

УДК 532.68.013.4:537.21:551.594.2

© 1997 г. А.И. ГРИГОРЬЕВ, С.О. ШИРЯЕВА

## КАПИЛЛЯРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЗАРЯЖЕННОЙ КАПЛИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ С КОНЕЧНОЙ ПРОВОДИМОСТЬЮ

Выводится дисперсионное уравнение для капиллярных движений в сферической капле вязкой, обладающей конечной проводимостью жидкости. Решение задачи проводится в рамках метода скаляризации в сферической системе координат. Учет конечности скорости выравнивания потенциала вдоль поверхности капли приводит к дополнительному затуханию капиллярных колебаний, происходящему из-за наличия сдвига фаз между капиллярной волной и связанной с ней волной перераспределяющегося заряда.

Капиллярные колебания и устойчивость заряженных капель при различных физических характеристиках жидкости и среды неоднократно исследовались и экспериментально и теоретически (см., например, обзор [1]). Однако до сих пор не рассмотрено влияние конечности скорости перераспределения заряда при деформации капли, хотя общие подходы к решению подобной задачи сформулированы давно [2, 3]. Так, влияние эффекта конечности скорости релаксации заряда в жидкости на закономерности капиллярного волнового движения на ее заряженной поверхности и ее устойчивости изучено как для плоской, так и для цилиндрической границ [2–4]. В связи с разработкой удобного для аналитического анализа векторных уравнений гидродинамики в сферической системе координат метода скаляризации [5, 6] стало возможным провести подобное исследование и для сферической капли.

1. Пусть сферическая капля вязкой несжимаемой жидкости плотности  $\rho$  с коэффициентами кинематической вязкости  $\nu$  и поверхностного натяжения  $\alpha$ , удельной проводимостью  $\sigma$ , диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_1$  обладает зарядом  $Q$  и помещена в среду с характеристиками  $\sigma = 0$ ,  $\epsilon_2 = 1$ . Уравнение свободной поверхности капли в сферической системе координат с началом в центре капли запишется в виде:  $r = R + \xi(\theta, \varphi, t)$ , где  $R$  – радиус невозмущенной капли и  $\xi$  – возмущение равновесной сферической поверхности капли, вызванное капиллярным волновым движением,  $|\xi| \ll R$ .

Для упрощения записи и последующих вычислений введем безразмерные переменные, в которых  $R = 1$ ,  $\rho = 1$ ,  $\alpha = 1$ . Тогда остальные величины (за которыми оставим прежние обозначения) выразятся в единицах своих характерных значений

$$r_* = R, \quad t_* = \sqrt{\frac{R^3 \rho}{\alpha}}, \quad u_* = \sqrt{\frac{\alpha}{R \rho}}, \quad P_* = \frac{\alpha}{R}, \quad \sigma_* = \sqrt{\frac{\alpha}{R^3 \rho}}$$

$$Q_* = \sqrt{R^3 \alpha}, \quad \nu_* = \sqrt{\frac{R \alpha}{\rho}}$$

Система уравнений гидродинамики в электростатическом поле  $\mathbf{E}$  с потенциалом  $\Phi$ , создаваемым зарядом  $Q$ , имеет вид [2, 3]

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} = -\nabla P_1 + \nu \Delta \mathbf{u}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad (1.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D}_1 = 4\pi\mu, \operatorname{div} \mathbf{D}_2 = 0, \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \mathbf{E} = -\nabla \Phi \quad (1.2)$$

Индекс 1 относится к капле, а индекс 2 – к внешней среде;  $\varepsilon_i$  – диэлектрическая проницаемость (ниже принимается, что  $\varepsilon_2 = 1, \varepsilon_1 \equiv \varepsilon$ );  $\Phi_i$  – электрический потенциал;  $\mu(\mathbf{r}, t)$  – объемная плотность заряда;  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  – поле скоростей;  $P_1(\mathbf{r}, t)$  – давление внутри жидкости при наличии внешнего электрического поля.

На свободной поверхности капли  $F(\mathbf{r}, t) \equiv r - 1 - \xi(\theta, \varphi, t) = 0$  должны выполняться следующие граничные условия:

$$\frac{dF}{dt} \equiv \frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla F = 0 \quad (1.3)$$

$$(\Pi_{2\tau} - \Pi_{1\tau}) - \nu[\tau(\mathbf{n} \nabla) \mathbf{u} + \mathbf{n}(\tau \nabla) \mathbf{u}] = 0, \Pi_\tau = \frac{\varepsilon}{4\pi} E_n E_\tau \quad (1.4)$$

$$r = 1 + \xi;$$

$$-(P_1 - P_2) + 2\nu \mathbf{n}(\mathbf{n} \nabla) \mathbf{u} + P_E + P_\alpha = 0 \quad (1.5)$$

$$D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\kappa, \Phi_1 = \Phi_2 \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} - \sigma(\mathbf{n} \mathbf{E}_1) + \operatorname{div}_\Sigma \kappa(\mathbf{u}_\tau + b \mathbf{E}_\tau) = 0$$

Здесь  $E_n, E_\tau$  – нормальная и касательная компоненты напряженности электрического поля;  $\mathbf{n}$  и  $\tau$  – орты нормали и касательной к поверхности;  $P_2$  – давление внешней среды;  $P_E$  (см. Приложение (6.12)) и  $P_\alpha$  [7] – давления электрических сил и сил поверхностного натяжения;  $\kappa(\theta, \varphi, t)$  – поверхностная плотность электрического заряда;  $b$  – подвижность заряженных частиц;  $\mathbf{u}_\tau, \mathbf{E}_\tau$  – векторы, лежащие в касательной плоскости;  $\operatorname{div}_\Sigma \mathbf{a}$  – поверхностная дивергенция.

Пусть также

$$r \rightarrow \infty: \Phi_2 \rightarrow 0, r \rightarrow 0: \Phi_1 \rightarrow \text{const} \quad (1.7)$$

Кроме того, пусть выполняются условия постоянства объема капли и неподвижности ее центра масс

$$\int_V dV = \frac{4}{3}\pi, \int_V r dV = 0 \quad (1.8)$$

Система уравнений (1.1), (1.2) с условиями (1.3)–(1.8) представляет собой математическую формулировку решаемой задачи.

2. Для определения равновесной формы поверхности капли в отсутствие движения жидкости положим  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = 0$  и  $\xi(\theta, \varphi, t) = 0$ . Тогда из системы (1.1) находится  $P_1^\circ = \text{const}$ , где  $P_1^\circ$  – значение  $P_1$  для равновесной поверхности капли, граничные условия (1.3), (1.4) обращаются в тождества, а из граничного условия (1.5) получается уравнение, определяющее равновесную сферическую форму капли  $F(\mathbf{r}, t) = r - 1 = 0$

$$\Delta P \equiv P_1^\circ - P_2 = P_\alpha^\circ - P_E^\circ \quad (2.1)$$

где  $P_\alpha^\circ$  и  $P_E^\circ$  – давление сил поверхностного натяжения и электрических сил на равновесную сферическую поверхность капли.

Решение задачи о капиллярных колебаниях капли проведем в линейном по полю скоростей  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  и возмущению поверхности  $\xi(\theta, \varphi, t)$  приближении и с учетом (2.1).

Давления  $P_1, P_E$  и  $P_\sigma$  разложим в ряд по малым величинам  $u, \xi$  и представим в виде

$$P_1 = P_1^\circ + p_1 + \dots, P_E = P_E^\circ + p_E + \dots, P_\alpha = P_\alpha^\circ + p_\alpha + \dots \quad (2.2)$$

где  $p_1, p_E$  и  $p_\alpha$  – добавки к соответствующим давлениям, имеющие первый порядок малости.

В итоге система уравнений (1.1) в линейном по  $u$  и  $\xi$  приближении запишется следующим образом:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla p_1 + \nu \Delta \mathbf{u}, \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad (2.3)$$

Граничные условия (1.3)–(1.5) возьмем на невозмущенной поверхности капли – при  $r = 1$ . В результате получим

$$r = 1: \frac{\partial \xi(\theta, \varphi, t)}{\partial t} = u_r \quad (2.4)$$

$$r = 1: (\mathbf{\Pi}_{2\tau} - \mathbf{\Pi}_{1\tau}) - \nu[\boldsymbol{\tau}(\mathbf{n} \nabla) \mathbf{u} + \mathbf{n}(\boldsymbol{\tau} \nabla) \mathbf{u}] = 0 \quad (2.5)$$

Подставляя разложения (2.2) в динамическое граничное условие (1.5), в линейном по  $u$  и  $\xi$  приближении получим

$$r = 1: -p_1 + 2\nu \mathbf{n}(\mathbf{n} \nabla) \mathbf{u} - p_E + p_\alpha = 0 \quad (2.6)$$

Условия (1.8) в первом порядке малости по  $\xi$  запишутся в виде

$$\int_{\Omega} \xi(\theta, \varphi, t) d\Omega = 0; \quad \int_{\Omega} \xi(\theta, \varphi, t) \mathbf{e}_r d\Omega = 0 \quad (2.7)$$

3. Представим поле скоростей  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  в виде суммы трех ортогональных векторных полей [5, 6]

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{N}_1 \Psi_1(\mathbf{r}, t) + \mathbf{N}_2 \Psi_2(\mathbf{r}, t) + \mathbf{N}_3 \Psi_3(\mathbf{r}, t) \quad (3.1)$$

где  $\Psi_i(\mathbf{r}, t)$  – скалярные функции, определяемые видом поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ ;  $\mathbf{N}_i$  – векторные операторы, удовлетворяющие условиям ортогональности и условиям коммутативности с оператором Лапласа  $\Delta$

$$(\mathbf{N}_j^+, \mathbf{N}_i) = 0, (i \neq j), \Delta \mathbf{N}_i = \mathbf{N}_i \Delta (i = 1, 2, 3) \quad (3.2)$$

Здесь индекс плюс обозначает эрмитово сопряжение. Векторные операторы  $\mathbf{N}_i$  выберем в виде

$$\mathbf{N}_1 = \nabla, \mathbf{N}_2 = \mathbf{N}_1 \times \mathbf{r} = \nabla \times \mathbf{r}, \mathbf{N}_3 = \mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2 = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{r}) \quad (3.3)$$

$$\mathbf{N}_1^+ = -\nabla, \mathbf{N}_2^+ = \mathbf{r} \times \nabla, \mathbf{N}_3^+ = (\mathbf{r} \times \nabla) \times \nabla \quad (3.4)$$

Операторы  $\mathbf{N}_j^+$  – эрмитово сопряжены к операторам  $\mathbf{N}_j$ . Оператор  $\mathbf{N}_1$  выделяет потенциальную часть движения,  $\mathbf{N}_2$  – вихревую тороидальную вокруг оси  $z$ ,  $\mathbf{N}_3$  – вихревую полоидальную компоненту движения жидкости.

Подставляя разложение (3.1) в уравнение (2.3), используя явный вид оператора  $\mathbf{N}_1$  и свойства коммутативности (3.2), несложно переписать (2.3) в виде

$$\sum_{i=1}^3 \mathbf{N}_i \left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} - \nu \Delta \right) \Psi_i + \delta_{i1} p_1 \right] = 0 \quad (3.5)$$

где  $\delta_{i1}$  – символ Кронекера. Домножая слева уравнение (3.5) последовательно на операторы  $\mathbf{N}_j^+$  и пользуясь условиями ортогональности (3.2), получим систему трех независимых уравнений

$$(\mathbf{N}_i^+, \mathbf{N}_i) \left\{ \delta_{i1} p_1 + \frac{\partial \Psi_i}{\partial t} - \nu \Delta \Psi_i \right\} = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.6)$$

Так как векторные операторы  $\mathbf{N}_i$  коммутируют с оператором Лапласа  $\Delta$  (3.2), то и

эрмитово сопряженные им операторы  $N_i^+$  коммутируют с ним, поскольку оператор Лапласа является самосопряженным оператором ( $\Delta^+ = \Delta$ ). Следовательно, условие коммутации справедливо и для операторов  $(N_i^+, N_i)$  и  $\Delta$ . Это в свою очередь означает, что указанные операторы обладают общей системой собственных функций, которую обозначим через  $\{\varphi_j\}$ . Тогда

$$(N_i^+, N_i)\varphi_j = n_j^i\varphi_j; \quad \Delta\varphi_j = \lambda_j\varphi_j \quad (3.7)$$

где  $n_j^i$  и  $\lambda_j$  – собственные значения операторов  $(N_i^+, N_i)$  и  $\Delta$ , соответствующие собственным функциям  $\varphi_j$ .

Воспользуемся тем, что произвольная функция, определенная в той же области пространства, что и функции  $\varphi_j$ , может быть разложена в ряд по полному набору собственных функций  $\{\varphi_j\}$ , и представим неизвестные функции  $p_1$  и  $\Psi_i(\mathbf{r}, t)$  в уравнениях (3.6) в виде разложений

$$p_1 = \sum_j A_j\varphi_j(\mathbf{r}, t), \quad \Psi_i(\mathbf{r}, t) = \sum_j B_j^i\varphi_j(\mathbf{r}, t) \quad (3.8)$$

где  $A_j$  и  $B_j^i$  – (константы) коэффициенты разложения; суммирование ведется по всему набору собственных функций  $\{\varphi_j\}$ .

Подставляя разложения (3.8) в (3.6) и учитывая соотношения (3.7), получим

$$\sum_j \left\{ A_j\delta_{il} + B_j^i \frac{\partial}{\partial t} - vB_j^i\lambda_j \right\} n_j^i\varphi_j = 0$$

Поскольку система собственных функций  $\{\varphi_j\}$  не нулевая, то последнее равенство может выполняться лишь тогда, когда либо все собственные значения  $n_j^i = 0$ , либо все выражения, стоящие в фигурных скобках, равны нулю. Выберем второй случай, т.е. будем считать, что

$$n_j^i \neq 0$$

$$\left\{ A_j\delta_{il} + \frac{\partial}{\partial t} B_j^i - v\lambda_j B_j^i \right\} = 0, \quad (\forall i, j) \quad (3.9)$$

Умножая каждую скобку (3.9) на соответствующую собственную функцию  $\varphi_j$ , суммируя по всем  $j$  и учитывая выражения (3.7) и (3.8), несложно найти систему трех скалярных уравнений для функций  $\Psi_i(\mathbf{r}, t)$

$$\delta_{il}p_1 + \frac{\partial}{\partial t} \Psi_i(\mathbf{r}, t) - v\Delta\Psi_i(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (i=1, 2, 3) \quad (3.10)$$

Подставляя в условие несжимаемости жидкости (2.4) разложение (3.1), учитывая явный вид оператора  $N_1$  (3.3), а также тот факт, что  $N_1^+ = -N_1$  (см. (3.4)), и используя условия ортогональности (3.2), получим

$$(\nabla, \nabla)\Psi_1 = \Delta\Psi_1 = 0 \quad (3.11)$$

Из (3.10) при  $i = 1$  с учетом (3.11) найдем

$$p_1 = -\frac{\partial}{\partial t} \Psi_1(\mathbf{r}, t) \quad (3.12)$$

С учетом (3.12) систему уравнений (3.10) представим в виде

$$\Delta\Psi_i(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{v}(1 - \delta_{il})\frac{\partial\Psi_i(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0 \quad (i=1, 2, 3) \quad (3.13)$$

Для скаляризации граничных условий (2.4)–(2.6) воспользуемся выражениями для компонент вектора  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  в сферической системе координат через скалярные функции  $\Psi_i(\mathbf{r}, t)$ , которые несложно выписать, используя (3.1) и (3.3). В итоге кинематическое условие (2.4) примет вид

$$r = 1: \frac{\partial \xi(\theta, \varphi, t)}{\partial t} = \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} - \frac{1}{r} \Delta_{\Omega} \Psi_3 \quad (3.14)$$

Динамическое условие для касательных компонент тензора напряжений (2.6) даст два соотношения

$$r = 1, \quad \boldsymbol{\tau} \equiv \mathbf{e}_{\theta}: \left( \Pi_{2\theta} - \Pi_{1\theta} \right) - \nu \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ 2 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\Psi_1}{r} \right) + \frac{\partial^2 \Psi_3}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} (2 + \Delta_{\Omega}) \Psi_3 \right\} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ \frac{\partial \Psi_2}{\partial r} - \Psi_2 \right\} \right] = 0 \quad (3.15)$$

$$r = 1, \quad \boldsymbol{\tau} \equiv \mathbf{e}_{\varphi}: \left\{ \left( \Pi_{2\varphi} - \Pi_{1\varphi} \right) - \nu \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ 2 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\Psi_1}{r} \right) + \frac{\partial^2 \Psi_3}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} (2 + \Delta_{\Omega}) \Psi_3 \right\} - \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{\partial \Psi_2}{\partial r} - \frac{\Psi_2}{r} \right\} \right] \right\} = 0 \quad (3.16)$$

где  $\Delta_{\Omega}$  – угловая часть оператора Лапласа.

Динамическое граничное условие (2.6) и условие (2.7) запишем в виде

$$r = 1: \left\{ -p_1 + 2\nu \left[ \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial r^2} - \Delta_{\Omega} \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\Psi_3}{r} \right) \right) \right] - p_E + p_{\alpha} \right\} = 0 \quad (3.17)$$

$$\int_{\Omega} \xi(\theta, \varphi, t) Y_0^0(\theta, \varphi) d\Omega = 0, \quad \int_{\Omega} \xi(\theta, \varphi, t) Y_1^m(\theta, \varphi) d\Omega = 0 \quad (3.18)$$

4. Нахождение решения системы (3.12), (3.13) можно рассматривать как исследование на устойчивость по Ляпунову равновесного тривиального решения исходной системы уравнений (1.1), которое имеет вид

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \xi(\theta, \varphi, t) = 0 \quad (r = 1) \quad (4.1)$$

Из (4.1) следует, что начальное условие также является нулевым:  $\xi(\theta, \varphi, t = 0) = 0$ . Зададим некоторое малое возмущение  $\xi(\theta, \varphi, t = 0) = \xi_0(\theta, \varphi)$ . Решение (4.1) при этом также получит малое возмущение (т.е.  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \neq 0$  и  $\xi(\theta, \varphi, t) \neq 0$  – малы). Это позволило провести линеаризацию исходной системы уравнений и привести ее к виду (3.12), (3.13). Положим

$$\Psi_i(\mathbf{r}, t) \sim \Psi_i^{\circ}(\mathbf{r}) \exp(S t); \quad \xi(\theta, \varphi, t) \sim \xi_0(\theta, \varphi) \exp(S t) \quad (4.2)$$

Используя зависимости (4.2) в системе (3.12), (3.13), получим

$$\Delta \Psi_i^{\circ}(\mathbf{r}) - \frac{1}{\nu} (1 - \delta_{i1}) S \Psi_i^{\circ}(\mathbf{r}) = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (4.3)$$

$$p_1 = -S \Psi_1^{\circ}(\mathbf{r})$$

Решения системы (4.3) имеют вид

$$\Psi_1^\circ(\mathbf{r}) = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l C_{lm}^1 r^l Y_l^m(\theta, \varphi) \quad (4.4)$$

$$\Psi_i^\circ(\mathbf{r}) = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l C_{lm}^i i_l \left( \sqrt{\frac{S}{v}} r \right) Y_l^m(\theta, \varphi) \quad (i = 2, 3) \quad (4.5)$$

где  $i_l(x)$  – модифицированные сферические функции Бесселя.

Функция  $\xi_0(\theta, \varphi)$ , описывающая возмущение поверхности капли, также может быть представлена в виде разложения по сферическим функциям

$$\xi_0(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Z_{lm} Y_l^m(\theta, \varphi) \quad (4.6)$$

Границы изменения индекса  $l$  от 2 до  $\infty$  в выражениях (4.4)–(4.6) определяются условиями (3.18).

5. Чтобы удовлетворить динамическим граничным условиям (3.15)–(3.17), воспользуемся полученными в Приложении выражениями для электрических частей касательных компонент тензора напряжений (6.13), (6.14) и для добавки к давлению электрических сил  $p_e$  (6.12), а также для добавки к давлению сил поверхностного натяжения  $p_\alpha$  [7].

Удовлетворяя граничным условиям, получим два дисперсионных уравнения, соответствующих вихревым тороидальным движениям, описываемым функцией  $\Psi_2(\mathbf{r}, t)$ , и гармоническим и вихревым полоидальным движениям, описываемым функциями  $\Psi_1(\mathbf{r}, t)$  и  $\Psi_3(\mathbf{r}, t)$  [6]. В этом несложно убедиться, поскольку граничные условия (3.15), (3.16) с учетом выражений (6.13)–(6.14) после несложных математических преобразований могут быть приведены к виду

$$\begin{aligned} r = 1: \quad \Delta_\Omega \left\{ \frac{Q^2}{4\pi} \sum_{l,m} D_l(\sigma, \varepsilon, S) \left[ \frac{(l-1)}{(l+1)} S Z_{lm} + l C_{lm}^1 + \right. \right. \\ \left. \left. + l \left( \sqrt{\frac{S}{v}} i_{l+1} \left( \sqrt{\frac{S}{v}} \right) + (l+1) i_l \left( \sqrt{\frac{S}{v}} \right) \right) C_{lm}^3 \right] Y_l^m(\theta, \varphi) - \right. \\ \left. - v \left[ 2 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\Psi_1^\circ}{r} \right) + \frac{\partial^2 \Psi_3^\circ}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} (2 + \Delta_\Omega) \Psi_3^\circ \right] \right\} = 0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\left\{ \frac{\partial \Psi_2^\circ}{\partial r} - \frac{\Psi_2^\circ}{r} \right\} = 0 \quad (5.2)$$

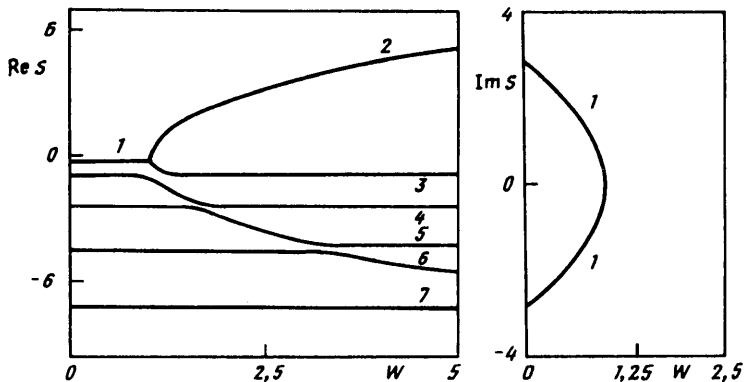
В проведенных преобразованиях использовалось то обстоятельство, что  $\Delta_\Omega = (-N_2^+, N_2^-)$ ;  $n_j \neq 0$ .

Для тороидальных движений после подстановки решения (4.5) в условие (5.2) получим

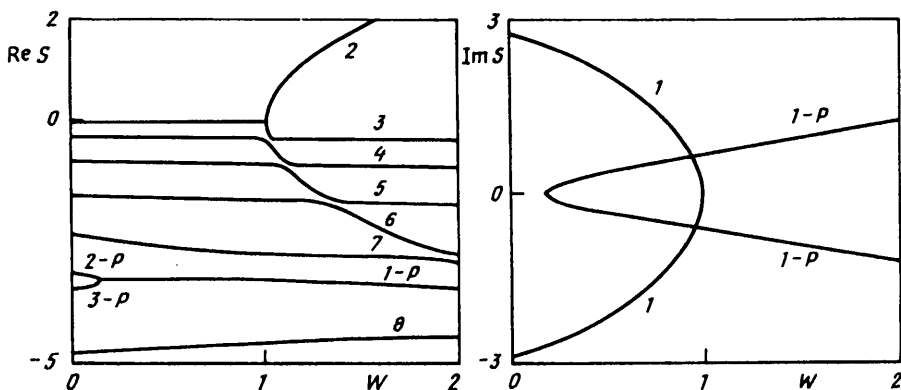
$$\sqrt{\frac{S}{v}} i_{l+1} \left( \sqrt{\frac{S}{v}} \right) + (l-1) i_l \left( \sqrt{\frac{S}{v}} \right) = 0 \quad (5.3)$$

Решения этого уравнения представляют однопараметрическое множество декрементов затухания вихревых тороидальных движений жидкости в капле.

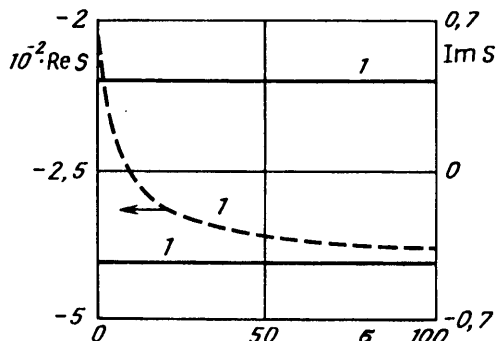
Дисперсионное уравнение для гармонических и вихревых полоидальных движений



Фиг. 1. Зависимости вещественной ( $Re S$ ) и мнимой ( $Im S$ ) компонент частоты от параметра Рэлея  $W$  в случае непроводящей капли ( $\epsilon = 100, \nu = 0,01; l = 2$ ). Ветви 1-3 соответствуют капиллярным, ветви 4-7 – аperiodически затухающим вихревым полоидальным движениям



Фиг. 2. То же, что и на фиг. 1, для проводящей капли. Ветвь 1-P соответствует зарядово-релаксационным волновым движениям; ветви 2-P и 3-P описывают декременты аperiodических движений того же типа



Фиг. 3. Зависимости вещественной и мнимой компонент частоты от величины проводимости  $\sigma$  при  $W = 0,95$  и тех же значениях других величин, что на фиг. 2

получается из условия обращения в ноль определителя системы линейных уравнений относительно коэффициентов  $Z_{lm}, C_{lm}^1, C_{lm}^3$ , которая возникает после подстановки решений (4.4), (4.5), выражения (6.12) и давления  $p_\alpha$  [7] в граничные условия (3.14), (3.17), (5.1)

$$S \left\{ S^2 + 2(l-1)(2l+1) \nu S + l(l-1)(l+2) \left[ 1 - \frac{4}{(l+2)} W \right] \right\} - \\ - \sqrt{\frac{S}{\nu}} f_l \left( \sqrt{\frac{S}{\nu}} \right) \left\{ (2\nu - 4W) D_l(\sigma, \epsilon, S) [S^2 + 2l(l-1)(l+2) \nu S + \right. \\ \left. + l(l-1)(l+2) \left[ 1 - \frac{4}{(l+2)} W \right] \right] + 8l(l-1)(l^2+1) \nu S W D_l(\sigma, \epsilon, S) \right\} = 0 \quad (5.4)$$

$$f_l(x) \equiv \frac{i_{l+1}(x)}{i_l(x)}, \quad W \equiv \frac{Q^2}{16\pi}, \quad D_l(\sigma, \epsilon, S) \equiv \frac{(l+1)}{l[4\pi\sigma + 4(l+1)(\pi W)^{1/2} b + S\epsilon] + (l+1)S}$$

Численный анализ этого дисперсионного уравнения показывает, что при  $\text{Re } S > 0$  оно имеет однопараметрическое множество решений  $S_l$ , соответствующих рэлеевской неустойчивости  $l$ -й моды капиллярных колебаний поверхности заряженной капли. При  $\text{Re } S < 0$  дисперсионное уравнение (5.4) имеет уже двухпараметрическое множество решений  $S_{lk}$ , где  $k$  – номер корня уравнения

$$2f_l(x)/x - 1 = 0 \quad (\text{Re } S < 0)$$

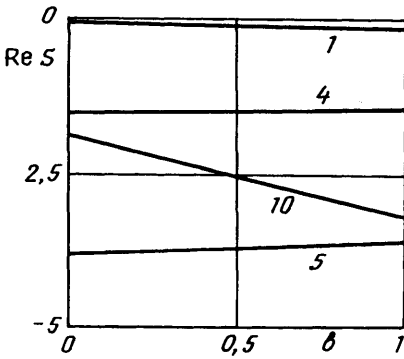
Это уравнение для каждой моды капиллярных колебаний  $l$  имеет бесчисленное множество решений, определяющих декременты затухания вихревых полоидальных движений. В [8] вихревые движения такого типа в капле зафиксированы экспериментально и даже сфотографированы.

Ветви дисперсионного уравнения в отсутствие эффекта релаксации заряда, полученные численным расчетом по (5.4), в виде зависимостей  $\text{Re } S = \text{Re } S(W)$ ,  $\text{Im } S = \text{Im } S(W)$  для  $l = 2$ ;  $\nu = 0,01$  представлены на фиг. 1. Для более высоких мод капиллярных колебаний с  $l > 2$  общий вид зависимостей  $S = S(W)$  качественно аналогичен.

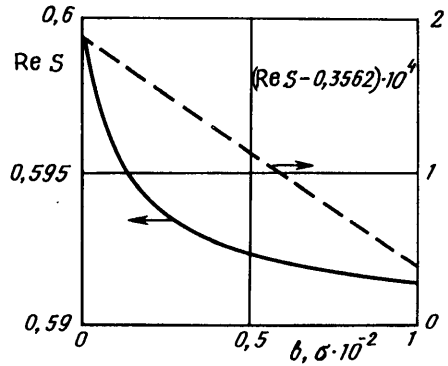
Влияние релаксации электрического заряда учитывается выражением  $D_l(\sigma, \epsilon, S)$ , входящим в дисперсионное уравнение (5.4), которое при  $\sigma \rightarrow \infty$  обращается в ноль. При этом перераспределение заряда по поверхности капли при ее деформации происходит мгновенно и эффект релаксации не наблюдается.

Из (5.4) видно, что учет эффекта релаксации электрического заряда приводит к повышению порядка дисперсионного уравнения из-за появления дополнительного движения жидкости, связанного с волной перераспределяющегося по поверхности заряда. Численный анализ уравнения (5.4) при  $D_l(\sigma, \epsilon, S) \neq 0$  показывает, что конечность скорости выравнивания потенциала, которая является функцией времени уже из-за тепловых капиллярных колебаний капли, приводит как к появлению сильно затухающих зарядово-релаксационных волновых движений (ветви 1- $P$ , на фиг. 2 – ветви 2- $P$  и 3- $P$  описывают декременты аperiodических движений того же типа), так и к увеличению декрементов затухания обычных капиллярных волн (фиг. 3). Причина этого – в существовании из-за конечной проводимости сдвига фаз между капиллярной волной и связанной с ней волной перераспределяющегося заряда, представляющей собой систему приповерхностных токов, диссипирующих энергию на джоулево тепловыделение. Увеличение коэффициента подвижности ионов  $b$  приводит к увеличению декремента затухания зарядово-релаксационных волн (фиг. 4, где приведены расчеты по (5.4) при  $W = 0,95$ ,  $\epsilon = 10$ ,  $\sigma = 0,1$ ,  $\nu = 0,03$ ,  $l = 2$ ). Как видно из фиг. 5, при заряде, закритическом для реализации неустойчивости Рэлея (при  $W =$





Фиг. 4



Фиг. 5

Фиг. 4. Зависимости вещественной компоненты частоты от величины подвижности носителей заряда  $b$  при тех же значениях, что и на фиг. 2

Фиг. 5. Зависимости инкремента неустойчивости основной моды капли от величины проводимости (сплошная кривая) и подвижности носителей заряда  $b$  (штриховая) при  $W = 1,05$ ,  $\epsilon = 100$ ,  $\sigma = 25$ ,  $\nu = 0,01$

$= 1,05$ ), увеличение электропроводности жидкости  $\sigma$  и подвижности зарядов  $b$  приводит к небольшому снижению величины инкремента.

На вихревые торoidalные движения жидкости в капле эффект релаксации заряда влияния в использованном линейном приближении не оказывает.

**6. Приложение.** Система уравнений (1.2), (1.6) позволяет сформулировать краевую задачу для потенциалов  $\Phi_i$

$$\Delta\Phi_1 = 0, \quad \Delta\Phi_2 = 0 \quad (6.1)$$

$$r = 0: \Phi_1 = \text{const}, \quad r \rightarrow \infty: \Phi_2 \rightarrow 0$$

$$r = 1 + \xi: \Phi_1 = \Phi_2 \quad (6.2)$$

$$-\sigma(\mathbf{n}, \mathbf{E}_1) + \text{div}_{\Sigma}(\kappa \mathbf{u}_{\tau} + \kappa b \mathbf{E}_{\tau}) + \frac{\partial \kappa}{\partial t} = 0 \quad (6.3)$$

$$\kappa = \frac{1}{4\pi} \mathbf{n}(\mathbf{E}_2 - \epsilon \mathbf{E}_1) = \frac{1}{4\pi} \left( \epsilon \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} \right)$$

Выше учтено, что объемная плотность заряда в капле  $\mu = 0$ , а перераспределение заряда при волновом искажении формы капли происходит за счет поверхностных токов.

Представим потенциалы  $\Phi_i$  ( $i = 1, 2$ ) в виде разложений  $\Phi_i = \Phi_i^{(0)} + \delta\Phi_i$ , где  $\Phi_i^{(0)}$  – потенциалы при равновесном состоянии системы,  $\delta\Phi_i$  – добавки, вызванные возмущением равновесной формы поверхности капли и линейные по нему. Подставляя эти разложения в уравнения (6.1)–(6.2), выпишем отдельно краевые задачи для  $\Phi_i^{(0)}$  и  $\delta\Phi_i$

$$r = 0: \Phi_1^{(0)} = \text{const}, \quad \delta\Phi_1 \rightarrow 0 \quad (6.4)$$

$$r \rightarrow 0: \Phi_2^{(0)} \rightarrow 0, \quad \delta\Phi_2 \rightarrow 0 \quad (6.5)$$

$$r = 1: \Phi_1^{(0)} = \Phi_2^{(0)}, \quad \delta\Phi_1 + \frac{\partial \Phi_1^{(0)}}{\partial r} \xi = \delta\Phi_2 + \frac{\partial \Phi_2^{(0)}}{\partial r} \xi \quad (6.6)$$

Для потенциалов  $\Phi_i^{(0)}$  имеем

$$\Phi_1^{(0)} = Q, \quad \Phi_2^{(0)} = \frac{Q}{r}$$

Решения уравнений (6.1) для добавок  $\delta\Phi_i$ , удовлетворяющие условиям (6.4), (6.5), естественно искать в виде

$$\delta\Phi_1 = \sum_{l,m} A_{lm} r^l Y_l^m(\theta, \varphi) \exp(St) \quad (6.7)$$

$$\delta\Phi_2 = \sum_{l,m} B_{lm} r^{-(l+1)} Y_l^m(\theta, \varphi) \exp(St)$$

Используя граничное условие (6.6), найдем первое уравнение, связывающее неизвестные константы  $A_{lm}$ ,  $B_{lm}$  и  $Z_{lm}$

$$A_{lm} = B_{lm} - QZ_{lm} \quad (6.8)$$

Граничное условие (6.3) в первом порядке малости по  $u$  и  $\xi$  представим в виде

$$r = 1: \sigma \frac{\partial(\delta\Phi_1)}{\partial r} + \frac{Q}{4\pi} \Delta_\Omega \left( \Psi_1 + \frac{\partial}{\partial r} (r\Psi_3) - b\delta\Phi_1 \right) + \frac{S}{4\pi} \left( \varepsilon \frac{\partial(\delta\Phi_1)}{\partial r} - \frac{\partial(\delta\Phi_2)}{\partial r} - 2 \frac{Q}{r^3} \xi \right) = 0$$

Откуда получается второе условие для констант  $A_{lm}$ ,  $B_{lm}$  и  $Z_{lm}$

$$(4\pi\sigma + (l+1)Qb + S\varepsilon) lA_{lm} + S(l+1) B_{lm} - 2QSZ_{lm} - Ql(l+1) [C_{lm}^1 + G_l(S, \nu) C_{lm}^3] = 0$$

$$G_l(S, \nu) \equiv \sqrt{\frac{S}{\nu}} i_{l+1} \left( \sqrt{\frac{S}{\nu}} \right) + (l+1) i_l \left( \sqrt{\frac{S}{\nu}} \right) \quad (6.9)$$

Используя систему (6.8), (6.9), можно выразить коэффициенты  $A_{lm}$  и  $B_{lm}$  в разложениях (6.7) для  $\delta\Phi_1$  и  $\delta\Phi_2$  через коэффициенты  $Z_{lm}$  в разложении по сферическим функциям возмущения  $\xi$

$$A_{lm} = -D_l(\sigma, \varepsilon, S) Q \left[ \frac{(l-1)}{(l+1)} SZ_{lm} - l(C_{lm}^1 + G_l(S, \nu) C_{lm}^3) \right]$$

$$B_{lm} = Q \left[ \left( 1 - \frac{(l-1)}{(l+1)} D_l(\sigma, \varepsilon, S) S \right) Z_{lm} + lD_l(\sigma, \varepsilon, S) (C_{lm}^1 + G_l(S, \nu) C_{lm}^3) \right]$$

$$D_l(\sigma, \varepsilon, S) \equiv \frac{(l+1)}{l[4\pi\sigma + (l+1)Qb + S\varepsilon] + (l+1)S}$$

Используя полученные решения для потенциалов, выпишем нормальные и касательные компоненты вектора напряженности электрического поля

$$r = 1 + \xi: E_{2n} = (\mathbf{n}, \mathbf{E}_2) \approx Q + Q \sum_{l,m} [(l-1)(1 - SD_l(\sigma, \varepsilon, S)) Z_{lm} + l(l+1) D_l(\sigma, \varepsilon, S) (C_{lm}^1 + G_l(S, \nu) C_{lm}^3)] Y_l^m(\theta, \varphi) \exp(St) \quad (6.10)$$

$$E_{1n} = (\mathbf{n}, \mathbf{E}_1) \approx Q \sum_{l,m} lD_l(\sigma, \varepsilon, S) \left( \frac{(l-1)}{(l+1)} SZ_{lm} - lC_{lm}^1 - lG_l(S, \nu) C_{lm}^3 \right) Y_l^m(\theta, \varphi) \exp(St)$$

$$E_{2\theta} = (\boldsymbol{\tau}_\theta, \mathbf{E}_2) \approx Q \sum_{l,m} D_l(\sigma, \varepsilon, S) \left( \frac{(l-1)}{(l+1)} SZ_{lm} - lC_{lm}^1 - lG_l(S, \nu) C_{lm}^3 \right) \frac{\partial(Y_l^m(\theta, \varphi))}{\partial \theta} \exp(St)$$

$$E_{2\varphi} = (\tau_\varphi, \mathbf{E}_2) \approx$$

$$\approx Q \sum_{l,m} D_l(\sigma, \varepsilon, S) \left( \frac{(l-1)}{(l+1)} SZ_{lm} - lC_{lm}^1 - lG_l(S, \nu) C_{lm}^3 \right) \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial(Y_l^m(\theta, \varphi))}{\partial \varphi} \exp(S t)$$

$$E_{1\theta} = (\tau_\theta, \mathbf{E}_1) \approx Q \sum_{l,m} D_l(\sigma, \varepsilon, S) \left( \frac{(l-1)}{(l+1)} SZ_{lm} - lC_{lm}^1 - lG_l(S, \nu) C_{lm}^3 \right) \frac{\partial(Y_l^m(\theta, \varphi))}{\partial \theta} \exp(S t)$$

$$E_{1\varphi} = (\tau_\varphi, \mathbf{E}_1) \approx$$

$$\approx Q \sum_{l,m} D_l(\sigma, \varepsilon, S) \left( \frac{(l-1)}{(l+1)} SZ_{lm} - lC_{lm}^1 - lG_l(S, \nu) C_{lm}^3 \right) \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial(Y_l^m(\theta, \varphi))}{\partial \varphi} \exp(S t)$$

Давление электрического поля на возмущенную поверхность капли имеет вид

$$P_E = -\mu \Phi_1 + \frac{1}{8\pi} [E_{2n}^2 - \varepsilon E_{1n}^2] + (\varepsilon - 1) \frac{E_{2\tau}^2}{8\pi} \quad (6.11)$$

Используя выражения (6.10)–(6.11) и учитывая, что  $\mu = 0$ , для давления электрического поля в первом порядке малости найдем

$$P_E^{(0)} = \frac{Q^2}{8\pi}, \quad p_E \approx \frac{Q^2}{4\pi} \sum_{l,m} [(l-1)(1 - SD_l(\sigma, \varepsilon, S)) Z_{lm} + \\ + l(l+1) D_l(\sigma, \varepsilon, S) (C_{lm}^1 + G_l(S, \nu) C_{lm}^3)] Y_l^m(\theta, \varphi) \exp(S t) \quad (6.12)$$

Для записи динамических граничных условий для касательных компонент тензора напряжений необходимо знать электрические части касательных компонент тензора напряжений:  $(\mathbf{\Pi}_{2\theta} - \mathbf{\Pi}_{1\theta})$  и  $(\mathbf{\Pi}_{2\varphi} - \mathbf{\Pi}_{1\varphi})$ .

Используя соотношения (6.10)–(6.11) и определение  $\mathbf{\Pi}_\tau = (\varepsilon/4\pi) E_n E_\tau$ , убедимся, что  $\mathbf{\Pi}_{1\tau_\theta} \approx \mathbf{\Pi}_{1\tau_\varphi} \approx 0$ , так как являются величинами второго порядка малости. В результате найдем

$$r = 1 + \xi: \quad \mathbf{\Pi}_{2\theta} - \mathbf{\Pi}_{1\theta} \approx \\ \approx \frac{Q^2}{4\pi} \sum_{l,m} D_l(\sigma, \varepsilon, S) \left( \frac{(l-1)}{(l+1)} SZ_{lm} - lC_{lm}^1 - lG_l(S, \nu) C_{lm}^3 \right) \frac{\partial(Y_l^m(\theta, \varphi))}{\partial \theta} \exp(S t) \quad (6.13)$$

$$\mathbf{\Pi}_{2\varphi} - \mathbf{\Pi}_{1\varphi} \approx$$

$$\approx \frac{Q^2}{4\pi} \sum_{l,m} D_l(\sigma, \varepsilon, S) \left( \frac{(l-1)}{(l+1)} SZ_{lm} - lC_{lm}^1 - lG_l(S, \nu) C_{lm}^3 \right) \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial(Y_l^m(\theta, \varphi))}{\partial \varphi} \exp(S t) \quad (6.14)$$

**Заключение.** По сравнению с идеально проводящими жидкостями учет конечности скорости перераспределения заряда приводит к увеличению декрементов затухания всех мод капиллярных колебаний капли и к усложнению структуры спектра реализующихся движений жидкости. Для целого класса слабопроводящих жидкостей, используемых при электродиспергировании (см. обзор [1]), таких, например, как дибутилфтолат или циклогексанол, влияние конечности скорости переноса заряда в капле может оказать заметное влияние на формирование функции распределения капель по размерам. Представляется целесообразным провести исследование, аналогичное выполненному выше, для таких весьма плохих проводников, как жидкий водород, также подвергающийся электродиспергированию в связи с проблемами термоядерного синтеза [9]. Такая задача интересна тем, что перераспределение заряда в колеблющейся капле будет происходить в основном за счет выравнивания химического, а не электрического потенциала.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Григорьев А.И., Ширяева С.О. Капиллярные неустойчивости заряженной поверхности капель и электродиспергирование жидкостей // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.
2. Melcher J.R., Schwarz W.J. Interfacial relaxation overstability in a tangential electric field // Phys. Fluids. 1968. V. 11. № 12. P. 2604–2616.
3. Melcher J.R., Taylor G.I. Electrohydrodynamics: a review of the role of interfacial shear stresses // Annu. Rev. Fluid Mech. Palo Alto, California. 1969. V. 1. P. 111–146.
4. Saville D.A. Electrohydrodynamic stability: effects of charge relaxation at the interface of a liquid jet // J. Fluid Mech. 1971. V. 48. Pt. 4. P. 815–827.
5. Григорьев А.И., Лазарянец А.Э. Параметрическая неустойчивость капли проводящей жидкости по отношению к стохастически изменяющемуся со временем собственному электрическому заряду // Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. № 5. С. 52–56.
6. Ширяева С.О., Лазарянец А.Э. и др. Метод скаляризации векторных краевых задач: Препринт № 27. Ярославль ИМРАН, 1994. 126 с.
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
8. Hayati I., Bailey A.I., Tadros T.F. Mechanism of stable jet formation in electrohydrodynamic atomization // Nature. 1986. V. 319. № 1. P. 41–43.
9. Woosley J.P., Turnbull R.J., Kim K. Field injection electrostatic spraying of liquid hydrogen // J. Appl. Phys. 1988. V. 64. № 9. P. 4278–4284.

Ярославль

Поступила в редакцию  
29.XI.1995