

УДК 532.516.2:536.24

© 1997 г. И.Г. БРЫКИНА, В.И. САХАРОВ

**ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПОДОБИЯ ДЛЯ РАСЧЕТА ТЕПЛОВЫХ
ПОТОКОВ
И НАПРЯЖЕНИЯ ТРЕНИЯ В ОКРЕСТНОСТИ ПЛОСКОСТИ
СИММЕТРИИ ЗАТУПЛЕННЫХ ТЕЛ В РАМКАХ
ПОЛНЫХ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ – СТОКСА**

Исследуется пространственное обтекание затупленных тел сверх- и гиперзвуковым потоком вязкого газа под углом атаки в окрестности плоскости симметрии. Разработан метод, основанный на объединении численного алгоритма решения двумерных уравнений Навье–Стокса и метода аналогии, позволяющего получать решения трехмерных задач путем расчета двумерных течений около эквивалентных осесимметричных тел. Точность предложенного метода оценивается сравнением результатов, полученных с его помощью, с более точными результатами, полученными путем численных решений трехмерных уравнений.

В [1, 2] предложен метод подобия, или метод аналогии, позволяющий получать решения трехмерных задач гиперзвукового вязкого ударного слоя с помощью решения двумерных уравнений. Сначала было получено аналитическое решение уравнений пространственного тонкого вязкого ударного слоя. На основе анализа этого решения выведены соотношения подобия, связывающие тепловой поток к поверхности выпуклого тела с тепловым потоком к поверхности соответствующего осесимметричного тела. Численное решение полной системы трехмерных уравнений тонкого вязкого ударного слоя показало, что аналогичное соотношение подобия справедливо также для напряжения трения. Сравнение приближенного решения, полученного с помощью соотношений подобия путем решения двумерных уравнений для эквивалентного тела, с точным решением пространственной задачи показало высокую точность метода аналогии для тел различной формы, разных углов атаки и различных режимов течения. Причем метод дает хорошую точность как для течений газа с постоянным отношением удельных теплоемкостей, так и для химически реагирующих неравновесных газовых смесей.

Однако соотношения подобия были выведены аналитически и проверены численно только для модели тонкого вязкого ударного слоя, область применимости которой ограничена. Эта модель, например, не годится для расчетов обтекания длинных тел, таких, как тонкие затупленные конусы под углом атаки, а также для сферы и эллипсоидов на некотором удалении от точки торможения, где приближение тонкого слоя дает неправильное распределение давления. В то же время можно предположить, что метод аналогии носит весьма общий характер, так как соотношения подобия зависят только от геометрии тела и числа Рейнольдса Re и поэтому могут применяться и для других моделей течения.

В данной работе метод аналогии совместно с системой полных уравнений Навье–Стокса апробируется для расчета пространственных течений вязкого газа в окрестности плоскости симметрии тел. Для этого соотношения подобия используются совместно с конечно-разностным методом решения двумерных уравнений Навье–Стокса и

полученное приближенное решение сравнивается с численными решениями трехмерных упрощенных уравнений Навье–Стокса [3, 4].

Заметим, что для исследования теплообмена на пространственных телах иногда используется метод осесимметричной аналогии [5], который сводит уравнения трехмерного пограничного слоя вдоль линии тока внешнего невязкого течения к уравнениям пограничного слоя на некотором эквивалентном осесимметричном теле, форма которого определяется параметрами невязкого течения на поверхности. Однако этот метод применим только в рамках модели пограничного слоя, так как его использование требует знания параметров трехмерного течения невязкого газа.

Для вычисления тепловых потоков в плоскости симметрии пространственных тел иногда [6] используется обычное осесимметричное решение для тела, образованного вращением линии растекания. Для тел с одной и той же формой линии растекания, но с различной поперечной кривизной решение осесимметричных задач будет одним и тем же, в то время как реальные значения тепловых потоков на этих телах могут различаться в несколько раз. Поэтому использование обычного осесимметричного решения может приводить к значительным ошибкам, поскольку влияние поперечной кривизны, или трехмерности течения, на тепловой поток может быть существенным. И это влияние хорошо учитывается соотношениями подобия, используемыми в предложенном методе, в которых вводится поправка для числа Re , зависящая от геометрии поверхности тела.

1. Метод аналогии. Рассматриваются стационарные пространственные сверх- и гиперзвуковые безотрывные течения вязкого совершенного газа около затупленных тел в широком диапазоне чисел Re : от режима размазанного слоя, когда вязкость существенна во всей возмущенной области течения, до режимов с явно выраженным пограничным слоем. Для плоскости симметрии тела метод подобия [1] заключается в следующем.

Тепловой поток q и напряжение трения τ на линии растекания пространственного тела будут равны q^s и τ^s на поверхности соответствующего эквивалентного осесимметричного тела

$$q(Re, s) = q^s(Re^*, s), \quad \tau(Re, s) = \tau^s(Re^*, s) \quad (1.1)$$

$$Re^* = \frac{H^s}{H} Re$$

Здесь H – средняя кривизна поверхности в данной точке пространственного тела, равная полусумме главных кривизн; H^s – средняя кривизна поверхности соответствующего осесимметричного тела в рассматриваемой точке; s – расстояние от точки торможения до рассматриваемой точки вдоль поверхности тела (или любая другая инвариантная координата, соответствующая данной точке).

Эквивалентное осесимметричное тело образуется вращением соответствующей ветви линии растекания вокруг оси, проходящей через точку торможения потока на теле и направленной вдоль вектора скорости набегающего потока V_∞ . В случае обтекания тела без угла атаки для плоскости симметрии имеем одно эквивалентное осесимметричное тело, а в случае обтекания тела под углом атаки ветви линии растекания с одной и с другой стороны от точки торможения образуют при вращении два разных осесимметричных тела.

Важно, что когда решается двумерная система уравнений для расчета течения около эквивалентного осесимметричного тела и для получения q^s , τ^s , в уравнения вместо обычного постоянного числа Re нужно подставить переменное Re^* , зависящее от геометрии поверхности в данной точке.

Если поверхность тела задана в декартовой системе координат уравнением $z = f(x, y)$, начало координат помещено в точку торможения, направление оси z совпадает с направлением вектора скорости набегающего потока V_∞ , $y = 0$ соот-

ветствует плоскости симметрии тела, тогда среднюю кривизну поверхности в каждой точке можно определить по формуле

$$H = \frac{1}{2\sqrt{g}} \left(\frac{1}{g} \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{d^2 f}{dy^2} \right), \quad g = 1 + \left(\frac{df}{dx} \right)^2$$

При больших числах Re , когда $q \sim Re^{-1/2}$, асимптотическое приближение для соотношений подобия (1.1) имеет вид

$$q(s) = \sqrt{H / H^s} q^s(s), \quad \tau(s) = \sqrt{H / H^s} \tau^s(s) \quad (1.2)$$

Здесь q^s, τ^s определяются при том же постоянном числе Re , что q и τ .

Таким образом, если рассматривается течение в окрестности плоскости симметрии тела, можно построить одно (в случае обтекания без угла атаки) или два (в случае обтекания под углом атаки) эквивалентных осесимметричных тела, рассчитать двумерные течения около этих тел с переменным, зависящим от геометрии числом Re , и таким образом получить напряжение трения и тепловой поток для трехмерной задачи.

При применении изложенного метода для уравнений Навье–Стокса по сравнению с уравнениями тонкого вязкого ударного слоя возникают некоторые новые проблемы. Одна из них – определение числа Re , точнее, характерного линейного размера R для числа Re ($Re = \rho_\infty V_\infty R / \mu_\infty$). Этот вопрос возникает из-за того, что расчет течения проводится для другого, эквивалентного тела. Уравнения тонкого ударного слоя являются параболическими и в качестве характерного линейного размера выбирается один из радиусов главных кривизн в точке торможения. Уравнения Навье–Стокса – эллиптические, поэтому на решение задачи во всей расчетной области, в том числе и в области линии торможения, оказывает влияние полный размер тела или возмущенная область течения вниз по потоку. Например, если рассматривать обтекание эллипсоида, то число Re можно определять по расстоянию до миделевого сечения или по среднему между ним и одним из радиусов кривизны в точке торможения. При этом если тело обтекается под углом атаки, то для плоскости симметрии имеется два эквивалентных осесимметричных тела, соответствующих разным направлениям от точки торможения, и размер этих тел будет разным. Поэтому можно рассматривать два разных числа Re^* – для каждого из этих тел. Подробнее этот вопрос будет обсуждаться в разд. 3.

Вторая проблема возникает только в случае обтекания тела под углом атаки. В модели тонкого вязкого ударного слоя решение на линии торможения полностью определяется кривизной поверхности в критической точке. В случае решения уравнений Навье–Стокса при использовании соотношений подобия для двух осесимметричных тел, соответствующих двум ветвям линии растекания по разные стороны от точки торможения, в точке торможения получаются два значения теплового потока для этих двух разных тел. Разрыв в этих значениях можно уменьшить или совсем устранить за счет надлежащего выбора характерных размеров эквивалентных тел, что приведет к изменению чисел Re , а следовательно, и значений теплового потока в критической точке. Этот вопрос связан с вопросом о выборе характерного линейного размера и также будет рассматриваться в разд. 3.

2. Численный метод. Для численного решения двумерных полных уравнений Навье–Стокса использовался конечно-разностный метод, разработанный на основе обобщения разностных схем [7, 8].

Нестационарная система уравнений Навье–Стокса записывается в произвольной криволинейной системе координат в дивергентной форме с разделением всех членов уравнений на "вязкие" и "невязкие". Вводится дискретизация по времени и пространственным переменным и производится линеаризация по временной координате. Система разностных уравнений записывается в дельта-форме. В неявной части разностного оператора исполь-

зуются направленные разности по координатным направлениям в соответствии со знаками собственных значений матриц Якоби конвективных слагаемых, что позволяет получить систему разностных уравнений, обладающих свойством диагонального преобладания. Учет "вязких" членов здесь осуществляется добавлением к матрицам Якоби специальной матрицы, учитывающей зависимость "вязких" членов только от производных. Система разностных уравнений записывается в виде, удобном для применения итерационного процесса Гаусса–Зейделя по линиям $x = \text{const}$, а обращение неявного оператора на каждой из них осуществляется матричными трехточечными прогонками.

При построении консервативной разностной схемы "невязкие" члены в правой, явной части разностного оператора рассчитываются через векторы потоков на границах ячеек. Для вычисления последних применяется схема С.К. Годунова повышенной точности. В ее основе лежит процедура распада произвольного разрыва и кусочно-параболическое распределение параметров по ячейкам разностной сетки, удовлетворяющее условиям монотонности (TVD-схема). Все пространственные производные в "вязких" членах аппроксимируются центральными разностями со вторым порядком точности. Для получения стационарного решения применяется принцип установления по времени.

3. Результаты расчетов. Для оценки точности метода аналогии проводилось сравнение решений, полученных с его помощью, с более точными расчетами. Значения теплового потока и коэффициента трения вдоль поверхности тела, полученные из численного решения осесимметричной системы уравнений Навье–Стокса с использованием соотношений подобия, сравнивались со значениями, полученными путем прямых расчетов системы трехмерных упрощенных [3] и параболизированных [4] уравнений Навье–Стокса.

Были проведены расчеты течения около эллипсоида вращения

$$(z-1)^2 + \frac{x^2}{(1,5)^2} + \frac{y^2}{(1,5)^2} = 1$$

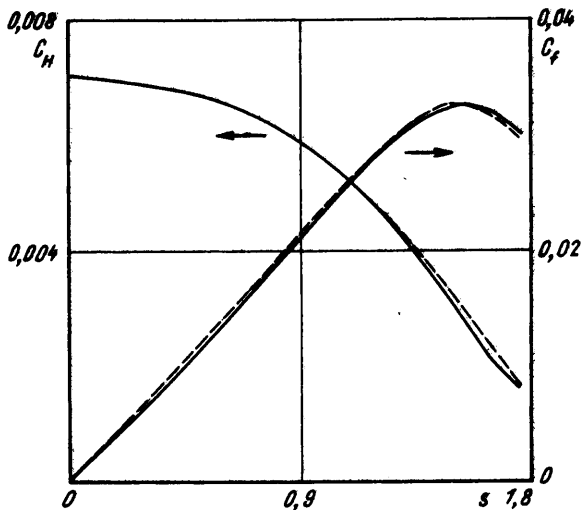
обтекаемого сверхзвуковым потоком газа под углом атаки 10° по отношению к оси z при различных числах Re . Результаты этих расчетов сравнивались с результатами [3], где решалась система трехмерных упрощенных уравнений Навье – Стокса в ударном слое конечно-разностным методом с использованием принципа установления. Значения газодинамических параметров соответствовали параметрам [3]: отношение удельных теплоемкостей $\gamma = 1,4$; число Прандтля $Pr = 0,75$; число Маха $M_\infty = 4$; температурный фактор $T_w/T_0 = 0,8$, где T_0 – температура торможения набегающего потока.

Сначала было проведено сравнение численных решений данной работы и работы [3] для осесимметричного течения, когда эллипсоид обтекался под нулевым углом атаки при $Re = 1000$. Как видно из фиг. 1, оба метода дают практически одни и те же результаты для коэффициентов теплопередачи и трения. Коэффициенты теплопередачи и трения C_H и C_f определяются как

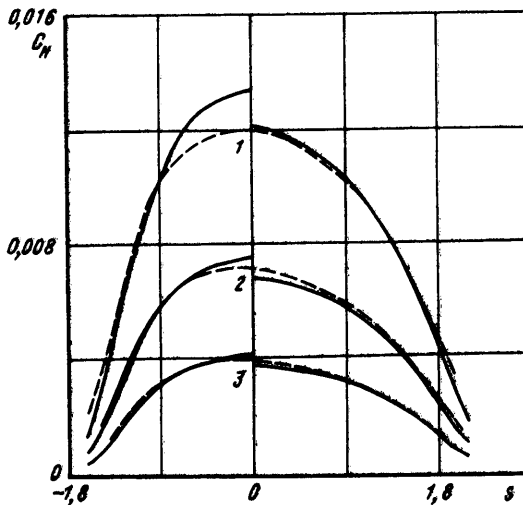
$$C_H = \frac{q}{\rho_\infty V_\infty^3}, \quad C_f = \frac{2\tau}{\rho_\infty V_\infty^2}$$

Здесь q – тепловой поток к поверхности, τ – напряжение трения.

На фиг. 2 демонстрируется сравнение приближенных и точных решений для распределения коэффициента теплопередачи в зависимости от длины дуги s , отсчитываемой от точки торможения (s наветренной стороны $s > 0$, с подветренной $s < 0$), в плоскости симметрии эллипсоида, обтекаемого под углом атаки 10° , при различных числах Re . Здесь результаты [3] для $Re = 333$ лежат несколько ниже, что можно объяснить тем, что упрощенные уравнения Навье–Стокса в области между телом и ударной волной [3] не точны при малых числах Re , когда ударная волна размыта, в то время как в настоящей работе рассчитывались полные уравнения Навье–Стокса в области между телом и невозмущенным набегающим потоком. Для больших значений чисел Re результаты практически совпадают (фиг. 1). Видно, что решение, получен-



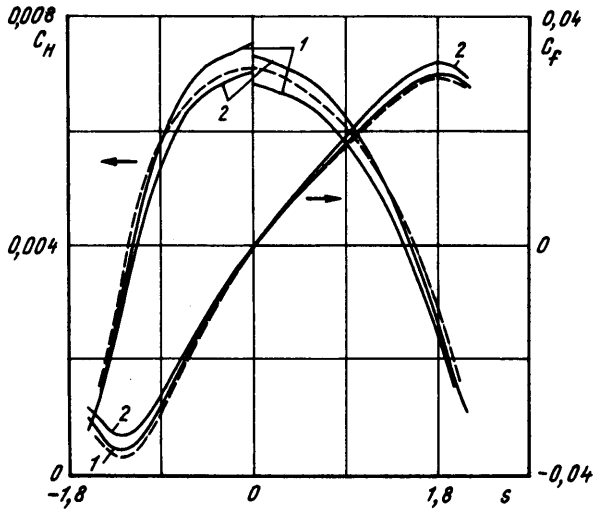
Фиг. 1. Сравнение коэффициентов трения C_f и теплопередачи C_H , полученных в данной работе (сплошные кривые), с результатами [3] (штриховые кривые) для эллипсоида, обтекаемого под нулевым углом атаки при $Re = 1000$



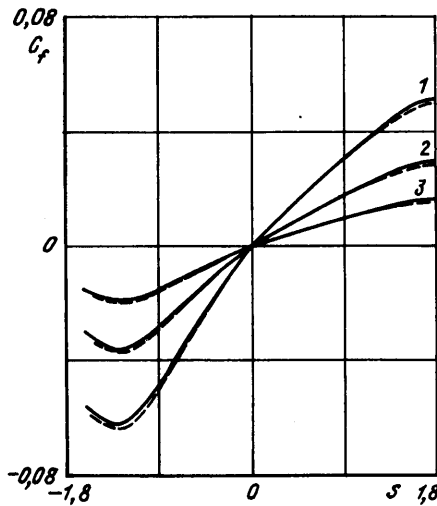
Фиг. 2. Сравнение распределений коэффициента теплопередачи в плоскости симметрии эллипсоида, обтекаемого под углом атаки 10° (сплошные кривые) с данными [3] (штриховые кривые), $Re = 333$ (1), 1000 (2), 3333 (3)

ное данным методом, отличается от точного не более чем на 10% для чисел $Re = 1000, 3333$ во всей рассматриваемой области течения, хотя, как уже отмечалось в разд. 1, в точке торможения имеется разрыв.

Этот разрыв в значениях теплового потока связан с тем, что рассматриваются два различных осесимметричных тела с двух сторон от точки торможения с одинаковыми радиусами кривизны в критической точке, но с различными размерами. Так, расстояние до миделевого сечения вдоль оси z^* , направленной по скорости набегающего



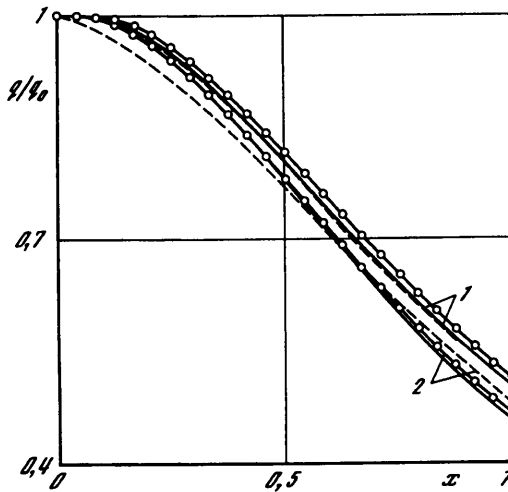
Фиг. 3. Сравнение коэффициентов C_f и C_H для различных характерных размеров R : 1 – R – радиус кривизны в критической точке; 2 – R – расстояние до миделевого сечения; штриховые кривые – данные [3]



Фиг. 4. Сравнение распределений коэффициента трения в плоскости симметрии эллипсоида, обтекаемого под углом атаки 10° (сплошные кривые) с данными [3] (штриховые кривые). $Re = 333$ (1), 1000 (2), 3333 (3)

потока, для большего тела $z_i^* = 1,16$, а для меньшего $z_i^* = 0,89$; поэтому решения уравнений Навье–Стокса в точке торможения для этих двух тел различаются.

Различие в тепловых потоках в критической точке можно уменьшить, если, например, в качестве характерного размера R взять не радиус кривизны в критической точке, который является одним и тем же для обоих осесимметричных тел и для пространственного тела, как делалось при расчетах, соответствующих фиг. 2, а рас-



Фиг. 5. Сравнение распределений коэффициента теплопередачи в плоскости симметрии параболоида (сплошные кривые – решение, полученное с помощью (1.1), маркированные сплошные кривые – с помощью (1.2)) с данными [4] (штриховые кривые): 1 – $M = 10$, $\gamma = 1,25$, $Re = 918$, $Pr = 0,71$, $T_w/T_0 = 0,16$, $k = 2,5$, $x^* = 2,5x$; 2 – $M = 10$, $\gamma = 1,4$, $Re = 100$, $Pr = 0,71$, $T_w/T_0 = 0,3$, $k = 0,4$; $x^* = x$

стояние до миделевого сечения. Для осесимметричных тел число Re будет определяться соответственно по z_i^* и z_s^* , а для трехмерного – по $(z_i^* + z_s^*)/2$. При этом для сохранения подобия пространственного и осесимметричного течений в соотношения подобия (1.1) при определении Re^* вместо Re надо подставить $Re(z_i^* + z_s^*)/2z_i^*$ и $Re(z_i^* + z_s^*)/2z_s^*$ соответственно для большего и меньшего осесимметричных тел. Такое решение показано на фиг. 3 для случая $Re = 1000$.

Видно, что введение новых характерных линейных размеров ведет к сокращению разрыва в значениях теплового потока в точке торможения. Этот разрыв можно устранить совсем надлежащим выбором характерных размеров эквивалентных тел, однако величина разрыва лежит в пределах точности самого метода, поэтому можно определять число Re самым простым способом по радиусу кривизны в точке торможения и затем проводить сглаживание между двумя решениями; как видно из фиг. 2, "точное" решение пространственной задачи в области торможения лежит между двумя приближенными.

На фиг. 4 демонстрируется сравнение между приближенными и "точными" решениями для коэффициента трения. Здесь в качестве характерного размера R брался радиус кривизны в критической точке. Видно, что разница между решениями, полученными предложенным методом, и результатами [3] не превышает нескольких процентов для всех чисел Re ; причем в отличие от тепловых потоков в точке торможения нет разрыва между значениями C_f , соответствующими разным направлениям от нее, поскольку коэффициент трения в критической точке обращается в нуль. Как показали результаты расчетов, разрыва нет также и в распределении давления. На фиг. 3 проводится сравнение для коэффициента трения между решением, описанным выше, и решением, в котором в качестве R бралось расстояние до миделевого сечения. Видно, что оба эти решения очень близки.

Проведено также сравнение двух решений для коэффициентов трения и теплопередачи: одного, полученного с помощью соотношений подобия (1.1), и второго – с помощью упрощенных соотношений подобия (1.2). Сравнение показало, что при числах $Re > 1000$ оба решения практически совпадают. Это подтверждает вывод

работ [1, 2], полученный для тонкого вязкого ударного слоя, о том, что при таких числах Re можно пользоваться упрощенными соотношениями подобия, т.е. рассчитывать течение около эквивалентного тела с постоянным числом Re , а затем получать решение пространственной задачи путем простого умножения на соответствующие коэффициенты, зависящие от геометрии поверхности и угла атаки.

На фиг. 5 приводится распределение относительных тепловых потоков вдоль плоскостей симметрии эллиптического параболоида

$$z = 1/2(x^2 + ky^2)$$

обтекаемого без угла атаки. Здесь k – отношение радиусов главных кривизн в критической точке. Фигура 5 демонстрирует сравнение решения, полученного предложенным методом, с численным решением работы [4]. В [4] трехмерные параболизированные уравнения Навье–Стокса решались в гиперзвуковом вязком ударном слое, включающем структуру ударной волны, конечно-разностным методом. Сравнение показывает хорошее соответствие приближенных и "точных" решений. Небольшое расхождение результатов при $Re = 100$ можно объяснить неточностью параболического приближения уравнений Навье–Стокса при малых числах Re .

Заключение. Применение метода подобия позволяет рассчитывать с хорошей точностью тепловые потоки и напряжение трения в окрестности плоскости симметрии затупленных тел, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа, в рамках полных уравнений Навье–Стокса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Брыкина И.Г., Русаков В.В. Одномерные и двумерные аналогии для пространственных вязких течений в окрестности плоскости симметрии затупленных тел // Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. № 1. С. 117–122.
2. Брыкина И.Г., Русаков В.В., Щербак В.Г. Метод определения тепловых потоков и трения в трехмерных задачах гиперзвукового обтекания с помощью двумерных решений // Докл. АН СССР. 1991. Т. 316. № 1. С. 62–66.
3. Карякин В.Е., Попов Ф.Д. Расчет пространственного обтекания затупленных тел сверхзвуковым потоком вязкого и теплопроводящего газа // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1977. Т. 17. № 6. С. 1545–1555.
4. Гершбейн Э.А., Щербак В.Г. Исследование гиперзвукового пространственного обтекания затупленных тел в рамках параболизированных уравнений Навье – Стокса // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 4. С. 134–142.
5. Cooke J.C. An axially symmetric analogue for general threedimensional boundary layers // Aeronaut. Res. Council. 1959. Repts and Meus. 3200. 12 p.
6. Gupta R.N., Moss J.N., Simmonds A.L. et al. Space shuttle heating analysis with variation in angle of attack and catalycity // J. Spacecraft and Rockets. 1984. V. 21. № 2. P. 217–219.
7. Иванов М.Я., Крупа В.Г., Нигматуллин Р.Э. Неявная схема С.К. Годунова повышенной точности для интегрирования уравнений Навье–Стокса // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1989. Т. 29. № 1. С. 888–901.
8. Полянский В.А., Сахаров В.И., Панкратьева И.Л. Расчет вязких течений сжимаемого газа на основе монотонных схем повышенного порядка аппроксимации // Отчет Ин-та механики МГУ, 1992. № 4189. 43 с.

Москва

Поступила в редакцию
20.II.1996