

УДК 532.546:536.24

© 1997 г. М.М. АЛИМОВ, Г.И. МУХАМАДУЛЛИНА

СМЫКАНИЕ ДВУХ ЛЕДОПОРОДНЫХ ТЕЛ В ПЛОСКОМ ФИЛЬТРАЦИОННОМ ПОТОКЕ

Методами работ [1, 2] строится численно-аналитическое решение задачи о двух замораживающих колонках в плоском фильтрационном потоке, в широком диапазоне определяющих физических параметров находятся предельно равновесные конфигурации двусвязного ледопородного тела, строится критерий гарантированного смыкания.

Одной из основных проблем искусственного замораживания является определение критерия смыкания ледопородных тел, образующихся вокруг отдельных колонок. За базовую оценку принимают решение задачи о двух замораживающих колонках в плоском фильтрационном потоке, однако до сих пор ее решение в достаточно строгой постановке не было получено. Известный критерий [3] построен на основе асимптотического решения задачи для уже сомкнувшегося тела, тем самым неявно предполагалось, что критерий смыкания можно заменить критерием неразмыкания. Однако в [2] была показана несостоятельность такой замены ввиду наличия целых областей, в которых одной и той же паре определяющих физических параметров (число Пекле и мощность хладоисточников) соответствуют по крайней мере два решения – одно, отвечающее двусвязному, второе – уже сомкнувшемуся односвязному ледопородному телу. Этот вывод был получен для больших чисел Пекле с использованием приближения пограничного слоя и результатов [1] для одиночной замораживающей колонки. При этом задача о двусвязном теле вокруг двух колонок в полной постановке не решалась.

1. Постановка задачи. Предположим, что процесс установился, фильтрация подчиняется закону Дарси, жидкость несжимаема, теплофизические характеристики фильтрующей среды постоянны. Тогда математическая модель образования симметричного двусвязного ледопородного тела вокруг двух замораживающих колонок, расположенных поперек потока, представима в следующей безразмерной форме (фиг. 1, а):

$$\mathbf{v} = -\nabla p, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad z \in D_z^-; \quad |\mathbf{v}| = 1, \quad |z| \rightarrow \infty \quad (1.1)$$

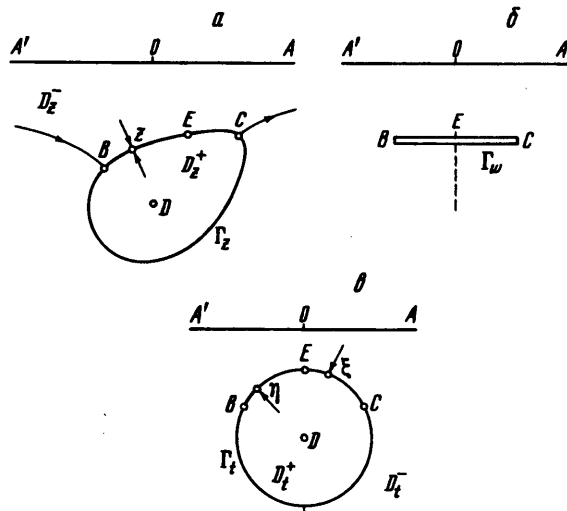
$$\operatorname{Re}(\mathbf{v} \nabla \theta^-) = \Delta \theta^-, \quad z \in D_z^-; \quad \theta^- = 1, \quad |z| \rightarrow \infty \quad (1.2)$$

$$\Delta \theta^+ = 0, \quad z \in D_z^+; \quad \frac{\partial \theta^+}{\partial n} = \frac{\partial \theta^-}{\partial n}, \quad \theta^+ = \theta^- = 0, \quad z \in \Gamma_z \quad (1.3)$$

$$\theta^+(z) = \theta^+(\bar{z}), \quad z \in \bar{D}_z^+, \quad \bar{z} \in D_z^+ \quad (1.4)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \frac{\partial \theta^+}{\partial r} = q_i, \quad z = \pm i \quad (1.5)$$

Здесь D_z^- – область фильтрации, D_z^+ , \bar{D}_z^+ – две части двусвязной области, занятой образовавшимся ледопородным телом, $\Gamma_z = \partial D_z^+$ и $\bar{\Gamma}_z = \partial \bar{D}_z^+$ – ее граница, n – нормаль к



Фиг. 1. Вид: *a* – физической плоскости z ; *b* – плоскости гидродинамического комплексного потенциала W ; *c* – вспомогательной плоскости t . Ввиду симметрии процесса представлены нижние половины плоскостей

$\Gamma_2 \cup \bar{\Gamma}_2$, внешняя по отношению к области $D_2^+ \cup \bar{D}_2^+$. В соответствии с [2] введены следующие безразмерные переменные и комплексы; v – скорость фильтрации, p – давление, θ^-, θ^+ – температуры в областях D_2^- и $D_2^+ \cup \bar{D}_2^+$ соответственно, Pe – число Пекле, построенное по половине расстояния между хладоисточниками, q_t – мощность хладоисточников (при этом замораживающая скважина, представленная в плоскости z окружностью малого радиуса, стягивается в точку с сохранением теплового расхода). Знак черты над объектом следует понимать как знак комплексного сопряжения. Это справедливо и по отношению к $\bar{\Gamma}_2, \bar{D}_2^+$, хотя последние и принимались как обозначения.

Уравнения (1.1) позволяют стандартным образом ввести комплексный потенциал течения aW , где $2a$ – приращение потенциала между точками разделения и схода потоков на каждом из тел, $W = \varphi + i\psi$ – безразмерный комплексный потенциал, причем $\varphi = -p/a$, а ψ – безразмерная функция тока. Область изменения переменной W представляет собой плоскость с двумя параллельными и симметричными относительно действительной оси разрезами (фиг. 1, б). Точкам B и C , являющимся концами нижнего разреза, соответствуют значения W , равные $-1 - i\psi_0/2$, $1 - i\psi_0/2$, где ψ_0 – вспомогательный параметр. Точкам A' и A соответствуют W , равные $-\infty$ и $+\infty$.

В свою очередь уравнение (1.3) позволяет ввести комплексный тепловой потенциал $W^+ = -\theta^+ + i\psi^+$, где ψ^+ – функция тока тепла. В силу наличия у системы (1.1)–(1.5) симметрии относительно действительной оси оба потенциала обладают симметрией

$$W^+(\bar{z}) = \bar{W}^+(z), \quad W(\bar{z}) = \bar{W}(z) \tag{1.6}$$

Аналогично [2] применим к первому уравнению в (1.2) преобразование Буссинеска, что эквивалентно переходу от $\theta^-(z)$ к $\theta^-(W)$ с помощью пока неизвестной функции $W(z)$, реализующей конформное отображение области D_2^- на плоскость W . В результате из (1.1)–(1.5) выделится задача о теплообмене двух пластинок в плоскости W с равно-

мерно набегающим потоком

$$2P \frac{\partial \theta^-}{\partial \phi} = \frac{\partial^2 \theta^-}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \theta^-}{\partial \psi^2}, \quad P = \frac{\text{Pe} a}{2} \quad (1.7)$$

$$\theta^- = 1, \quad |W| \rightarrow \infty; \quad \theta^- = 0, \quad W \in \Gamma_w \cup \bar{\Gamma}_w \quad (1.8)$$

Вводя функцию $\mu(\phi)$

$$\mu(\phi) = \left[\frac{\partial \theta^-}{\partial \psi} \right]_{W \in \Gamma_w} = \left[\frac{\partial \theta^-}{\partial \psi} \right]_{W \in \bar{\Gamma}_w} \quad (1.9)$$

и используя методы работ [4, 5], задачу (1.7), (1.8) можно свести к граничному интегральному уравнению

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \mu(\phi) \exp[P(\phi - \phi)] \left[K_0(P|\phi - \phi|) + K_0\left(P\sqrt{(\phi - \phi)^2 + \psi_0^2}\right) \right] d\phi = 1, \quad \phi \in [-1, 1] \quad (1.10)$$

Решение его позволяет найти связь $q_t(P, \psi_0)$ и распределение температуры θ^- в плоскости W

$$q_t = \int_{-1}^1 \mu(\phi) d\phi \quad (1.11)$$

$$\theta^-(\phi, \psi) = 1 - \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \mu(\phi) \exp[P(\phi - \phi)] \left[K_0\left(P\sqrt{(\phi - \phi)^2 + (\psi - \psi_0/2)^2}\right) + K_0\left(P\sqrt{(\phi - \phi)^2 + (\psi + \psi_0/2)^2}\right) \right] d\phi \quad (1.12)$$

Из соотношений (1.9), (1.12) при использовании известных правил дифференцирования потенциала простого слоя определяется плотность теплового потока на пластинах

$$\left. \frac{\partial \theta^-}{\partial \psi} \right|_{\psi = \frac{1}{2} k \psi_0 \pm 0} = \pm \frac{\mu(\phi)}{2} + \chi \left(\frac{P\psi_0}{2\pi} \right) \int_{-1}^1 \mu(\phi) \exp[P(\phi - \phi)] \frac{K_1\left(P\sqrt{(\phi - \phi)^2 + \psi_0^2}\right)}{\sqrt{(\phi - \phi)^2 + \psi_0^2}} d\phi, \quad \phi \in [-1, 1] \quad (1.13)$$

где χ равна (+1) или (-1) в зависимости от того, на верхней или на нижней пластине вычисляется производная.

В результате исходную задачу (1.1)–(1.5) можно сформулировать как задачу сопряжения для аналитических функций $W(z)$ и $W^+(z)$: найти функцию $W(z)$, аналитическую всюду в D_z^- и удовлетворяющую условию

$$\frac{dW}{dz} = \frac{1}{a}, \quad |z| \rightarrow \infty \quad (1.14)$$

и функцию $W^+(z)$, аналитическую всюду в D_z^+ , кроме точки $z = -i$, в которой она имеет особенность вида

$$W^+(z) \Big|_{z \rightarrow -i} \sim -\frac{q_t}{2\pi} \ln(z+i) \quad (1.15)$$

по граничным условиям на контуре Γ_z

$$\operatorname{Im} W = -\frac{\Psi_0}{2}, \quad \operatorname{Re} W^+ = 0, \quad \left| \frac{\partial \theta^-}{\partial \psi} \right| \left| \frac{\partial W}{\partial n} \right| = \left| \frac{\partial W^+}{\partial n} \right| \quad (1.16)$$

и дополнительным условиям симметрии (1.6). Причем параметры a , Ψ_0 и входящий в уравнение (1.10) параметр P необходимо связать с физическими параметрами Re и q_1 .

2. Сведение задачи сопряжения к задаче Римана со сдвигом. Приведенная математическая постановка задачи сопряжения со свободной границей представляется достаточно четкой и строгой, однако эффективные методы ее непосредственного решения неизвестны. Поэтому в дальнейшем методами работ [1, 2] она сводится к задаче Римана со сдвигом (задаче Газемана) на системе контуров канонической формы.

Введем плоскость вспомогательного комплексного переменного t как объединение трех областей: D_t^- – внешности двух симметричных относительно действительной оси кругов единичного радиуса и D_t^+ , \bar{D}_t^+ – внутренностей этих кругов соответственно (см. фиг. 1, θ). Центры кругов расположены в точках $\pm id$, $d > 1$. Точкам A' , A , B , C , E соответствуют значения

$$t = -\infty, +\infty, \exp[i(\pi - \sigma_0)] - id, \exp[i\sigma_0] - id, -i(d - 1)$$

где σ_0 – вспомогательный параметр. Условимся обозначать через t^- точки $t \in D_t^-$, через t^+ точки $t \in D_t^+$ и соответственно через \bar{t}^+ точки $t \in \bar{D}_t^+$. Область D_t^- можно конформно отобразить на плоскость переменного W с помощью некоторой функции $W(t^-)$ (ее вид приводится ниже). Отображение $z(t^-) = z[W(t^-)]$ переводит бесконечность в бесконечность. Кроме того, требование сохранения симметрии относительно действительной оси приводит к условию

$$\arg \frac{dz}{dt^-} = 0 \quad (|t^-| \rightarrow \infty)$$

В соответствии с теорией функции комплексного переменного [6] можно утверждать, что вид функции $z(t^-)$ определяется только конфигурацией границы Γ_z .

С другой стороны, для областей D_t^+ , \bar{D}_t^+ потребуем, чтобы точки $z = \pm i$, соответствующие хладоисточникам в физической плоскости, переходили в точки $t^+ = -id$, $\bar{t}^+ = id$, и зададим аргумент производной в этих точках

$$\arg \left(\frac{dz}{dt^+} \right) \Big|_{t^+ = -id} = \alpha, \quad \arg \left(\frac{dz}{d\bar{t}^+} \right) \Big|_{\bar{t}^+ = id} = -\alpha \quad (2.1)$$

где α – пока произвольно выбранное направление. Тогда вид функции $z(t^+)$ также будет определяться только конфигурацией границы Γ_z [6].

Таким образом, вместо двух функций $W(z)$ и $W^+(z)$, определенных в областях D_z^- , D_z^+ с неизвестной свободной границей Γ_z между ними, приходим к двум функциям $z(t^-)$ и $z(t^+)$, определенных в областях D_t^- , D_t^+ с известной границей Γ_t между ними. При этом условие (1.14) и первое из условий (1.16) выполняются по построению. Потребовав, чтобы выполнялись условия (1.15) и второе из условий (1.16), придем к краевой задаче для $W^+(t^+) = \bar{W}^+(\bar{t}^+)$ в области D_t^+ , решение которой строится элементарно и имеет вид

$$W^+(t^+) = -\frac{q_1}{2\pi} \ln(t^+ + id) \quad (2.2)$$

с точностью до несущественной мнимой константы. Остается удовлетворить последнему граничному условию в (1.16). Физически оно означает равенство тепловых потоков изнутри и снаружи ледопородного тела и при учете первых двух условий в (1.16) может быть переписано в виде

$$i \frac{\partial \theta^-}{\partial \psi} \frac{dW}{dz} = \frac{dW^+}{dz}, \quad z \in \Gamma_z \quad (2.3)$$

Отсюда легко получить вид граничного условия для функций $z(t^+)$, $z(t^-)$

$$i \frac{\partial \theta^-}{\partial \psi} [W(\xi)] \frac{dW}{dt^-}(\xi) \left[\frac{dz}{dt^-}(\xi) \right]^{-1} = \frac{dW^+}{dt^+}(\eta) \left[\frac{dz}{dt^+}(\eta) \right]^{-1} \quad (2.4)$$

Однако здесь есть одна существенная особенность: точки ξ и η в этом соотношении принадлежат Γ , но не совпадают друг с другом. Этот факт в теории краевых задач для аналитических функций [7, 8] называется сдвигом и является следствием того, что точки ξ и η – это образы одной и той же точки $z \in \Gamma_z$, но в разных отображениях $z(t^+)$, $z(t^-)$.

Для нахождения формулы сдвига $\eta = \eta(\xi)$ аналогично [1] используем тот очевидный факт, что если для $f_1(z)$, $f_2(z)$ интеграл по дуге L вида

$$\int_L f_1(z) \frac{df_2}{dz} dz$$

существует, то он является инвариантом конформного отображения. Поэтому, интегрируя левую часть соотношения (2.3) по дуге контура Γ_z , найдем

$$i \int_{z_0}^z \frac{\partial \theta^-}{\partial \psi} \frac{dW}{dz} dz = i \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{\partial \theta^-}{\partial \psi} \frac{dW}{dt^-} dt^-, \quad z, z_0 \in \Gamma_z, \quad \xi = t^-(z), \quad \xi_0 = t^-(z_0) \in \Gamma, \quad (2.5)$$

где точка z_0 контура Γ_z может быть выбрана произвольно и из соображения удобства она совмещается с точкой C разветвления гидродинамических потоков (фиг. 1, а). С другой стороны, интегрируя правую часть соотношения (2.3), найдем

$$\int_{z_0}^z \frac{dW^+}{dz} dz = \int_{\xi_0}^{\eta} \frac{dW^+}{dt^+} dt^+, \quad z, z_0 \in \Gamma_z, \quad \xi, \eta = t^+(z) \in \Gamma, \quad (2.6)$$

Здесь принято, что $t^-(z_0) = t^+(z_0) = \xi_0$. Этого всегда можно добиться, выбирая соответствующее α в соотношении (2.1).

Из выражения (2.3) следует, что правые части последних двух соотношений равны между собой. Тогда, дифференцируя их по ξ , получим уравнение для $\eta(\xi)$

$$\eta'(\xi) = i \frac{\partial \theta^-}{\partial \psi} [W(\xi)] \frac{dW}{dt^-}(\xi) \left\{ \frac{dW^+}{dt^+}[\eta(\xi)] \right\}^{-1} \quad (2.7)$$

В силу симметрии (1.6) функций $W(z)$, $W^+(z)$ и очевидной симметрии функции $z(t)$

$$z(\bar{t}^-) = \bar{z}(t^-), \quad z(\bar{t}^+) = \bar{z}(t^+) \quad (2.8)$$

из соотношений (2.7), (1.13) следует, что аналогичным свойством обладает функция $\eta'(\xi)$, а следовательно, и $\eta(\xi)$: $\eta(\bar{\xi}) = \bar{\eta}(\xi)$. Конкретный вид функции сдвига лучше получить из (2.5), (2.6), положив

$$\eta + id = \exp(i\beta), \quad \xi + id = \exp(i\sigma) \quad (2.9)$$

Будем иметь

$$\int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{\partial \theta^-}{\partial \psi} \Big|_{\Gamma_w} \varphi'(\sigma) d\sigma = W^+(t^+) \Big|_{\exp(i\sigma_0) - id}^{\exp(i\beta) + id}$$

откуда при учете (2.2) окончательно получим

$$\beta(\sigma) = \sigma_0 - \frac{2\pi}{q_t} \int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{\partial \theta^-}{\partial \psi} \Big|_{\Gamma_w} \varphi'(\sigma) d\sigma \quad (2.10)$$

Теперь дадим новую формулировку задачи сопряжения. Пусть

$$F = F^+ = \left[\frac{dz}{dt^+} \right]^{-1}, \quad t^+ \in D_t^+, \quad F = F^- = \left[\frac{dz}{dt^-} \right]^{-1}, \quad t^- \in D_t^- \quad (2.11)$$

$$F^-(\bar{t}^-) = \bar{F}^-(t^-), \quad F^+(\bar{t}^+) = \bar{F}^+(t^+) \quad (2.12)$$

Необходимо найти функции $F^+(t^+)$ и $F^-(t^-)$, аналитические соответственно в D_t^+ и D_t^- , по краевому условию на контуре Γ_t (2.13), условию симметрии (2.12) и вытекающему из соотношения (1.14) дополнительному условию на бесконечности (2.14)

$$F^+[\eta(\xi)] = \Omega(\xi) F^-(\xi), \quad \xi \in \Gamma_t \quad (2.13)$$

$$F^-(t^-) \Big|_{|t^-| \rightarrow \infty} = b, \quad b = \left[a \frac{dW}{dt^-} \right]_{|t^-| \rightarrow \infty}^{-1} \quad (2.14)$$

Здесь $\eta(\xi)$ – сдвиг, определяемый соотношениями (2.9), (2.10); функция $\Omega(\xi)$ в соответствии с (2.4), (2.7), (2.9), (2.10) имеет вид

$$\Omega(\xi) = \eta'(\xi) = \beta'(\sigma) \exp[i(\beta(\sigma) - \sigma)] \quad (2.15)$$

Фактически сформулированная задача является задачей Римана со сдвигом [7, 8] на системе двух симметричных контуров Γ_t и $\bar{\Gamma}_t$. Краевое условие на $\bar{\Gamma}_t$ получается из (2.4) при учете симметрии функций $F^+(t^+)$, $F^-(t^-)$, $\Omega(\xi)$ (последняя является следствием симметрии функций $z(t^-)$, $z(t^+)$ и $\eta(\xi)$)

$$F^+[\eta(\bar{\xi})] = \Omega(\bar{\xi}) F^-(\bar{\xi}), \quad \bar{\xi} \in \bar{\Gamma}_t \quad (2.16)$$

Индекс полученной задачи Римана, являющийся суммой индексов функций $\Omega(\xi)$ на Γ_t и $\Omega(\bar{\xi})$ на $\bar{\Gamma}_t$ [7], будет равен нулю, поскольку из соотношений (2.15), (2.10), (1.11) следует

$$\text{Ind } \Omega(\xi) = \frac{1}{2\pi} [\beta(\sigma_0) - \sigma_0] - \frac{1}{2\pi} [\beta(\sigma_0 + 2\pi) - (\sigma_0 + 2\pi)] = 0 \quad (2.17)$$

Таким образом, задача сопряжения сведена к задаче Римана со сдвигом (2.11)–(2.15) с нулевым индексом.

3. Общая схема решения исходной задачи (1.1)–(1.5). Задача Римана со сдвигом (в другой терминологии задача Газемана) достаточно полно исследована в случае одиночного контура [7–9]. Для задач с нулевым индексом основные результаты легко обобщаются на случай системы двух контуров и, в частности, на случай полной симметрии задачи относительно действительной оси. Решение задачи (2.11)–(2.15), (2.17) имеет вид

$$\ln \left[b \frac{dz}{dt^+} \right] = - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_t} \frac{\Phi[\beta_{-1}(\sigma)]}{\xi - t^+} d\xi \Big|_{\xi = e^{i\sigma} - id}, \quad t^+ \in D_t^+$$

$$\ln \left[b \frac{dz}{d\bar{t}^+} \right] = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\bar{\Gamma}_t^+} \frac{\overline{\Phi}[\beta_{-1}(-\sigma)]}{\xi - \bar{t}^+} d\xi \Big|_{\xi=e^{i\sigma+id}}, \quad \bar{t}^+ \in \bar{D}_t^+ \quad (3.1)$$

$$\ln \left[b \frac{dz}{dt^-} \right] = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_t^-} \frac{\Phi(\sigma)}{\xi - t^-} d\xi \Big|_{\xi=e^{i\sigma-id}} - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\bar{\Gamma}_t^-} \frac{\overline{\Phi}(-\sigma)}{\xi - t^-} d\xi \Big|_{\xi=e^{i\sigma+id}}, \quad t^- \in D_t^-$$

где $\beta_{-1}(\sigma)$ – функция, обратная к $\beta(\sigma)$, а комплекснозначная функция $\Phi(\sigma)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\begin{aligned} & \Phi(s) + \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma_0}^{2\pi+\sigma_0} [\beta'(\sigma) - 1] \Phi(\sigma) d\sigma + \\ & + \frac{1}{4\pi i} \int_{\sigma_0}^{2\pi+\sigma_0} \left[\beta'(\sigma) \operatorname{ctg} \frac{\beta(\sigma) - \beta(s)}{2} - \operatorname{ctg} \frac{\sigma - s}{2} \right] \Phi(\sigma) d\sigma - \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma_0}^{2\pi+\sigma_0} \frac{\overline{\Phi}(\sigma) e^{-i\sigma} d\sigma}{e^{-i\sigma} - e^{is} + 2id} = \ln \beta'(s) + i[\beta(s) - s], \quad s \in [\sigma_0, 2\pi + \sigma_0] \end{aligned} \quad (3.2)$$

Поскольку в общеизвестной литературе по краевым задачам для аналитических функций [7–9] не приводится решение задачи Римана со сдвигом на многосвязном контуре, кратко опишем, как получается уравнение (3.2). При нулевом индексе Римана эта задача безусловно разрешима и имеет единственное решение, причем представить его можно многими способами [10]. Если отвлечься пока от того факта, что Γ_t , $\bar{\Gamma}_t$ – окружности, не переходить от переменной ξ к σ и писать вместо функции $\Phi(\sigma)$ соответственно $f_1(\xi)$ для $\xi \in \Gamma_t$ и $f_2(\xi)$ для $\xi \in \bar{\Gamma}_t$, то представление (3.1) достаточно удобно для расчетов и является естественным обобщением случая односвязного контура [7]. Следуя затем общей идеологии [7], систему сингулярных интегральных уравнений для $f_1(\xi)$, $f_2(\xi)$ получаем подстановкой (3.1) в граничные условия (2.13), (2.16). Далее, предполагая, что $f_1(\xi)$, $f_2(\xi)$ обладают симметрией вида $f_1(\bar{\xi}) = \bar{f}_1(\xi)$, $f_2(\bar{\xi}) = \bar{f}_2(\xi)$, замечаем, что второе уравнение получается из первого простой операцией комплексного сопряжения, если $f_2(\xi) = f_1(\bar{\xi})$. Поскольку решение единственно, а сделанное предположение позволяет его строить, то оно правомерно. Наконец, учитывая теперь, что Γ_t , $\bar{\Gamma}_t$ – окружности, и обозначая $f_1(\xi)$ при $\xi = -id + \exp(i\sigma)$ через $\Phi(\sigma)$, полученное уравнение преобразуем к виду (3.2). От соответствующего уравнения для случая задачи Римана со сдвигом на окружности [10] оно отличается только регулярным добавком (последнее слагаемое слева в (3.2)).

Прежде чем переходить к обсуждению общей схемы решения задачи, отметим, что непосредственно решать уравнение (1.10) затруднительно, поскольку у функции $\mu(\varphi)$ на концах разреза Γ_w имеются особенности [11] вида

$$\mu(\varphi) \sim \frac{1}{\sqrt{1-\varphi^2}} \quad (3.3)$$

Этих трудностей удастся избежать, если переход к плоскости t совершить не после решения уравнения (1.10), а до него. Благодаря тому, что производная dt/dw на разрезах Γ_w , $\bar{\Gamma}_w$ имеет те же особенности (3.3), что и $\mu(\varphi)$, у функции $\mu_1(\sigma)$ вида

$$\mu_1(\sigma) = \mu[\Phi(\sigma)] \Phi'(\sigma), \quad \sigma \in [\sigma_0, 2\pi + \sigma_0] \quad (3.4)$$

все особенности взаимно погасятся. Производя замену переменных в (1.10), получим

уравнение для $\mu_1(s)$, $s \in [\pi - \sigma_0, 2\pi + \sigma_0]$

$$\int_{\pi - \sigma_0}^{2\pi + \sigma_0} \mu_1(\sigma) \exp\{P[\varphi(s) - \varphi(\sigma)]\} \left[K_0(P|\varphi(s) - \varphi(\sigma)|) + K_0 \left(P\sqrt{(\varphi(s) - \varphi(\sigma))^2 + \psi_0^2} \right) \right] d\sigma = 2\pi \quad (3.5)$$

Аналогичное уравнение можно выписать и для $\mu_1(s)$, $s \in [\sigma_0, \pi - \sigma_0]$, однако, как будет ясно из дальнейшего, оно не понадобится.

Для вычисления $\beta(\sigma)$ по формуле (2.10) фактически необходимо знать не функцию $\partial\theta^-/\partial\psi$, а функцию

$$\frac{\partial\theta^-}{\partial n}(\sigma) = \frac{\partial\theta^-}{\partial\psi}(W) \Big|_{\Gamma_w} \varphi'(\sigma) \quad (3.6)$$

где n – внешняя к Γ , нормаль. После определения $\mu_1(\sigma)$ функция (3.6) вычисляется по формуле, следующей из соотношения (1.13)

$$\frac{\partial\theta^-}{\partial n}(s) = \pm \frac{\mu_1(s)}{2} + \left(\frac{P\psi_0}{2\pi} \right) \varphi'(s) \times \quad (3.7)$$

$$\times \int_{\sigma_0}^{\pi - \sigma_0} \mu_1(\sigma) \exp\{P[\varphi(s) - \varphi(\sigma)]\} \frac{K_1 \left(P\sqrt{[\varphi(s) - \varphi(\sigma)]^2 + \psi_0^2} \right)}{\sqrt{[\varphi(s) - \varphi(\sigma)]^2 + \psi_0^2}} d\sigma$$

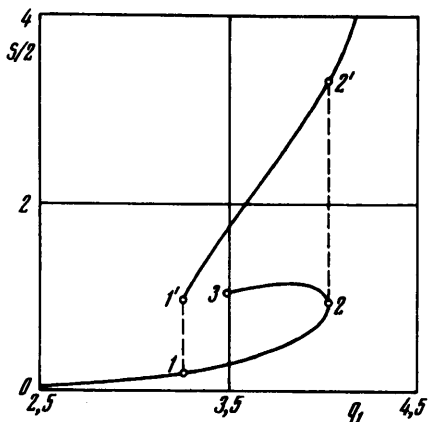
Здесь интервалу $[\sigma_0, \pi - \sigma_0]$ соответствует знак плюс, а интервалу $[\pi - \sigma_0, 2\pi + \sigma_0]$ – знак минус.

В результате общая схема решения исходной задачи выглядит следующим образом: сначала строится отображение $W(r)$, затем находится решение $\mu_1(s)$ интегрального уравнения (3.5), с помощью соотношения (3.7) вычисляется распределение $(\partial\theta^-/\partial n)$ по s и при учете (3.6) из (2.10) находится вид функции $\beta(\sigma)$. На последнем этапе находится решение $\Phi(\sigma)$ сингулярного интегрального уравнения (3.2) и с помощью соотношений (3.1) определяется конфигурация контура ледопородного тела.

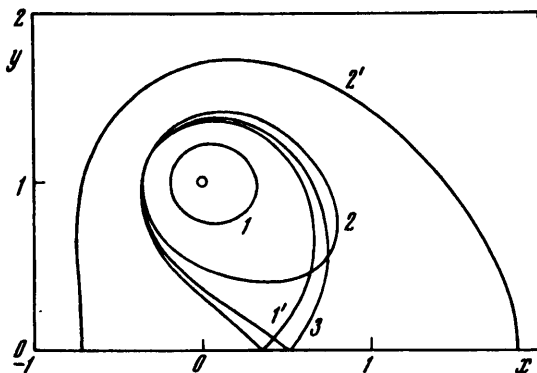
В Приложении строится отображение $W(r)$, определяются зависимости между вспомогательными параметрами и приводятся наиболее существенные моменты численной реализации.

4. Обсуждение результатов. Была проведена серия расчетов по определению конфигурации двусвязного ледопородного тела для различных комбинаций определяющих физических параметров q_l и Re . Приведем основные результаты расчетов. Наиболее интересным результатом является тот факт, что при некоторых значениях определяющих физических параметров существуют три решения задачи: два для двусвязного и одно для уже сомкнувшегося односвязного тела (см. [2]). Это проиллюстрировано фиг. 2 на примере зависимости суммарной площади S ледопородного тела от мощности хладоисточника при фиксированном $Re = 2$. Здесь верхняя кривая соответствует односвязному, а нижняя – двусвязному телу, причем ветвь 2–3 последней кривой должна в принципе дойти до точки I' . Однако в этом случае части ледопородного тела близки к смыканию (соответственно параметр d близок к единице) и при численной реализации возникают трудности (см. Приложение). Точка 3 на фиг. 2 соответствует ближайшему к единице значению $d = 1,05$, при котором еще достигается удовлетворительная точность.

Значения q_* , соответствующие границам области неединственности решения, будем обозначать через q_* (левая граница) и q^* (правая граница). При $q < q_*$, очевидно, будем иметь гарантированно разомкнутое, а при $q > q^*$ – гарантированно сомкнувшееся ледо-



Фиг. 2



Фиг. 3

Фиг. 2. Зависимость площади ледопородного тела S от мощности хладоисточника q_i при $Re = 2$. Верхняя кривая соответствует односвязному, нижняя – двусвязному телу. Точкам 1, 2, 3, 1', 2' отвечают конфигурации тела, изображенные на фиг. 3

Фиг. 3. Конфигурации ледопородного тела, соответствующие точкам 1, 2, 3, 1', 2' фиг. 2, при $Re = 2$

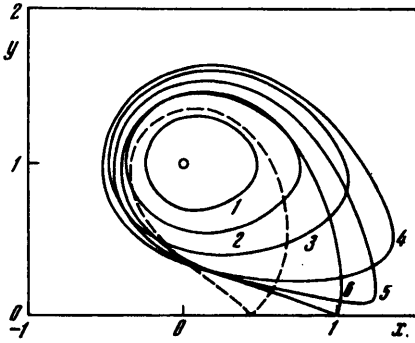
породное тело. Заметим, что при переходе от двусвязного тела к односвязному в точках $q_i = q_*$, q^* площадь претерпевает скачок более чем в 3 раза, причем для больших Re величина скачка еще более увеличивается.

Соответствующие точкам 1, 2, 3, 1', 2' фиг. 2 конфигурации тела изображены на фиг. 3 (в силу симметрии представлена только верхняя часть плоскости). Более детально проследить характер поведения конфигураций тела можно на фиг. 4, где они приводятся для случая $Re = 8$ (для больших Re увеличивается размер области неединственности и соответственно более четко выражены связанные с ней особенности). Номерам кривых 1–6 соответствуют значения $d = 3; 2; 1,5; 1,2; 1,1; 1,05$ и значения физического параметра $q_i = 7,638; 9,391; 10,70; 10,43; 9,052; 8,02$. Здесь значению $q_i = q^*$ отвечает кривая под номером 3, а значению $q_i = q_*$ – кривая, нарисованная штриховой линией. Для конфигурации 3 на фиг. 3 и б на фиг. 4 минимальное расстояние между частями ледопородного тела имеет порядок 10^{-3} (относительная точность численных расчетов составляла 10^{-4}).

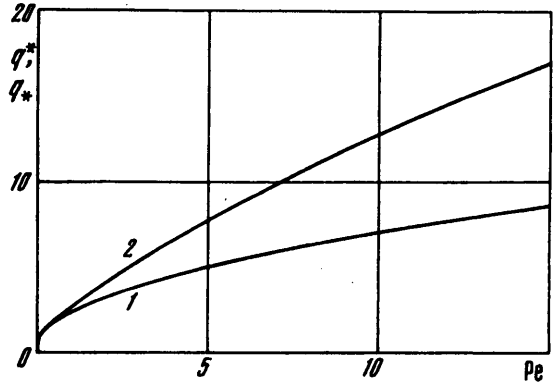
На фиг. 5 приведены зависимости $q_*(Re)$ (кривая 1) и $q^*(Re)$ (кривая 2), представляющие собой соответственно критерий гарантированного размыкания и критерий гарантированного смыкания. В области, лежащей между этими кривыми, может существовать как двусвязное, так и односвязное ледопородное тело, причем размеры области неединственности увеличиваются с ростом Re .

5. Приложение. Построим отображение $W(\tau)$ и найдем зависимости между вспомогательными параметрами.

Конформное отображение плоскости W на область D_1^- осуществляется посредством двух функций $W(u)$ и $u(\tau)$, где $u = u_1 + iu_2$ – вспомогательное комплексное переменное, область изменения которого представляет собой прямоугольник размерами 1 и $\tau/2$ и вершинами $u = 0, 1, 1 - \tau/2, -\tau/2$. Точкам A', A, B, C соответствуют значения $u = 0, 1, c - \tau/2, 1 - c - \tau/2$ (τ и c – пока не определенные параметры, такие, что $Re c = Im c = 0$). Потребуем, чтобы точкам $-\infty, +\infty, -i(d+1) + 0, -i(d+1) - 0$ в плоскости τ соответствовали точки $0, 1, 1 - \tau/2, -\tau/2$ в плоскости u и точки $-\infty, +\infty, i(-\psi_0/2 - 0) + 0, i(-\psi_0/2 - 0) - 0$ в плоскости W .



Фиг. 4



Фиг. 5

Фиг. 4. Характер поведения конфигурации ледопородного тела в области неединственности решения при $Re = 8$: 1 - $d = 3$; 2 - $d = 2$; 3 - $d = 1,5$; 4 - $d = 1,2$; 5 - $d = 1,1$; 6 - $d = 1,05$

Фиг. 5. Фазовая диаграмма квазистационарного процесса замораживания. Ниже кривой 1 ледопородное тело гарантированно двусвязное, выше кривой 2 - гарантированно односвязное, в области, лежащей между кривыми 1, 2, тело может быть как одно-, так и двусвязным

Конформное отображение $W(u)$ осуществляет функция [13]

$$W = - \left(\frac{\Psi_0}{2} \right) \frac{\vartheta'_1(\pi u)}{\vartheta_1(\pi u)} \quad (5.1)$$

где $\vartheta_1(\pi u) = \vartheta_1(\pi u, q)$ - зэта-функция с квазипериодами π и $\pi\tau$, $q = e^{i\pi\tau}$ (обозначения по [14]). Соответственно конформное отображение $u(t)$ осуществляет функция [13]

$$u = - \frac{i}{2\pi} \ln \left[\frac{t - i\sqrt{d^2 - 1}}{t + i\sqrt{d^2 - 1}} \right] \quad (5.2)$$

$$\tau = \frac{i}{\pi} \ln(d + \sqrt{d^2 - 1}) = - \frac{i}{\pi} \ln(d - \sqrt{d^2 - 1}) \quad (5.3)$$

Вследствие многозначности логарифма, в представлении (5.2) необходимо выделить ветвь, положив, например, в точке $t = -\infty$ $\arg(t - i\sqrt{d^2 - 1}) = \arg(t + i\sqrt{d^2 - 1}) = \pi$. Тогда в оставшихся трех точках $t = \infty$, $-i(d + 1) + 0$, $-i(d + 1) - 0$ $\arg(t - i\sqrt{d^2 - 1})$ будет принимать значение 2π , $3\pi/2$, $3\pi/2$, а $\arg(t + i\sqrt{d^2 - 1})$ - соответственно 0 , $-\pi/2$, $3\pi/2$.

Зависимость $\tau(d)$ вида (5.3) устанавливается благодаря тому, что было задано соответствие четырех граничных точек. Из этих же соображений должна устанавливаться зависимость $\Psi_0(d)$, однако найти ее несколько сложнее, чем в случае с $\tau(d)$. Сначала из уравнения

$$\left[\frac{d}{du_1} \operatorname{Re} W \left(u_1 - \frac{\tau}{2} \right) \right]_{u_1=1-c} = 0 \quad (5.4)$$

при учете (5.3) необходимо получить связь $c(d)$, после чего из условия

$$\operatorname{Re} W(u)|_{u=1-c-\tau/2} = 1 \quad (5.5)$$

определяется связь $\Psi_0(d)$.

В силу (5.1) и известных свойств тэта-функций [14], уравнения (5.4) и (5.5) примут вид

$$\vartheta_4''(\pi c)\vartheta_4(\pi c) - [\vartheta_4'(\pi c)]^2 = 0, \quad \psi_0 = 2 \frac{\vartheta_4(\pi c)}{\vartheta_4'(\pi c)} \quad (5.6)$$

Связь $c(d)$ может быть определена из (5.6) только численно.

В приведенных выкладках присутствует еще один вспомогательный параметр σ_0 , который также может быть связан с d . Действительно, из (5.2) будем иметь

$$u_1|_{t=\exp(i\sigma)-id} = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2\pi} \arccos\left(\frac{1-d\sin\sigma}{d-\sin\sigma}\right), & \sigma \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ \frac{1}{2\pi} \arccos\left(\frac{1-d\sin\sigma}{d-\sin\sigma}\right), & \sigma \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \end{cases} \quad (5.7)$$

откуда при $u_1 = 1 - c$ получим

$$\sigma_0 = \arcsin\left[\frac{1-d\cos(2\pi c)}{d-\cos(2\pi c)}\right]$$

Соотношение (5.1) определяет вид функции $\varphi(\sigma)$

$$\varphi(\sigma) = \left(-\frac{\psi_0}{2}\right) \frac{\vartheta_4'(\pi u_1)}{\vartheta_4(\pi u_1)}$$

где u_1 есть функция σ вида (5.7).

Кроме этого, имея конкретный вид функции $W(u)$ и $u(t)$, нетрудно вычислить величину производной dW/dt^- при $|t^-| \rightarrow \infty$

$$\frac{dW}{dt^-} \Big|_{|t^-| \rightarrow \infty} = \frac{\psi_0}{2\sqrt{d^2-1}} \quad (5.8)$$

необходимую для установления связи параметра b с параметрами a и d (см. (2.14)).

В результате найден вид всех необходимых вспомогательных функций и связь всех вспомогательных параметров (кроме P и a) с параметром d .

Приведем наиболее существенные особенности численной реализации. Для вычисления тэта-функций использовались стандартные представления [14], когда параметр $q = \exp(i\pi\tau)$ заметно меньше единицы, и альтернативные представления [15], когда этот параметр становится близок к единице, а $\tau \ll 1$ (в физической плоскости это соответствует ситуации, когда части тела, образовавшиеся вокруг каждого хладоисточника, близки к смыканию).

Интегральное уравнение типа (3.5) достаточно полно исследовано в [1, 4, 16]. В [1] было показано, что эффективное численное решение может быть получено методом коллокаций. Этот метод и был применен в данном случае, причем разбиение отрезка $[\pi - \sigma_0, 2\pi + \sigma_0]$ выбиралось открытое и равномерное.

Функцию $\mu_1(\sigma)$ на интервале $[\sigma_0, \pi - \sigma_0]$ проще всего получить с помощью формулы

$$\mu_1(\sigma) = \mu_1(\sigma^*) \frac{\varphi'(\sigma)}{\varphi'(\sigma^*)}$$

где $\sigma \in [\sigma_0, \pi - \sigma_0]$, а $\sigma^* \in [\pi - \sigma_0, 2\pi + \sigma_0]$ и определяется из того условия, что $\varphi(\sigma^*) = \varphi(\sigma)$.

После определения функции $\mu_1(\sigma)$, используя (1.11) при учете (3.4), можно найти связь $q_t(P, d)$

$$q_t = \int_{\sigma_0}^{2\pi+\sigma_0} \mu_1(\sigma) d\sigma \quad (5.9)$$

Для значений d , близких к единице, возникают проблемы с вычислением функции $\partial\theta^-/\partial n$ на интервале $[\sigma_0, \pi - \sigma_0]$. Из физических соображений понятно, что на некоторой части интервала она должна уменьшаться почти до нуля. Но в отношении (3.7) интервалу $[\sigma_0, \pi - \sigma_0]$ соответствует разность двух положительных слагаемых. Поэтому если функция $\mu_1(\sigma)$ порядка единицы определена, скажем, с точностью $\sim 10^{-4}$, а величина $\partial\theta^-/\partial n$ в какой-либо точке интервала заметно меньше 10^{-4} , то формула (3.7) дает неверный результат. Такая потеря точности легко обнаруживается тем, что функция $\partial\theta^-/\partial n$ на этой части интервала хаотично колеблется около нуля, становясь в отдельных точках отрицательной. Без использования каких-либо приемов регуляризации этот факт не позволяет строить решение задачи Римана со сдвигом, поскольку функция $\beta(s)$ становится необратимой (см. соотношения (2.10), (3.6)). Поэтому при $d < 1,05$ расчеты не проводились.

Уравнение (3.2) является безусловно и однозначно разрешимым интегральным уравнением Фредгольма второго рода с сингулярным ядром [9]. Решение может быть найдено методом коллокаций [17]. Разбиение отрезка интегрирования в зависимости от ситуации выбиралось либо равномерное, либо неравномерное. Если части ледопородного тела были близки к смыканию, о чем свидетельствует появление четко выраженного пика у функции $\mu_1(\sigma)$ в окрестности $\sigma = \pi/2$ и соответственно "полки" с почти нулевым значением у функции $\partial\theta^-/\partial n$, то выбиралось неравномерное разбиение со степенным (квадратичным) сгущением в окрестности точки четко выраженного минимума функции $\operatorname{Re}\Phi(\sigma)$. Поскольку эта точка немного не совпадала с точкой минимума функции $\mu_1(\sigma)$, процесс несколько раз итерировался.

Число точек разбиения отрезка интегрирования при решении интегральных уравнений (3.5), (3.2) методом коллокаций принималось равным 64–128. Относительная точность составляла 10^{-4} .

После определения функции $\Phi(\sigma)$ форму контура Γ_z можно вычислить, применяя формулы (3.1) как для внешности, так и для внутренности Γ_z . Предпочтительнее использовать формулу для внешности Γ_z , т.е. последнее соотношение в (3.1), поскольку при режимах, близких к смыканию, у контура намечается особенность, в которой dz/dt^+ стремится в пределе к бесконечности, а dz/dt^- – соответственно к нулю. Последнее автоматически обеспечивает сгущение точек контура Γ_z в этом месте при интегрировании dz/dt^- на равномерной сетке. Устремляя в последнем соотношении (3.1) Γ к Γ_1 и используя формулы Сохоцкого–Племеля [6, 7], будем иметь

$$\ln \left[b \frac{dz}{dt^-} \right] \Big|_{\Gamma^- = -id + \exp(is)} = -\phi(s), \quad s \in [\sigma_0, 2\pi + \sigma_0] \quad (5.10)$$

$$\phi(s) = \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma_0}^{2\pi + \sigma_0} \Phi(\sigma) d\sigma - \frac{\Phi(s)}{2} - \frac{i}{2} \Gamma(\Phi(\sigma)|s) + \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma_0}^{2\pi + \sigma_0} \frac{\bar{\Phi}(\sigma) d\sigma}{1 - e^{i(s+\sigma)} + 2die^{i\sigma}}$$

где $\Gamma(\Phi(\sigma)|s)$ – интеграл Гильберта от функции $\Phi(\sigma)$ [7], который вычисляется численно с помощью квадратурных формул [18] (число точек разбиения отрезка интегрирования принималось равным 500–1000).

Численное решение представленной задачи удобно реализовать в полуобратной постановке, задаваясь значениями двух вспомогательных параметров: P и d . Соответствующее значение q , можно найти уже после решения интегрального уравнения (3.5) с помощью соотношений (5.9). Значение Re вычисляется только после решения задачи Римана, причем очевидно, что надо использовать тот факт, что в точке D $z = -i$. Однако точка D расположена в области D_z^+ , где действует отображение dz^+/dt , а начало координат – в области D_z^- , где действует отображение dz^-/dt . Поэтому выписать сразу соответствующее соотношение не удастся. Удобно ввести точку E на контуре Γ_1 и соответственно на Γ_2 (фиг. 1) с координатами в плоскости z : $z_E = x_E + iy_E$, и новую переменную ζ , отсчитываемую

от точки E

$$\zeta = b(z - z_E)$$

Тогда из соотношения (5.10) следует, что

$$\zeta(t^-)|_{t^- = -id + \exp(is)} = i \int_{\pi/2}^s \exp[i\sigma - \phi(\sigma)] d\sigma, \quad s \in [\sigma_0, 2\pi + \sigma_0] \quad (5.11)$$

Положение хладоисточника в плоскости ζ можно найти по формуле Коши

$$\zeta(t^+)|_{t^+ \in D_t^+} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_t} \frac{\zeta(\tau^+)}{\tau^+ - t^+} d\tau^+$$

при $t^+ = -id$. Здесь переменная интегрирования обозначена как τ^+ , чтобы подчеркнуть, что функция $\zeta(\tau^+)$, $\tau^+ \in \Gamma_t$, есть предельное значение функции $\zeta(t^+)$, определенной внутри Γ_t . Соотношение (5.11) определяет функцию $\zeta(\tau^-)$, $\tau^- \in \Gamma_t$, как предельное значение функции $\zeta(t^-)$, заданной вне $\Gamma_t \cup \bar{\Gamma}_t$. Учитывая, что хладоисточнику соответствует точка $z = -i$ и по самому определению сдвига $\zeta(\tau^+)|_{\tau^+ = -id + \exp(i\beta(s))} = \zeta(\tau^-)|_{\tau^- = -id + \exp(is)}$, из последнего соотношения найдем

$$b(i + z_E) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\sigma_0}^{2\pi + \sigma_0} \zeta(t^-)|_{t^- = -id + \exp(is)} \beta'(s) ds \quad (5.12)$$

Поскольку соотношение (5.12) содержит комплекснозначные функции, фактически оно дает два условия для определения трех неизвестных параметров: b , x_E и y_E . Еще одно условие можно получить из последнего соотношения (3.1), проинтегрировав dz/dt от точки $t^- = 0$ до точки E . Полагая $t^- = i\eta$, $\eta \in [1 - d, 0]$, будем иметь

$$\ln \left[b \frac{dz}{dt^-} \right] \Big|_{t^- = i\eta} = -[U(\eta) + \bar{U}(-\eta)], \quad U(\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma_0}^{2\pi + \sigma_0} \frac{\phi(\sigma) d\sigma}{1 - i(d + \eta)e^{-i\sigma}}$$

откуда интегрированием получим

$$by_E = \int_0^{1-d} \cos[\operatorname{Im} U(\eta) - \operatorname{Im} U(-\eta)] \exp[-\operatorname{Re} U(\eta) - \operatorname{Re} U(-\eta)] d\eta \quad (5.13)$$

Соотношения (5.12), (5.13) позволяют однозначно определить значения b и z_E . После этого, используя (5.11), можно получить параметрическое уравнение контура Γ_z в плоскости z

$$z(s) = z_E + \frac{1}{b} \zeta(t^-)|_{t^- = -id + \exp(is)}$$

Далее из соотношения (2.14) при учете (5.8) находится значение параметра a

$$a = \frac{2\sqrt{d^2 - 1}}{b\Psi_0(d)}$$

и с использованием связи (1.7) параметров $\operatorname{Re} P$, P и a определяется число Пекле $\operatorname{Re} = 2P/a$.

Заключение. Вопрос, какое из трех решений реализуется в области неединственности, требует отдельного исследования. Однако уже сейчас достаточно обоснованно можно предположить, что верхняя и нижняя ветви решений, представленных на фиг. 2, будут устойчивы относительно малых возмущений, так как эти ветви являются гладкими продолжениями решений из областей единственности. Поэтому в

квазистационарном процессе медленного увеличения-уменьшения мощности хладоисточника q , при фиксированном Re следует ожидать, что переходы от двусвязного тела к односвязному и обратно будут происходить при разных значениях определяющего физического параметра q . Иными словами, будет наблюдаться гистерезис, как он понимается в теории катастроф [12]. В этой связи возникают интересные задачи управления процессом замораживания, поскольку из сказанного выше следует, что, добившись смыкания отдельных частей ледопородного тела, можно обеспечить достаточные условия его неразмыкания, значительно уменьшив мощность хладоисточников.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 95-01-00448).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Корнев К.Г., Мухамадуллина Г.И. О влиянии фильтрационного потока на равновесную форму тел, образующихся при искусственном замораживании // Инж.-физ. журн. 1991. Т. 61. № 6. С. 980–985.
2. Алимов М.М., Корнев К.Г., Мухамадуллина Г.И. Равновесная форма ледопородного тела, образовавшегося при обтекании жидкостью системы двух замораживающих скважин // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 5. С. 110–124.
3. Максимов В.А. Форма сожнувшихся ледопородных тел, образуемых батареями замораживающих скважин, обтекаемой подземными водами // Некоторые вопросы механики горных пород. М.: Моск. горн. ин-т, 1968. С. 100–109.
4. Рвачев В.Л. Давление на упругое полупространство штампа, имеющего в плане форму полосы // ПММ. 1956. Т. 20. Вып. 2. С. 248–254.
5. Чугунов В.А., Корнев К.Г. Динамика ледопородных ограждений при замораживании фильтрующих горных пород // Инж.-физ. журн. 1986. Т. 51. № 2. С. 305–311.
6. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функции комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.
7. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Физматгиз, 1963. 639 с.
8. Литвинчук Г.С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. М.: Наука, 1977. 448 с.
9. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.
10. Симоненко И.Б. Краевые задачи Римана и Римана–Газемана с непрерывным коэффициентом // Исследования по современным проблемам теории функции комплексного переменного. М.: Физматгиз, 1961. С. 380–389.
11. Александров Э.М., Коваленко Е.В. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука, 1986. 329 с.
12. Гилмор Р. Прикладная теория катастроф. Кн. 1. М.: Мир, 1984. 350 с.
13. Коппенфельс В., Штальман Ф. Практика конформных отображений. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 406 с.
14. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Наука, 1979. 830 с.
15. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высш. шк., 1985. 480 с.
16. Корнев К.Г., Чугунов В.А. Определение равновесной формы тел, образовавшихся при застывании фильтрационного потока // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 6. С. 991–996.
17. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. М.: Наука, 1985. 253 с.
18. Бабенко К.И. Основы численного анализа. М.: Наука, 1986. 744 с.