

УДК 532.59

© 1997 г. В.И. ИВАНОВ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВОЛН ПРЕДЕЛЬНОЙ АМПЛИТУДЫ НА ПОВЕРХНОСТИ ГЛУБОКОЙ ЖИДКОСТИ

Задача о периодических волнах предельной амплитуды решается методом конформного отображения плоскости комплексного потенциала на область, близкую к области течения. Строится аналитическая функция, точно отображающая полуполосу на деформированный круговой треугольник. Параметры отображения подбираются так, чтобы полученная область была близка к одному периоду области течения для предельной волны Стокса. Для построенного течения вычисляются координаты узлов сети линий тока и эквипотенциалей, а также компоненты скорости и давление в узлах сети.

Точная теория установившихся периодических безвихревых волн на поверхности бесконечно глубокой жидкости разработана достаточно подробно [1–3], однако численных результатов получено мало. Некоторые интегральные характеристики волн предельной амплитуды приведены в [4]. Известно, что для волн предельной амплитуды угол при гребне волны равен 120° (условие Стокса), а отношение высоты волны H к ее длине L равно $c_1 = H/L = 0,14106$.

В работе [5] приведены весьма подробные и точные численные результаты для периодических волн предельной амплитуды в канале конечной глубины, вычисленные по сложным многочленным формулам. В случае, когда глубина канала много больше длины волны, эти данные достаточно хорошо описывают волны на поверхности бесконечно глубокой жидкости.

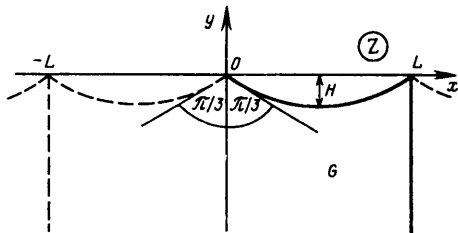
В настоящей работе предлагается простая математическая модель волны предельной амплитуды, основанная на конформном отображении кругового треугольника.

Введем декартову систему координат, связанную с волной, в которой движение жидкости является стационарным. Начало координат поместим на гребне волны, ось y направим вертикально вверх, а ось x – горизонтально против движения волны. Рассмотрим на плоскости комплексной переменной $z = x + iy$ область G , представляющую один период области течения $0 < x < L$, где L – длина волны. Область G представляет бесконечную полуполосу с выброшенным криволинейным сегментом и с углами $\pi/3$ в точках $z_1 = 0$ и $z_2 = L$ (фиг. 1). Бесконечные участки границы (лучи параллельных прямых) представляют эквипотенциалы, свободная поверхность – линию тока, на которой скорость жидкости v удовлетворяет условию

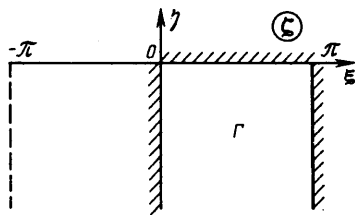
$$v^2 / 2 + gy = 0 \tag{1}$$

Отобразим конформно область G на прямолинейную полуполосу Γ в плоскости комплексной переменной $\zeta = \xi + i\eta$, пропорциональной комплексному потенциалу: $0 < \xi < \pi$, $\eta < 0$ (фиг. 2). Функция $z = f(\zeta)$ отображает точки $\zeta_1 = 0$ и $\zeta_2 = \pi$ соответственно в точки $z_1 = 0$ и $z_2 = L$ и имеет в этих точках особенности вида

$$f(\zeta) = z_k + O(\zeta - \zeta_k)^{2/3}, \quad f'(\zeta) = O(\zeta - \zeta_k)^{-1/3}, \quad k = 1, 2$$



Фиг. 1. Плоскость течения G – область течения для одного периода волны



Фиг. 2. Плоскость вспомогательной переменной ζ , Γ – область изменения комплексного потенциала, соответствующая одному периоду волны

Построим аналитическую функцию $Z = F(\zeta)$, конформно отображающую область Γ на некоторую область (деформированный круговой треугольник), близкую к области G . Последовательность преобразований

$$s = \cos \zeta, \quad t = (s - 1) / (s + 1) \quad (2)$$

отображает область Γ на полуплоскость $\text{Im } t > 0$. При этом точки ζ_1, ζ_2 и $\zeta_3 = \infty$ отображаются соответственно в точки $t_1 = 0, t_2 = \infty$ и $t_3 = 1$.

Отображение полуплоскости $\text{Im } t > 0$ на круговой треугольник с углами $\pi/3, \pi/3, 0$ осуществляется отношением двух линейно независимых решений гипергеометрического уравнения с параметрами $1/6, 1/2, 2/3$ и независимой переменной t [6]. Так, функция

$$\omega = \frac{t^{1/3} F(1/2, 5/6, 4/3; t)}{F(1/6, 1/2, 2/3; t)} \quad (3)$$

реализует конформное отображение полуплоскости на круговой треугольник с углами $\pi/3, \pi/3, 0$, изображенный на фиг. 3. При этом точки $t = 0, \infty, 1$ отображаются соответственно в точки

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = e^{i\pi/3} \frac{\pi \Gamma(4/3)}{\Gamma(2/3) \Gamma^2(5/6)} = 1,62596 e^{i\pi/3}, \quad \omega_3 = \frac{\Gamma(4/3) \Gamma(1/6)}{\Gamma(2/3) \Gamma(5/6)} = 3,25193 = 2|\omega_2|$$

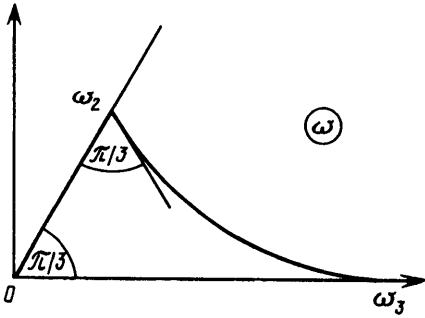
Дробно-линейное преобразование

$$w = i\omega / (\omega - \omega_3) \quad (4)$$

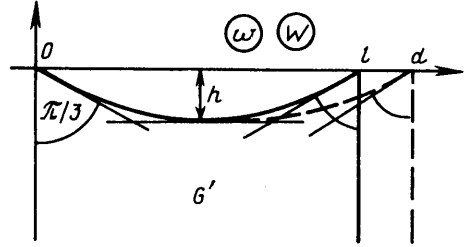
отображает круговой треугольник фиг. 3 на другой круговой треугольник – бесконечную полуполосу

$$0 < \text{Re } w < d = 1 / \sqrt{3}, \quad \text{Im } w < 0$$

с выброшенным сегментом круга. Таким образом, функция $w = w(\zeta)$, представляющая последовательность преобразований (2) – (4), отображает полуполосу Γ на круговой треугольник с углами $\pi/3, \pi/3, 0$, похожий на область течения G (на фиг. 4 он обозначен штриховой линией). Однако для этого кругового треугольника отношение высоты сегмента h к его хорде d равно $c_p = h/d = 1/2 \text{tg}(\pi/12) = 0,13397$, что отличается



Фиг. 3. Отображение на круговой треугольник, осуществляемое функцией (3)



Фиг. 4. Отображение на круговой треугольник, осуществляемое функцией (4) (штриховая линия). Отображение на область G' осуществляемое функцией (5) (сплошная линия)

от величины c_r . Вводя новую функцию

$$W = w(\zeta) - a\zeta, \quad a = d / \pi(1 - c_p / c_r) \quad (5)$$

получим новую область (деформированный круговой треугольник), для которой отношение высоты волны h к длине волны $l = d - a\pi$ равно c_r , а углы равны $\pi/3, \pi/3, 0$.

Функция, определяемая цепочкой преобразований (2) – (5), отображает полуполосу Γ на область G' , весьма близкую к области течения G . При этом декартова сеть в полуполосе Γ отображается в сеть линий тока и эквипотенциалей некоторого течения в области G' , которое моделирует движение жидкости в волне Стокса. Граница области G' обозначена на фиг. 4 сплошной линией. Для выяснения точности предлагаемой модели проведено сравнение с результатами работы [5]. Координаты узлов сети линий тока и эквипотенциалей X, Y вычислялись в тех же узлах, в той же системе отсчета и том же масштабе, которые использовались в [5], где полагалось $g = 5; L = 1,18482$. В качестве независимой переменной рассматривался комплексный потенциал $\chi = \phi + i\psi$, отличающийся от переменной ζ множителем $\lambda/\pi = 0,4$, где $\lambda = 2\pi/g = 0,4\pi$. В [5] начало отсчета (гребень волны) помещено в точке $Z_0 = -i0,0897$, а направление осей противоположно.

Для сопоставления с данными [5] вычислялась функция

$$Z(\zeta_{nk}) = WL/l - 0,0897i \quad (6)$$

$$\zeta_{nk} = \xi_n + i\eta_k = 0,1\pi n + i0,5k \quad (n, k = 0, 1, \dots, 5)$$

$$\phi_n = 0,1\lambda n, \quad \psi_k = 0,2k$$

Результаты расчета координат узлов по формуле (6) приведены в табл. 1. Числа, приведенные в таблице, отличаются от результатов работы [5] не более чем на одну единицу в последнем десятичном знаке.

Вычисление гипергеометрической функции проводилось внутри круга $|t| < 1$ суммированием гипергеометрического ряда, а вне круга – по известным формулам аналитического продолжения гипергеометрической функции.

Для вычисления распределения скоростей частиц жидкости в рассматриваемой модели волны Стокса воспользуемся формулой

$$\bar{v} = C / W'(\zeta) \quad (7)$$

$$W'(\zeta) = \frac{ds}{d\zeta} \frac{dt}{ds} \frac{d\omega}{dt} \frac{dw}{d\omega} - a \quad (8)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{B}{F^2(1/6, 1/2, 2/3; t)}, \quad B = \frac{1}{3} t^{-2/3} (1-t)^{-1}$$

Таблица 1

Ψ	$\varphi/\lambda = 0$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
X						
0,0	0,0000	0,1763	0,2915	0,3956	0,4950	0,5924
-0,2	0,0000	0,1333	0,2574	0,3731	0,4839	0,5924
-0,4	0,0000	0,1232	0,2442	0,3623	0,4780	0,5924
-0,6	0,0000	0,1201	0,2396	0,3580	0,4755	0,5924
-0,8	0,0000	0,1191	0,2379	0,3564	0,4745	0,5924
-1,0	0,0000	0,1187	0,2373	0,3558	0,4741	0,5924
Y						
0,0	0,0897	0,1763	0,2152	0,2392	0,2526	0,2569
-0,2	0,3794	0,3859	0,3989	0,4107	0,4184	0,4210
-0,4	0,5835	0,5852	0,5894	0,5939	0,5973	0,5985
-0,6	0,7771	0,7777	0,7791	0,7808	0,7821	0,7826
-0,8	0,9675	0,9677	0,9682	0,9688	0,9693	0,9695
-1,0	1,1567	1,1568	1,1570	1,1572	1,1574	1,1574

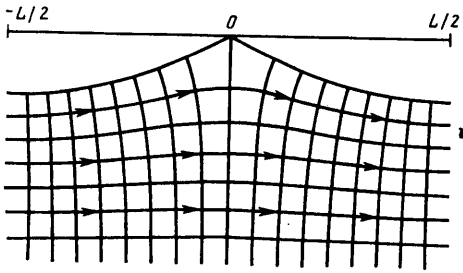
Таблица 2

Ψ	$\varphi/\lambda = 0$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
V_x						
0,0	0,0033	0,8645	1,0779	1,2027	1,2712	1,2933
-0,2	0,9255	0,9649	1,0401	1,1055	1,1470	1,1610
-0,4	1,0158	1,0256	1,0491	1,0747	1,0934	1,1001
-0,6	1,0444	1,0476	1,0556	1,0652	1,0726	1,0753
-0,8	1,0544	1,0555	1,0584	1,0619	1,0647	1,0658
-1,0	1,0581	1,0585	1,0595	1,0608	1,0618	1,0623
V_y						
0,0	0,0000	0,3432	0,3024	0,2174	0,1128	0,0000
-0,2	0,0000	0,0859	0,1152	0,0978	0,0546	0,0000
-0,4	0,0000	0,0269	0,0411	0,0386	0,0228	0,0000
-0,6	0,0000	0,0094	0,0148	0,0145	0,0088	0,0000
-0,8	0,0000	0,0034	0,0054	0,0054	0,0033	0,0000
-1,0	0,0000	0,0012	0,0020	0,0020	0,0012	0,0000
P						
0,0	0,0000	0,0000	0,0007	0,0004	-0,0003	-0,0006
-0,2	1,0198	1,0115	0,9982	0,9889	0,9839	0,9823
-0,4	1,9530	1,9512	1,9470	1,9427	1,9398	1,9388
-0,6	2,8917	2,8911	2,8897	2,8881	2,8868	2,8864
-0,8	3,8329	3,8327	3,8322	3,8316	3,8311	3,8309
-1,0	4,7751	4,7751	4,7749	4,7747	4,7746	4,7744

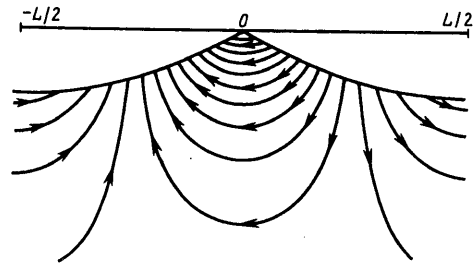
где C – нормировочный множитель, зависящий от выбора системы единиц, B – определитель Вронского двух линейно независимых решений гипергеометрического уравнения.

Для получения согласия с результатами работы [5] зададим нормирующий множитель C . Один возможный способ нормировки – по скорости в бесконечно удаленной точке, равной скорости волны. В [5] скорость волны $v_b = 1,06061$, в соответствии с этим можно положить

$$C = v_b W'(\infty) = v_b l / \pi$$



Фиг. 5. Линии тока и эквипотенциали поля скоростей в движущейся системе координат



Фиг. 6. Линии тока в неподвижной системе координат

При такой нормировке формула (7) хорошо описывает распределение скорости при больших значениях y , но вблизи свободной поверхности это распределение скорости не является точным. Для уточнения выберем C так, чтобы лучшим образом удовлетворить граничным условиям (1). Для точного решения отношение $v^2 / (2y)$ имеет на свободной поверхности постоянное значение

$$-v^2 / (2y) = g = \text{const}$$

(в работе [5] $g = 5$). В модельном решении это отношение не постоянно колеблется около некоторого среднего значения $\langle g \rangle$, близкого к 5. Значение $\langle g \rangle$, вычисленное по 20 точкам, равно 5,0043. Выбирая в формуле (7) нормировочный множитель равным

$$C = v_b l / \pi \sqrt{g / \langle g \rangle} \quad (9)$$

получим распределение скоростей, точнее удовлетворяющее граничному условию (1). Результаты вычисления компонент скорости V_x, V_y по формулам (7) – (9) приведены в табл. 2. На свободной поверхности компоненты скорости в модельном течении отличаются от их точных значений [5] не более чем на единицу в третьем десятичном знаке после запятой. Исключением является критическая точка $\zeta = 0$ (гребень волны), в которой скорость определяется с большой вычислительной ошибкой. Числа в остальных строках табл. 2 отличаются от точных значений [5] не более чем на 5–6 единиц последнего десятичного знака.

В рассматриваемой модели скорость волны равна $v_n = v_b \sqrt{g / \langle g \rangle} = 1,06016$, а число Фруда $Fr = 0,43538$ (точное значение $v_b / \sqrt{gL} = 0,43575$).

В табл. 2 приведены результаты расчета давления P в узлах сети линий тока и эквипотенциалей. Давление вычислялось по формуле

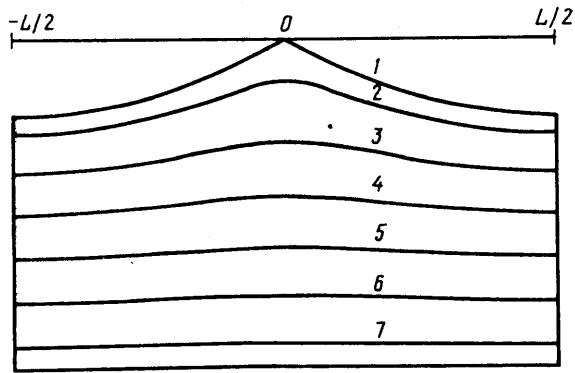
$$P = -v^2 / 2 - gy \quad (10)$$

где $y = \text{Im } W$. На свободной поверхности давление отличается от нуля не более чем на 0,0007, в остальных строках табл. 2 числа отличаются от точных значений [5] не более чем на 2 единицы последнего десятичного знака. Сеть линий тока и эквипотенциалей в движущейся системе координат, построенная по формулам (2) – (6), представлена на фиг. 5. На фиг. 6 изображены векторные линии поля скоростей жидкости в неподвижной системе координат, в которой течение является нестационарным. Изображение построено как семейство изолиний вещественной функции $F(Z)$, задаваемой в параметрической форме

$$F = \text{Im}(W(\zeta) - \zeta l / \pi), \quad Z = W(\zeta)$$

где ζ – параметрическая переменная, пробегающая область Γ . На фиг. 7 представлены изобары, т.е. линии уровня функции (10).

Фигуры 5–7 построены с помощью модифицированной программы CONFORM, разработанной автором совместно с М.К. Трубецковым [7].



Фиг. 7. Изобары для волны предельной амплитуды, $p = 0; 0,25; 0,75; 1,25; 1,75; 2,25; 2,75$ (линии 1–7)

Заключение. Построено конформное отображение плоскости комплексного потенциала на область, близкую к области течения для предельной волны Стокса. Для построенной модели течения вычислены координаты узлов сети линий тока и эквипотенциалей, а также компоненты скорости и давление в узлах сети. Проведенное сравнение полученных результатов с расчетами по точным алгоритмам показало высокую точность предлагаемой модели.

Автор благодарен Г.Ю. Степанову за ценные советы и обсуждение данной статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Некрасов А.И. Точная теория волн установившегося вида на поверхности тяжелой жидкости // Собр. соч. Т. 1. М.: Изд-во АН СССР, 1961. С. 358–439.
2. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 815 с.
3. Теория поверхностных волн. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. 366 с.
4. Cokelet E.D. Steep gravity waves in water of arbitrary uniform depth // Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 1977. V. 286. P. 183–230.
5. Williams J.M. Limiting gravity waves in water of finite depth // Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 1981. V. 302. № 1466. P. 139–188.
6. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. 3. Ч. 2. М.: Гостехиздат, 1953. 674 с.
7. Ivanov V.I., Trubetskoy M.K. Handbook of conformal mapping with computer-aided visualization. Boca Raton a.o.: CRC Press, 1995. 360 p.

Москва

Поступила в редакцию
28.III.1996