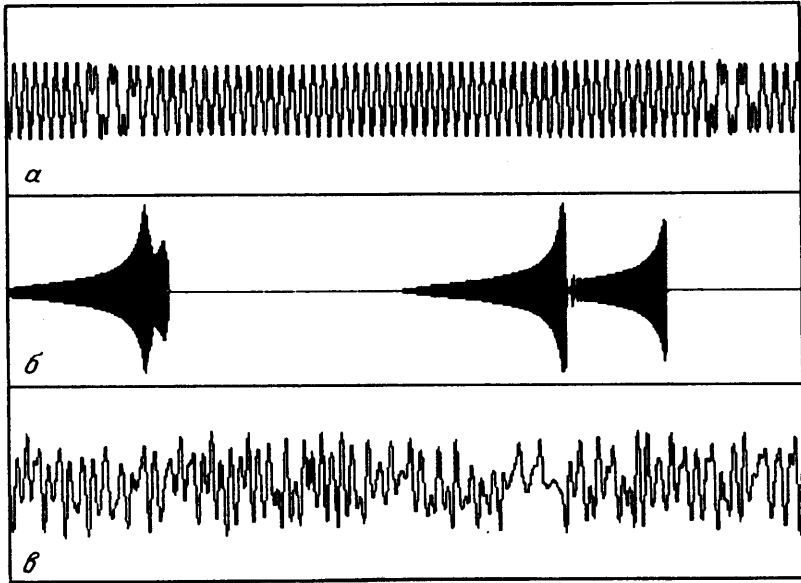
Волновое число  $\alpha$  при расчетах, как правило, выбиралось близким к критическому значению  $\alpha_*$ . При фиксированных  $\varepsilon, \alpha$  параметр  $G$  изменялся в области  $G > G_0 = \varepsilon R_0$ , где  $G_0$  – значение параметра, при котором происходит колебательная потеря устойчивости механического равновесия.

Отметим свойства, общие для обеих моделей. При  $G > G_0$  устойчивые стационарные решения не были обнаружены. Все установившиеся конвективные движения имеют колебательный характер – возможны периодические, квазипериодические и хаотические колебания. Для значений  $G$ , близких к  $G_0$ , устанавливаются периодические автоколебания, близкие к гармоническим. С ростом числа  $G$ , при  $G = G_1(\varepsilon, \alpha)$ , соответствующие предельные циклы теряют устойчивость. Последующие перестройки течения существенно зависят от параметра  $\varepsilon$ , но во всех расчетах при достаточно больших  $G$  устанавливаются хаотические колебания.

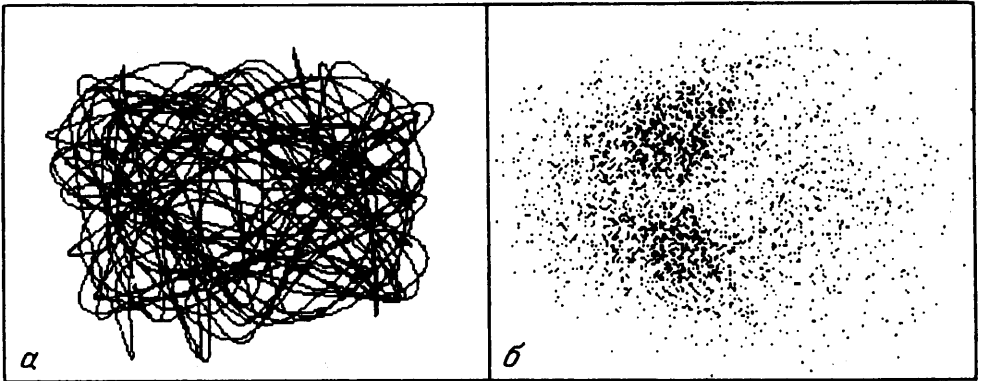
В наиболее интересном случае малых  $\varepsilon$  ( $\varepsilon < 0,01$ ) переход  $G$  через критическое значение  $G_1$  сопровождается возникновением перемежаемости [14]. В случае твердых границ возникающие движения представляют собой длинные серии близких к периодическим осцилляций, чередующиеся с короткими сериями нерегулярных колебаний (фиг. 1,а). В случае свободных границ движение имеет более сложный характер. После серии осцилляций, близких к периодическим, и нескольких нерегулярных колебаний фазовая точка может попасть в окрестность слабонеустойчивого механического равновесия. В этом состоянии система находится довольно долго, затем возникают близкие к гармоническим колебания с медленно растущей амплитудой, после чего все повторяется (фиг. 1,б).

Движения такого типа наблюдаются в довольно узком диапазоне  $G_1 < G < G_2$ . Например, для твердых границ при  $\varepsilon = 10^{-3}$ ,  $\alpha = 3,85$  ( $\alpha_* \approx 3,857$ ) имеем  $G_0 \approx 60,16$ ;  $G_1 \approx 77,1$ ;  $G_2 \approx 81,2$ . Для свободных границ критические числа значительно меньше: при  $\varepsilon = 10^{-3}$ ,  $\alpha = 2$  ( $\alpha_* \approx 1,998$ ) имеем  $G_0 \approx 16,40$ ,  $G_1 \approx 22,9$ ,  $G_2 \approx 30,5$ . В последнем случае переход числа  $G$  через критическое значение  $G_2$  влечет установление хаотических колебаний, характер которых практически не изменяется при изменении  $G$  до значений порядка  $10^6$ . Типичный график зависимости амплитуды от времени приведен на фиг. 1,в, а проекции фазовой траектории и графика отображения Пуанкаре – на фиг. 2.

В случае твердых границ аналогичные хаотические движения возникают лишь после ряда перестроек течения. Отметим только следующий факт. В некоторой области чисел  $G$  аттрактором является устойчивый двумерный тор или сложное инвариантное множество, возникающее в результате его разрушения (фиг. 3).

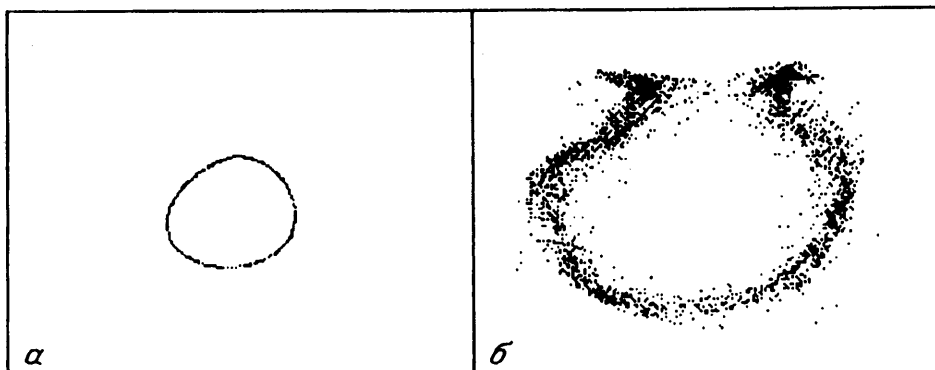


Фиг. 1. Зависимость  $\psi_{12}(t)$ ,  $\theta_{11}(t)$  для  $\varepsilon = 10^{-3}$ : *a* – твердые границы,  $\psi_{12}(t)$ ,  $\alpha = 3,85$ ,  $G = 78,315$ ,  $0 \leq t \leq 1600$ ; *б* – свободные границы,  $\theta_{11}(t)$ ,  $\alpha = 2$ ,  $G = 25$ ,  $0 \leq t \leq 6 \cdot 10^4$ ; *в* – свободные границы,  $\theta_{11}(t) = 2$ ,  $\alpha = 2$ ,  $G = 100$ ,  $0 \leq t \leq 100$

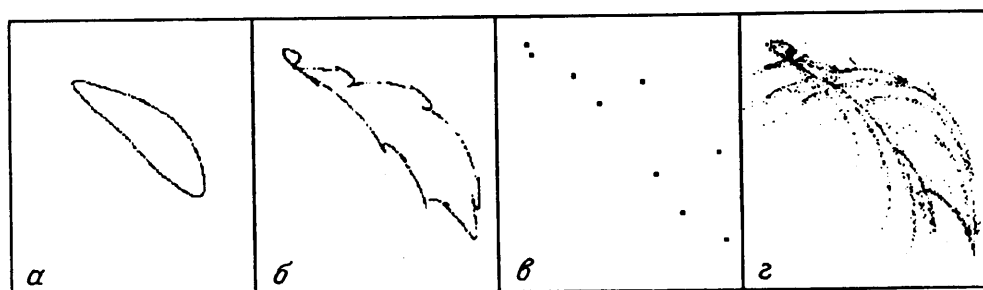


Фиг. 2. Хаотические движения в случае свободных границ,  $\varepsilon = 10^{-3}$ ,  $\alpha = 2$ ,  $G = 100$ : *a* – проекция траектории на плоскость  $(\psi_{11}, \psi_{12})$ ; *б* – отображение Пуанкаре, определенное в гиперплоскости  $\psi_{12} = 0$ , проекция на плоскость  $(\theta_{21}, \theta_{22})$

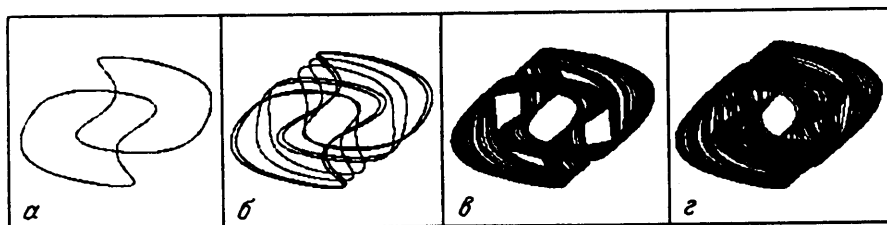
В других областях параметров уравнения (5.8) демонстрируют, по-видимому, все известные сценарии перехода к хаосу. Так, например, в случае твердых границ при  $\varepsilon = 0,3$ ,  $\alpha = 3,85$  потеря устойчивости предельного цикла при  $G = G_1 \approx 1120$  сопровождается рождением устойчивого двумерного инвариантного тора (фиг. 4,а, б). С ростом  $G$  число вращения потока на торе проходит через резонансные значения  $1/7$ ,  $1/9$ . Возникающие при этом предельные циклы устойчивы в довольно широком интервале значений числа  $G$ . Бифуркация удвоения периода устойчивого девятиоборотного цикла, представленного на фиг. 4,в, влечет разрушение двумерного тора [14]. После потери устойчивости периодических движений возникают хаотические колебания; аттрактор, по-видимому, – продукт распада двумерного тора (фиг. 4,з).



Фиг. 3. Отображение Пуанкаре, определенное в гиперплоскости  $\Psi_{12} = 0$ , проекция на плоскость  $(\theta_{21}, \theta_{22})$ . Случай твердых границ,  $\epsilon = 10^{-3}$ ,  $\alpha = 3,85$ ;  $a - G = 82,645$ ;  $b - G = 89,845$



Фиг. 4. Разрушение инвариантного двумерного тора. Отображение Пуанкаре, определенное в гиперплоскости  $\Psi_{12} = 0$ , проекция на плоскость  $(\Psi_{11}, \theta_{22})$ . Случай твердых границ,  $\epsilon = 0,3$ ,  $\alpha = 3,85$ :  $G = 2906$  (а),  $3265$  (б),  $3400$  (в),  $3420$  (г)



Фиг. 5. Проекция траекторий на плоскость  $(\Psi_{11}, \Psi_{12})$ . Случай твердых границ,  $\epsilon = 2$ ,  $\alpha = 3,85$ :  $a -$  симметричная пара простых предельных циклов,  $G = 20408$ ;  $b -$  симметричная пара четырехоборотных предельных циклов,  $G = 23167$ ;  $в -$  симметричная пара аттракторов Фейгенбаума,  $G = 23669$ ;  $г -$  аттрактор, образовавшийся в результате их объединения,  $G = 27778$

Для больших значений  $\epsilon$  потеря устойчивости периодического движения, возникшего при  $G = G_0$ , происходит в результате бифуркации потери симметрии; при этом возникает пара устойчивых периодических решений, симметричных относительно преобразования (5.14). С ростом числа Грасгофа для каждого из этих режимов наблюдается серия бифуркаций удвоения периода (см. фиг. 5).

**Заключение.** Полученные результаты показывают, что конечномерные модели конвекции демонстрируют поведение, нетипичное для аналогичных моделей, например системы Лоренца. Основное отличие заключается в том, что при исчезающей вяз-

кости и диффузии упрощение движения не происходит. При достаточно больших значениях числа Грасгофа устанавливаются хаотические движения с двумя масштабами времени: быстрые нерегулярные колебания с медленно и тоже нерегулярно меняющейся амплитудой. Такое поведение обусловлено нетипичностью полученной асимптотической модели, в частности отсутствием монотонной потери устойчивости для постоянного профиля концентраций в механическом равновесии. Появления двух различных масштабов времени для вторичных течений смеси следовало ожидать – асимптотическая модель описывает не движения отдельных частиц жидкости, а перемещение ее плоских горизонтальных слоев. Интересно было бы построить следующие члены асимптотического приближения и выяснить характер влияния разности потенциалов на развитие вторичных режимов движения. Полученные результаты (асимптотические уравнения, конечномерные модели) без труда переносятся на случай конвекции в пористой среде.

Данная работа была выполнена благодаря поддержке фондов ISF (грант NRQ000 и NRQ300), Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 95-01-01454) и гранта в области естественных наук (С.-Петербург, код проекта 95-0-8.3-51).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бабский В.Г., Жуков М.Ю., Юдович В.И. Математическая теория электрофореза. Применение к методам фракционирования биополимеров. Киев: Наук. думка, 1983, 202 с.
2. Мышкис А.Д., Бабский В.Г., Жуков М.Ю. и др. Методы решения задач гидромеханики для условий невесомости. Киев: Наук. думка, 1992, 590 с.
3. Ригетти П. Изозлектрическое фокусирование. Теория, методы и применение. М.: Мир, 1986, 398 с.
4. Жуков М.Ю. Разделение бесконечнокомпонентных смесей электрическим полем // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1994. Т. 34. № 4. С. 576–583.
5. Жуков М.Ю., Цывенкова О.А. Расчет нейтральных кривых монотонной потери устойчивости для задачи конвекции в бесконечнокомпонентной смеси // Изв. РАН. МЖГ. 1995. № 5. С. 11–20.
6. Жуков М.Ю., Цывенкова О.А. Численное исследование вторичных режимов концентрационной конвекции в задаче об электрофорезе при высоких напряжениях. Ростов-на-Дону, 1994, 77 с. – Деп. в ВИНТИ 07.02.94. № 333–В94.
7. Жуков М.Ю., Цывенкова О.А. Ветвление решений, расчет и асимптотика нейтральных кривых монотонной потери устойчивости в задаче о концентрационной конвекции в электрическом поле // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 5. С. 150–157.
8. Барковский Ю.С., Жуков М.Ю., Цывенкова О.А. Свойства спектра задачи гидродинамической устойчивости при конвекции в бесконечнокомпонентной смеси. Ростов-на-Дону, 1994, 24 с. – Деп. в ВИНТИ 14.03.94. № 594–В94.
9. Жуков М.Ю., Сазонов Л.И. Асимптотика собственных чисел для краевой задачи с дельта-образованными коэффициентами. Ростов-на-Дону, 1993, 29 с. – Деп. в ВИНТИ 07.05.93. № 1231–В93.
10. Федорюк М.В. Метод перевала. М.: Наука, 1977. 368 с.
11. Гледзер Е.Б., Должанский Ф.В., Обухов А.М. Системы гидродинамического типа и их применение. М.: Наука, 1981. 366 с.
12. Жуков М.Ю., Петровская Н.В. Конвекция в сверхтекучей жидкости. Ч. 1. Вывод уравнений; конечномерная модель. Ростов-на-Дону, 1994, 24 с. – Деп. в ВИНТИ 04.02.94. № 331–В94.
13. Есельсон Б.Н., Иванцев В.Г., Коваль В.А. и др. Свойства жидкого и твердого гелия. Растворы  $^3\text{He}$ – $^4\text{He}$ : Справочник. Киев: Наук. думка, 1982. 231 с.
14. Арнольд В.И., Афраймович В.С., Ильясенко Ю.С., Шильников Л.П. Теория бифуркаций // Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНТИ, 1986. Т. 5. С. 5–218.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию  
28.III.1996