МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 • 1997

УДК 532.51.013:532.135

© 1997 г. М.А. БРУТЯН

ДИФФУЗИЯ ЗАВИХРЕННОСТИ В ВЯЗКОУПРУГОЙ ЖИДКОСТИ

Рассматривается задача о диффузии завихренности в вязкоупругой жидкости. В рамках 5-константной модели Олдройда получено уравнение, описывающее эволюцию завихренности, и дано его точное решение для случаев распада изолированного вихря и вихревой решетки. Подробно исследованы наиболее важные частные случаи реологической модели Олдройда: релаксационная модель Максвелла и ретардационная модель жидкости второго порядка. Установлено, что в первом случае решение кардинально отличается от классического и завихренность имеет конечную скорость распространения. Установлено также, что ретардационная модель в отличие от релаксационной не дает качественно новых результатов по сравнению с классическим случаем ньютоновской среды.

Одной из важнейших задач теории нестационарных течений вязкой жидкости является задача о диффузии завихренности. С этим аспектом гидродинамики неизбежно сталкиваются при изучении течений в пограничных слоях, следах и других вихревых образованиях. В классической гидродинамике вязкой ньютоновской жидкости наиболее известные результаты в этой области получены Озееном в задаче о диффузии вихря [1] и Тейлором в задаче о диффузии решетки вихрей [2]. Сложность нестационарных задач в вязкоупругой жидкости привела к тому, что в этом направлении выполнено сравнительно небольшое число работ, посвященных главным образом задаче Стокса – Рэлея о движении плоскости [3–6]. В [7] исследована нестационарная задача Рэлея о схлопывании пузыря в вязкоупругой жидкости и показано, что вязкоупругие эффекты оказывают значительное воздействие на качественное поведение пузыря и заметно усложняют финальную стадию коллапса. Распад вихря в рамках иной модели неньютоновской жидкости рассматривался ранее в [8].

1. Определяющие уравнения. Течение несжимаемой жидкости описывается уравнениями импульса и неразрывности

$$\rho\frac{d\mathbf{V}}{dt}=\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}-\nabla p,\qquad \operatorname{div}\mathbf{V}=0 \tag{1.1}$$

где ρ – плотность, p – давление, $\mathbf{V}$ – скорость, $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор напряжений. В качестве уравнения состояния примем полную дифференциальную модель Олдройда [9]

$$\boldsymbol{\sigma}+\lambda F_c(\boldsymbol{\sigma})=2\eta[\mathbf{D}+\lambda_1 F(\mathbf{D})] \tag{1.2}$$

$$F_c(\boldsymbol{\sigma})=\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt}-\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\sigma}+\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\Omega}-(\mathbf{D}\boldsymbol{\sigma}+\boldsymbol{\sigma}\mathbf{D})+c(\operatorname{Tr}\sigma)\mathbf{D} \tag{1.3}$$

$$F(\mathbf{D})=\frac{d\mathbf{D}}{dt}-\boldsymbol{\Omega}\mathbf{D}+\mathbf{D}\boldsymbol{\Omega}-2\mathbf{D}^2 \tag{1.4}$$

Здесь λ – время релаксации, λ_1 – время ретардации, c – безразмерный параметр модели, η – коэффициент вязкости жидкости, σ – тензор напряжений, $\mathbf{D}$ и $\boldsymbol{\Omega}$ – симметричная и антисимметричная части тензора градиента скорости $\nabla\mathbf{V}$ с компонентами $(\nabla\,\mathbf{V})_{ij} = \partial V_i / \partial x_j$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}[\nabla\,\mathbf{V} + (\nabla\,\mathbf{V})^T], \qquad \mathbf{\Omega} = \frac{1}{2}[\nabla\,\mathbf{V} - (\nabla\,\mathbf{V})^T] \tag{1.5}$$

Уравнения (1.2)–(1.4) включают в себя большое количество известных реологических моделей. В частности, если $\lambda_1 = 0$, олдройдовская модель переходит в класс максвелловских моделей (случай $b = c = 0$ и $a = 1$ соответствует верхнеконвективной модели Максвелла, а $b = c = 0$ и $a = -1$ – нижнеконвективной модели); если $a = \alpha = 1$ и $b = c = \beta = 0$, (1.2)–(1.4) редуцируются к B-модели Олдройда [9].

2. Диффузия вихря. Рассмотрим задачу о диффузии вихря в вязкоупругой жидкости. Помещая вихрь в начальный момент времени $t = 0$ в начало координат r, θ, из соображений симметрии определяем, что скорость будет иметь только одну нетривиальную компоненту, зависящую от r и t, т.е. $\mathbf{V} = \mathbf{V}(0, v(r, t))$. Тогда уравнения движения (1.1) принимают следующий вид:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2\sigma_{r\theta})}{\partial r} \tag{2.1}$$

$$-\frac{v^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(r\sigma_{rr})}{\partial r} - \sigma_{\theta\theta}\right] \tag{2.2}$$

Уравнения состояния (1.2)–(1.5) в этом случае дают

$$\left(1 + \lambda\frac{\partial}{\partial t}\right)\sigma_{rr} = -\lambda\sigma_{r\theta}W(1 - a + b) + \eta\varepsilon\lambda W^2(1 - \alpha + \beta) \tag{2.3}$$

$$\left(1 + \lambda\frac{\partial}{\partial t}\right)\sigma_{\theta\theta} = \lambda\sigma_{r\theta}W(1 + a - b) - \eta\varepsilon\lambda W^2(1 + \alpha - \beta) \tag{2.4}$$

$$\left(1 + \lambda\frac{\partial}{\partial t}\right)\sigma_{r\theta} = \eta\left(1 + \varepsilon\lambda\frac{\partial}{\partial t}\right)W + \frac{1}{2}\lambda W[\sigma_{rr}(1 + a - b) - \sigma_{\theta\theta}(1 - a + c)] \tag{2.5}$$

$$W = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}, \qquad \varepsilon = \frac{\lambda_1}{\lambda} \tag{2.6}$$

В силу известных соображений, связанных с качественным согласованием экспериментальных и теоретических результатов для простейших течений, параметр ε принято считать ограниченным: $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$. Тем не менее отметим, что существуют признанные модели вязкоупругой жидкости, для которых это ограничение не выполняется. Наиболее известной является ретардационная модель, или жидкость второго порядка, для которой $\lambda = 0$, $\lambda_1 \neq 0$ [9].

Рассмотрим подробно 5-константную (η, λ, λ_1, a, α) модель Олдройда, которая получается из полной 8-константной модели Олдройда при наложении следующих ограничений:

$$1 - a + b = 0, \quad 1 - \alpha + \beta = 0, \quad 1 - a + c = 0 \tag{2.7}$$

или

$$1 + a - b = 0, \quad 1 + \alpha - \beta = 0, \quad 1 + a - c = 0 \tag{2.8}$$

В рамках этих соотношений находится, например, широко известная В-модель Олдройда. Для определенности примем ограничение (2.7), тогда из уравнения (2.3) имеем $\sigma_{rr} = \sigma_0\exp(-t/\lambda)$. При выполнении (2.8) аналогичное решение имеет место для компоненты тензора напряжений $\sigma_{\theta\theta}$. Допустим, что в начальный момент

$t = \sigma_0 = 0$ (случай $\sigma_0 \neq 0$ исследуется аналогично, но является более громоздким); тогда уравнения движения (2.1)–(2.6) редуцируются к виду

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2\sigma_{r\theta})}{\partial r} \tag{2.9}$$

$$\frac{v^2}{r} = \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} \tag{2.10}$$

$$\left(1 + \lambda\frac{\partial}{\partial t}\right)\sigma_{\theta\theta} = 2\lambda W(\sigma_{r\theta} - \varepsilon\eta W) \tag{2.11}$$

$$\left(1 + \lambda\frac{\partial}{\partial t}\right)\sigma_{r\theta} = \eta\left(1 + \varepsilon\lambda\frac{\partial}{\partial t}\right)W \tag{2.12}$$

Возможность решения системы нелинейных уравнений (2.9)–(2.12) заключается в том, что для нахождения поля скоростей $v(r, t)$ достаточно решить подсистему линейных уравнений (2.9) и (2.12). После чего из (2.11) и (2.10) последовательно определяются компонента тензора напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ и давление p. Применяя к (2.9) оператор $1 + \lambda\partial/\partial t$, исключаем из (2.9) и (2.12) функцию $\sigma_{r\theta}$. В результате имеем

$$\left(1 + \lambda\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial v}{\partial t} = \eta\left(\frac{2}{r} + \frac{\partial}{\delta r}\right)\left(W + \lambda_1\frac{\partial W}{\partial t}\right)$$

или после несложных преобразований окончательно получаем

$$\left(1 + \lambda\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial v}{\partial t} = \eta\left(1 + \lambda_1\frac{\partial}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2}\right) \tag{2.13}$$

Уравнение (2.13) относится к t-гиперболическому типу. Для дальнейшего рассмотрения удобно перейти от уравнения относительно скорости v к уравнению относительно завихренности $\omega = \partial v / \partial r + v / r$; тогда (2.13) принимает вид

$$\left(1 + \lambda\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial \omega}{\partial t} = \eta\left(1 + \lambda_1\frac{\partial}{\partial t}\right)\Delta\omega, \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} \tag{2.14}$$

Математически задача свелась к нахождению функции Грина уравнения (2.14). Применим преобразование Фурье по пространственным переменным

$$\omega(t, x_1, x_2) = \iint \Omega(t, p_1, p_2)\exp[-i(p_1x_1 + p_2x_2)]dp_1dp_2 \tag{2.15}$$

В результате для Ω получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\left(1 + \lambda\frac{d}{dt}\right)\frac{d\Omega}{dt} = -\eta p^2\left(1 + \lambda_1\frac{d}{dt}\right)\Omega, \qquad p^2 = p_1^2 + p_2^2 \tag{2.16}$$

Решая (2.16), находим Ω. Начальные условия для Ω определяем из начальных условий для ω с учетом обратного преобразования Фурье

$$\Omega(t, p_1, p_2) = (2\pi)^{-2}\iint \omega(t, x_1, x_2)\exp[i(p_1x_1 + p_2x_2)]dx_1dx_2$$

Из (2.16) следует, что в отличие от ньютоновской жидкости в данном случае наряду с обычным предположением $\omega(0, x_1, x_2) = \Gamma\delta(x_1)\delta(x_2)$, где Γ – циркуляция, необходимо задать значение производной $\partial\omega/\partial t$ при $t = 0$. Естественно предположить $\partial\omega / \partial t(0, x_1, x_2) = 0$, так что

$$\Omega(0, p_1, p_2) - \frac{\Gamma}{4\pi^2}, \qquad \frac{d\Omega}{dt}(0, p_1, p_2) = 0 \tag{2.17}$$

Окончательно решение (2.16) и (2.17) имеет вид

$$\Omega = A_1 \exp(m_1 t) + A_2 \exp(m_2 t) \tag{2.18}$$

$$m_{1,2} = -\frac{(\lambda^{-1} + \varepsilon\eta p^2)}{2} \pm \sqrt{\frac{(\lambda^{-1} + \varepsilon\eta p^2)^2}{4} - \eta p^2 \lambda^{-1}}$$

где постоянные A_1 и A_2 определяются из (2.17) и равны

$$A_1 = \frac{\Gamma m_2}{4\pi^2 (m_2 - m_1)}, \qquad A_2 = -\frac{\Gamma m_1}{4\pi^2 (m_2 - m_1)} \tag{2.19}$$

Поскольку Ω является функцией только t и p^2, то интегрирование по углу, определяющему направление вектора $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$, можно выполнить независимо. В результате (2.15) редуцируется к однократному интегралу

$$\omega(r,t) = 2\pi \int_0^\infty J_0(pr) \Omega(p,t) p dp \tag{2.20}$$

Здесь J_0 – функция Бесселя нулевого порядка. При $0 < \lambda < \lambda_1$ решение (2.18)–(2.20) имеет вид

$$\omega(r,t) = \frac{1}{r^2} \int_0^\infty J_0(x) \Omega(x,t) x dx$$

$$\Omega(x,t) = \Omega_0 = \exp\left(-\frac{At}{2\lambda}\right) \left[\frac{A}{|B|^{1/2}} \operatorname{sh}\left(\frac{|B|^{1/2} t}{2\lambda}\right) + \operatorname{ch}\left(\frac{|B|^{1/2} t}{2\lambda}\right) \right]$$

$$A = 1 + \lambda_1 \frac{x^2}{r^2}, \quad B = A^2 - 4\lambda \frac{x^2}{r^2}$$

Рассмотрим наиболее важные частные случаи модели Олдройда. Для жидкости второго порядка $\lambda = 0$, так что соотношение (2.20) упрощается и принимает форму

$$\omega(r,t) = \frac{\Gamma}{2\pi} \int_0^\infty J_0(pr) \exp\left(-\frac{\eta p^2 t}{1 + \lambda_1 \eta p^2}\right) p dp \tag{2.21}$$

Вводя безразмерные переменные $t^* = t/\lambda_1$, $r^* = r/L$, $p^* = pL$, где $L = (\lambda_1 \eta)^{1/2}$ – "вязкоупругое ядро вихря", приведем (2.21) к виду (звездочки опущены)

$$\omega(r,t) = \frac{\Gamma}{2\pi L^2} \exp(-t) \int_0^\infty J_0(pr) \exp\left(\frac{t}{1 + p^2}\right) p dp \tag{2.22}$$

Численное исследование (2.22) показывает, что завихренность в данном месте возрастает с течением времени от нуля до максимума, а затем опять уменьшается до нуля. В скейлинговом пределе $r \to \infty$, $t \to \infty$, $r^2/t \to$ finite решение (2.22) выходит на озееновскую асимптотику, характерную для вязкой ньютоновской жидкости

$$\omega(r,t) = \frac{\Gamma}{4\pi\eta t} \exp\left(-\frac{r^2}{4\eta t}\right)$$

Изучим подробное поведение решения внутри ядра, $r = O(1)$. Из (2.22) получаем, что эволюция завихренности в точке расположения вихря, $r = 0$, дается формулой

$$\omega(0,t) = \frac{\Gamma}{4\pi L^2} \int_1^\infty \exp\left(\frac{t}{u} - t\right) du \tag{2.23}$$

На больших временах $t \to \infty$ интеграл (2.23) вычисляется асимптотически. В результате находим

$$\omega(0,t) = \frac{\Gamma}{4\pi L^2}\left(\frac{1}{t} + \frac{2!}{t^2} + \frac{3!}{t^3} + \ldots\right)$$

В более реалистическом случае $\lambda > \lambda_1 > 0$ имеем

$$\Omega(x,t) = \begin{cases} \Omega_0(x,t), & 0 < x^2 / r^2 < \rho_1 \\ \exp\left(-\dfrac{At}{2}\right)\left[\dfrac{A}{|B|^{1/2}}\sin\left(\dfrac{|B|^{1/2} t}{2\lambda}\right) + \cos\left(\dfrac{|B|^{1/2} t}{2\lambda}\right)\right], & \rho_1 \leqslant x^2 / r^2 \leqslant \rho_2 \\ \Omega_0(x,t), & x^2 / r^2 > \rho_2 \end{cases}$$

$$\rho_{1,2} = \frac{-\lambda_1 + 2\lambda \mp \sqrt{4\lambda(\lambda - \lambda_1)}}{\lambda_1^2}$$

В практически важном случае максвелловской жидкости время ретардации $\lambda_1 = 0$ и уравнение (2.14) переходит в известное телеграфное уравнение, решение которого имеет вид

$$\omega(r,t) = \frac{\Gamma C}{2\pi\eta}\exp\left(-\frac{t}{2\lambda}\right)\frac{\mathrm{ch}\left(C / 2\eta\sqrt{C^2 t^2 - r^2}\right)}{\sqrt{C^2 t^2 - r^2}} H(Ct - r) \qquad (2.24)$$

Здесь $C = \sqrt{\eta / \lambda}$ – скорость распространения завихренности, а через H обозначена функция Хэвисайда. Заметим, что в отличие от ньютоновской среды в релаксационной модели завихренность распространяется на конечное расстояние $r = Ct$. Из (2.24) также следует, что в точке расположения вихря завихренность дается формулой

$$\omega(0,t) = \frac{\Gamma}{4\pi\eta t}\left[1 + \exp\left(-\frac{t}{\lambda}\right)\right]$$

3. Диффузия вихревой решетки. Рассмотрим теперь задачу Тейлора о диффузии вихревой решетки с периодом 2π по осям x и y. По аналогии с классическим случаем ньютоновской жидкости решение ищем в виде

$$\Psi = \exp(-mt)\cos(x)\cos(y), \quad \omega = -\Delta\Psi = 2\exp(-mt)\cos(x)\cos(y) \qquad (3.1)$$

Вновь рассмотрим две основные модели: релаксационную (жидкость Максвелла) и ретардационную (жидкость второго порядка). В первом случае получаем

$$m_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 8\pi^2 k}}{2\lambda}, \quad k = \lambda\eta \qquad (3.2)$$

Из (3.2), видно, что (3.1) нужно считать суперпозицией двух решений, соответствующих m_1 и m_2. Параметр k является отношением чисел Деборы и Рейнольдса: k = De/Re. Из (3.1) и (3.2) вытекает, что при $k < (8\pi^2)^{-1}$ происходит экспоненциальный распад вихрей, качественно близкий к классическому; при $k > (8\pi^2)^{-1}$ на экспоненциальный распад вихрей накладываются колебания с частотой $\sqrt{8\pi^2 k - 1}$. Другими словами, при De > Re/8 вязкоупругие эффекты кардинально изменяют решение по сравнению с классическим.

В рамках ретардационной модели после несложных вычислений приходим к окончательному выражению для m и Ψ

$$m = \frac{2\eta}{1 + 2\eta\lambda_1}, \quad \Psi = \exp\left(-\frac{2\eta t}{1 + 2\eta\lambda_1}\right)\cos(x)\cos(y)$$

Из полученного решения видим, что оно, как и в задаче о диффузии изолированного вихря в жидкости второго порядка, качественно совпадает с классическим решением.

Заключение. Рассмотрена задача о диффузии завихренности в вязкоупругой жидкости Олдройда. На основании анализа точных решений задач о распаде изолированного вихря и вихревой решетки установлено, что в зависимости от реологической модели среды наблюдается различное динамическое поведение. Ретардационная модель жидкости второго порядка не дает качественно новых результатов по сравнению с классическим случаем ньютоновской среды. Релаксационная модель Максвелла ведет к результатам, кардинально отличающимся от классических. В частности, получено, что эволюция изолированного вихря описывается телеграфным уравнением и имеет конечную скорость распространения в отличие от классической ньютоновской жидкости, в которой она бесконечна. В задаче о диффузии вихревой решетки найдено условие, при котором качественно изменяется характер решения, а именно на экспоненциальный распад вихрей накладываются колебания с частотой, зависящей от числа Деборы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Oseen C.W.* Neuere Methoden und Ergebnisse in der Hydrodynamik. Leipzig: Akad. Verlag, 1927. 337 S.
2. *Taylor G.I.* On the decay of vortices in a viscous fluid // Phil. Mag. 1923. V. 46. P. 671–674.
3. *Tanner R.I.* Note on the Rayleigh problem for a visco-elastic fluid // ZAMP. 1962. V. 13. № 6. P. 573–580.
4. *Huilgol R.R.* Propagation of a vortex sheet in a visco-elastic liquids – the Rayleigh problem // J. Non-Newton. Fluid Mech. 1981. V. 8. № 3/4. P. 337–347.
5. *Huilgol R.R.* Corrections and extensions to "Propagation of a vortex sheet in a visco-elastic liquids – the Rayleigh problem" // J. Non-Newton. Fluid Mech. 1983. V. 12. № 2. P. 249–251.
6. *Mochimaru Y.* Unsteady – state development of plane Couette flow for visco-elastic fluids // J. Non-Newton. Fluid Mech. 1983. V. 12. № 2. P. 135–152.
7. *Brutyan M.A., Krapivsky P.L.* Collapse of spherical bubbles in visco-elastic liquids // Quart. J. Mech. and Appl. Math. 1991. V. 44. № 4. P. 549–557.
8. *Bujurke M.M., Biradar S.N., Hiremath P.S.* On diffusion of vorticity in couple stress fluid // ZAMM. 1988. V. 68. № 1. P. 577–580.
9. *Bird R.B., Armstrong R.C., Hassager O., Curtiss C.F.* Dynamics of polymeric liquids. N.Y.: Wiley, 1987. V. 1. 470 p.; V. 2. P. 471–727.

Москва

Поступила в редакцию
13.III.1996