

УДК 532.527.031

©1997 г. Г.Г. ЧЕРНЫЙ

ПЛОСКИЕ УСТАНОВИВШИЕСЯ АВТОМОДЕЛЬНЫЕ ВИХРЕВЫЕ ТЕЧЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Установившиеся плоские потенциальные течения идеальной несжимаемой жидкости, в которых давление p зависит только от расстояния r до некоторого центра, давно и полностью изучены. Их описание является простейшим примером использования функций комплексного переменного в гидродинамике [1]. Изучены также некоторые интересные вихревые течения с таким же поведением давления [2, 3]. Однако исчерпывающий анализ вихревых течений при $p = p(r)$, несмотря на их простоту, по-видимому, ранее не производился.

Настоящая работа содержит такой анализ. Среди рассмотренных течений обнаружена, в частности, последовательность вихревых структур, инвариантных при повороте относительно центра на угол $2\pi/n$ ($n = 1, 2, \dots$); эта последовательность включает при $n = 2$ известный эллиптический вихрь Бьеркнеса [2].

1. Рассматриваются плоские установившиеся течения несжимаемой жидкости. Пусть скорость (v_r, v_φ) и отношение p/ρ зависят помимо полярных координат r, φ еще лишь от одной постоянной A с размерностью $[A] = V^m L^n$ (V – размерность скорости, L – длины). При $m \neq 0$ можно считать $[A] = VL^{-\alpha}$, при $m = 0$ $[A] = L$.

Поскольку уравнения, определяющие v_r, v_φ и p/ρ , не содержат размерных констант, то в первом случае движение необходимо будет автомодельным с полями скорости и давления вида

$$v_r = Ar^\alpha f(\varphi), \quad v_\varphi = Ar^\alpha g(\varphi), \quad p/\rho = A^2 r^{2\alpha} h(\varphi) \quad (1.1)$$

Во втором случае движение не автомодельно и должно кроме константы A характеризоваться по крайней мере еще одной постоянной с независимой размерностью.

Для определения функций f, g и h используем следующую систему уравнений:

$$v_\varphi = \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad r v_r = -\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \quad (1.2)$$

$$v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + v_\varphi \frac{\partial v_\varphi}{r \partial \varphi} + \frac{v_r v_\varphi}{r} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \quad (1.3)$$

$$\frac{v_r^2 + v_\varphi^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \frac{p_0(\psi)}{\rho} \quad (1.4)$$

Здесь ψ – функция тока, уравнение (1.3) – проекция уравнения Эйлера на окружное направление, (1.4) – интеграл Бернулли. Зависимость полного давления p_0 от ψ определяется дополнительными условиями задачи, в рассматриваемом случае – видом решения (1.1).

После подстановки (1.1) в уравнения (1.2), (1.3) находим

$$\alpha \neq -1: (\alpha + 1)f + g' = 0, \quad \psi = \frac{Ar^{\alpha+1}}{\alpha + 1} g$$

$$\alpha = -1: g = g_0, \quad \psi = A[g_0 \ln \frac{r}{r_0} + \Phi(\varphi)], \quad f = -\Phi'$$

$$[(\alpha + 1)f + g']g = -h' \tag{1.5}$$

Из формул (1.5) для f и g следует, что $h' = 0$, т.е. в течениях рассматриваемого типа давление зависит только от r

$$p = -A^2 h_0 r^{2\alpha}, \quad h_0 = \text{const} \tag{1.6}$$

После подстановки (1.1) в интеграл Бернулли (1.4) получим

$$\frac{A^2 r^{2\alpha}}{2} (f^2 + g^2 - 2h_0) = \frac{p_0(\psi)}{\rho}$$

С учетом выражений (1.5) для функции тока находим вид функции $p_0(\psi)$, совместимый с предположением (1.1) об автомодельности течения

$$\alpha \neq -1: \frac{p_0}{\rho} = \text{const } \psi^{2\alpha/(\alpha+1)}, \quad \alpha = -1: \frac{p_0}{\rho} = \text{const } \exp\left(-\frac{2\psi}{g_0 A}\right)$$

Таким образом, интеграл Бернулли приводится к одному из двух видов

$$\alpha \neq -1: f^2 + g^2 - 2h_0 = C g^{2\alpha/(\alpha+1)}, \quad (\alpha + 1)f + g' = 0 \tag{1.7}$$

$$\alpha = -1: f^2 + g_0^2 - 2h_0 = C \exp\left(\frac{2}{g_0} \int f d\varphi\right) \tag{1.8}$$

$$(C \neq 0) \quad g_0 f' = f^2 + g_0^2 - 2h_0$$

Так как в плоских установившихся течениях отличная от нуля компонента вихря ω связана с функцией $p_0(\psi)$ соотношением

$$2\omega \equiv \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} = \frac{p'_0(\psi)}{\rho} \tag{1.9}$$

то в рассматриваемых случаях должно быть

$$\alpha = 0: \omega = 0; \quad \alpha \neq 0, -1: \omega = \text{const } \psi^{(\alpha-1)/(\alpha+1)}; \quad \alpha = -1: \omega = \text{const } e^{-(2\psi/g_0)}$$

Из класса рассматриваемых автомодельных течений (1.1) выпадают течения, в которых $\omega = \text{const } \psi$ и соответственно $p_0/\rho = 1/2A\psi^2$. Это объясняется тем, что при задании таких зависимостей имеем $[A] = L^{-2}$ и, согласно сказанному ранее, течение не может быть автомодельным. В этом случае уравнение для функции тока ψ (1.9) линейно и ряд интересных неавтомодельных его решений описан ранее [2, 3].

Автомодельные движения (1.1) вместе с очевидным случаем движений по концентрическим окружностям с произвольной зависимостью $p(r)$, удовлетворяющей условию монотонности $p'(r) \geq 0$, полностью исчерпывают все движения, в которых давление зависит только от r . Действительно, при $\partial p/\partial \varphi = 0$ из уравнения (1.3) следует

$$r v_\varphi = m(\psi) \tag{1.10}$$

Отсюда с учетом (1.2) получаем $\psi = \Psi[r\Phi(\varphi)]$, после чего из уравнения (1.9) путем несложных выкладок находим, что функция Ψ может быть только степенной или логарифмической, что и доказывает сделанное утверждение.

В рассматриваемом случае соотношение (1.10) имеет вид

$$rv_\varphi = (\alpha + 1)\psi \quad (\alpha \neq -1), \quad rv_\varphi = Ag_0 \quad (\alpha = -1)$$

Это соотношение есть следствие сохранения момента количества движения частицы при ее движении вдоль линии тока и его, как и в механике точки, движущейся в центральном поле сил, можно назвать "законом площадей".

2. То, что давление в рассматриваемых течениях зависит только от расстояния r до центра, позволяет провести аналогию между этими течениями и плоскими движениями точки в центральном поле сил.

Записав в уравнении Эйлера градиент давления с учетом (1.6), получим

$$dV/dt = 2\alpha h_0 A^2 r^{2\alpha-1} r_0 \quad (2.1)$$

Уравнение (2.1) есть уравнение движения материальной точки единичной массы в центральном поле сил (притягивающих при $\alpha h_0 < 0$, отталкивающих при $\alpha h_0 > 0$) со степенной зависимостью величины силы от расстояния до центра. Линии тока соответствующего движения жидкости будут совпадать с траекториями материальной точки. Образованное этими траекториями поле скорости жидкости должно удовлетворять условию бездивергентности и быть однозначным.

Уравнение (2.1) можно трактовать и как уравнение движения жидкой среды без внутреннего давления в центральном поле сил, и как уравнение движения жидкости в плоском тонком слое в пространстве с постоянным давлением под действием центральной силы, как это, например, сделано в гидродинамической модели планетных колец [4].

Укажем еще на одну полезную аналогию. Если в интеграле Бернулли (1.7)

$$\frac{g'^2}{(\alpha + 1)^2} + g^2 - 2h_0 = Cg^{2\alpha/(\alpha+1)} \quad (2.2)$$

трактовать угол $(\alpha + 1)\varphi$ как время, а g – как линейную координату, то можно интерпретировать этот интеграл как закон сохранения полной энергии точки единичной массы в поле силы с потенциалом $U = \frac{1}{2}(g^2 - Cg^{2\alpha/(\alpha+1)})$; величина h_0 есть при этом полная энергия. При такой трактовке плоскость g, f есть фазовая плоскость движений точки; ниже траектории в этой плоскости будут использованы для анализа всех возможных движений жидкости рассматриваемого типа.

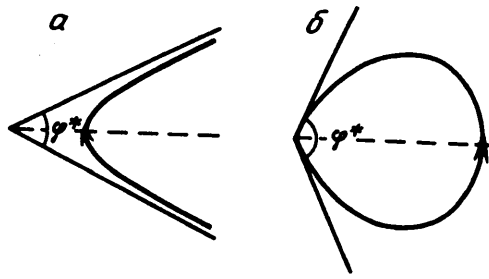
Безвихревым течениям ($C = 0$) соответствуют упругий потенциал $1/2g^2$ и движение гармонического осциллятора

$$g = \sqrt{2h_0} \sin(\alpha + 1)(\varphi - \varphi_0)$$

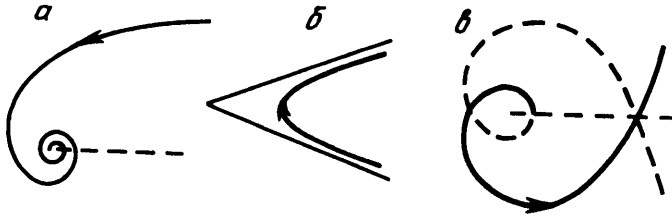
а в плоскости g, f – окружность радиуса $\sqrt{2h_0}$.

При любом $\alpha \neq -1$ безвихревое течение представляет собой течение в угловой области с углом $\varphi^* = \pi / (\alpha + 1)$ при вершине, периодически повторяющееся при росте φ со сменой знака g . При $-1 < \alpha < \infty$ линии тока такого течения имеют вид, изображенный на фиг. 1, а, причем при $\alpha < -1/2$ угол $\varphi^* > 2\pi$, так что течение внутри одной угловой области становится неоднолиственным. При $-\infty < \alpha < -1$ линии тока течения представлены на фиг. 1, б; при $\alpha > -3/2$ течение тоже неоднолистно. Каждому α соответствует, следовательно, одно значение угла φ^* , а каждому φ^* – пара значений α ($\alpha_1 + \alpha_2 = -2$). Значению $\alpha = -1$ соответствует вихреисточник (в частных случаях – источник и "потенциальный вихрь"). Этим исчерпывается многообразие безвихревых течений при $p = p(r)$.

3. В более сложном случае вихревых течений ($C \neq 0$) уравнение (2.2) можно разре-



Фиг. 1. Линии тока потенциальных течений при $\alpha \neq -1$: $a - 1 < \alpha < \infty$, $b - \infty < \alpha < -1$



Фиг. 2. Линии тока вихревых течений при $\alpha = -1$: $a - g_0^2 - 2h_0 = 0$, $b - g_0^2 - 2h_0 > 0$, $c - g_0^2 - 2h_0 < 0$

шить в квадратурах

$$(\alpha + 1)\varphi = \pm \int \frac{dg}{\sqrt{R(g)}}, \quad R(g) = Cg^m - g^2 + 2h_0, \quad m = \frac{2\alpha}{\alpha + 1} \quad (3.1)$$

Учитывая, что интеграл в этом решении выражается через элементарные функции лишь при исключительных значениях входящих в $R(g)$ параметров, удобно для анализа решений пользоваться фазовой плоскостью $g, f = -g'/(\alpha + 1)$, где рассматриваемым течениям соответствуют кривые $f = \pm \sqrt{R(g)}$. Вид этих кривых существенно зависит от α — именно от того, какому из трех диапазонов принадлежит величина m : $-\infty < m < 0$ ($-1 < \alpha < 0$), $0 < m < 2$ ($0 < \alpha < \infty$), $2 < m < \infty$ ($-\infty < \alpha < -1$). Граничные значения $m = 2, 0, \pm\infty$ особые. При $m = 2$ ($\alpha = \pm\infty$) течение не может быть автомодельным и, таким образом, не принадлежит к рассматриваемому классу. При $m = 0$ ($\alpha = 0$) течение потенциально и, так как, согласно (2.2) и (1.5), $g = \sqrt{2h_0 + C} \sin(\varphi - \varphi_0)$, $\psi = Arg g$, представляет собой поступательный однородный поток (линии тока $r \sin(\varphi - \varphi_0) = \text{const}$ — параллельные прямые). Особый случай $m = \pm\infty$ ($\alpha = -1$) рассмотрим отдельно.

В этом случае, согласно (1.5), $g = g_0 = \text{const}$. При $g_0^2 - 2h_0 = 0$ уравнение (1.8) имеет решение $f = -g_0'(\varphi - \varphi_0)$, которому соответствует вихревое течение от вихреисточника на бесконечнолистной плоскости с подобными спиральными линиями тока $r(\varphi - \varphi_0) = r_0 \exp(\psi/Ag_0)$, одна из которых ($\varphi_0 = 0$) изображена на фиг. 2, а. Естественно, что его следует рассматривать лишь в областях, лежащих внутри угла, не превосходящего 2π .

При $g_0^2 - 2h_0 = \beta^2 > 0$ решения уравнения (1.8) для f и согласно (1.5), для ψ имеют вид

$$f = \beta \operatorname{tg} \frac{\beta}{g_0} (\varphi - \varphi_0), \quad \psi = Ag_0 \ln \left[r \cos \frac{\beta}{g_0} (\varphi - \varphi_0) \right]$$

Эти выражения описывают вихревые течения в угловой области с углом раскрытия $\varphi^* = \pi g_0 / \beta$ ($0 < \varphi^* < \infty$) с подобными линиями тока

$$r \cos \frac{\beta}{g_0} (\varphi - \varphi_0) = r_0 \exp \frac{\psi}{A g_0}$$

Линия тока $\varphi_0 = 0$ изображена на фиг. 2, б. Скорость вдоль граничных лучей в этих течениях равна бесконечности, функция тока также стремится логарифмически к бесконечности при приближении к граничной линии тока. При $3g_0^2 - 8h_0 = 0$ угол $\varphi^* = 2\pi$ и решение описывает течение около полубесконечной пластины с особенностью типа диполя на ее кромке.

При $g_0^2 - 2h_0 = -\beta^2 > 0$ решения уравнения (1.8) для f и, следовательно, для ψ таковы

$$f = \beta \operatorname{th} \frac{\beta}{g_0} (\varphi - \varphi_0), \quad \psi = A g_0 \ln \frac{r}{\operatorname{ch}(\beta / g_0)(\varphi - \varphi_0)}$$

Эти формулы описывают завихренное течение с линиями тока в виде двойных спиралей, одна из которых изображена на фиг. 2, в. Такое течение можно рассматривать лишь в областях, лежащих внутри угла, меньшего 2π .

4. Приступим теперь к последовательному анализу течений в указанных выше трех диапазонах значений параметра m . В уравнение (2.2) кроме m входят еще две определяющие величины: h_0 и C . Введением соответствующего масштаба для g исключим h_0 , заметив при этом, что в случае потенциальных течений всегда $h_0 > 0$, в общем же случае вихревых течений h_0 может принимать и отрицательные значения.

Полагая $g = |2h_0|g_1$, $f = |2h_0|f_1$, $C = |2h_0|^{1/(\alpha+1)}C_1$ и пользуясь для новых величин прежними обозначениями, приведем уравнение (2.2) к виду

$$f^2 = C g^m - g^2 \pm 1, \quad (\alpha + 1)f + g' = 0$$

Здесь знак плюс – при $h_0 > 0$, минус – при $h_0 < 0$.

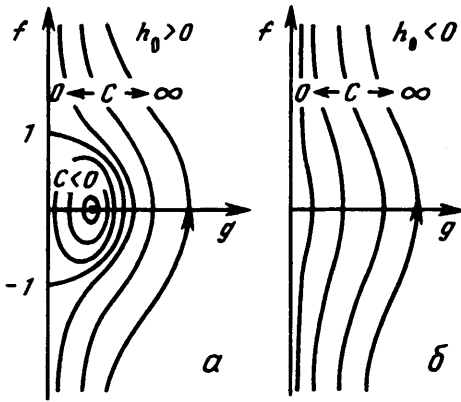
Таким образом, каждому значению α соответствуют два однопараметрических семейства течений; одно из них включает при $C = 0$ известное потенциальное течение.

Начнем анализ этих течений с диапазона $-\infty < m < 0$ ($-1 < \alpha < 0$). Качественно фазовые кривые $C = \text{const}$ представлены при $h_0 > 0$ на фиг. 3, а и при $h_0 < 0$ на фиг. 3, б. Стрелками на кривых показано направление роста φ . Приведена лишь правая половина фазовой плоскости, так как кривые в левой половине расположены симметрично и описывают те же движения, но с противоположным знаком g . При $C = 0$ потенциальное течение происходит в угловой области с углом $\varphi^* = \pi / (\alpha + 1)$. Этому течению соответствует полуокружность $f^2 + g^2 = 1$ на фиг. 3, а.

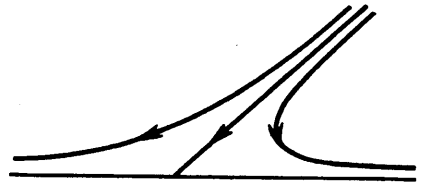
При росте C от 0 до ∞ (фиг. 3, а) вихревое течение происходит в угловой области с углом, уменьшающимся от $\pi / (\alpha + 1)$ при $C = 0$ до π при $C \rightarrow \infty$. Радиальная скорость на граничных лучах равна в этих течениях бесконечности, давление при приближении к угловой точке стремится к $-\infty$. Так как при $\alpha < 1/2$ потенциальное течение ($C = 0$) неоднолистно, то и вихревое течение при достаточно малых C тоже будет в этих случаях неоднолистным.

Кривым $C = \text{const}$ при $h_0 < 0$ (фиг. 3, б) соответствуют течения в угловых областях, но с углом, меняющимся от 0 ($C = 0$) до π ($C \rightarrow \infty$). Радиальная скорость на граничных лучах в этих течениях по-прежнему бесконечна, но давление в угловой точке неограниченно велико.

Таким образом, при каждом α из рассматриваемого диапазона существует семейство вихревых течений в угловых областях с любым углом раскрытия φ^* в диапазоне $0 < \varphi^* < \pi / (\alpha + 1)$.



Фиг. 3. Фазовые кривые вихревых течений при $-1 < \alpha < 0$: а - $h_0 > 0$, б - $h_0 < 0$



Фиг. 4. Пример комбинированного вихревого течения

Меняя величину A , можно при разных C и, следовательно, разных φ^* иметь течения в разных угловых областях с одинаковой зависимостью давления от r , что невозможно в случае потенциальных течений. Комбинируя такие течения, можно получать несимметричные вихревые течения, подобные изображенному на фиг. 4, которое можно трактовать как натекание на плоскость струи под произвольным углом.

Как следует из фиг. 3, при $h_0 > 0$ и $C^* < C < 0$ (C^* будет определено ниже) возможны и другие движения жидкости с периодическим обращением частиц вокруг центра. Такие движения в целом будут иметь физический смысл, если период изменения g и f по φ равен 2π или целой доле этой величины. В остальных случаях движения жидкости будут происходить на неоднolistной плоскости и могут рассматриваться лишь на соответствующих ее частях.

Проследим за зависимостью периода от C . Так как во всем диапазоне значений C аналитически это сделать затруднительно, ограничимся определением периода лишь вблизи предельных значений $C = 0$ и $C = C^*$.

При C , близких к нулю, изменение угла φ при обходе замкнутой кривой в фазовой плоскости близко к $\pi/(\alpha + 1)$. При C , близких к C^* , т.е. к значению C , ограничивающему область существования периодических решений, функцию $R(g)$ (см. (3.1)) можно представить в виде

$$R(g) = R(g_0) - k(g - g_0)^2$$

$$g_0^{2/(\alpha+1)} = \frac{mC}{2}, \quad k = \frac{2}{\alpha+1}, \quad R(g_0) = \frac{1}{\alpha} g_0^2 + 2h_0$$

Здесь g_0 — нуль функции $R'(g)$.

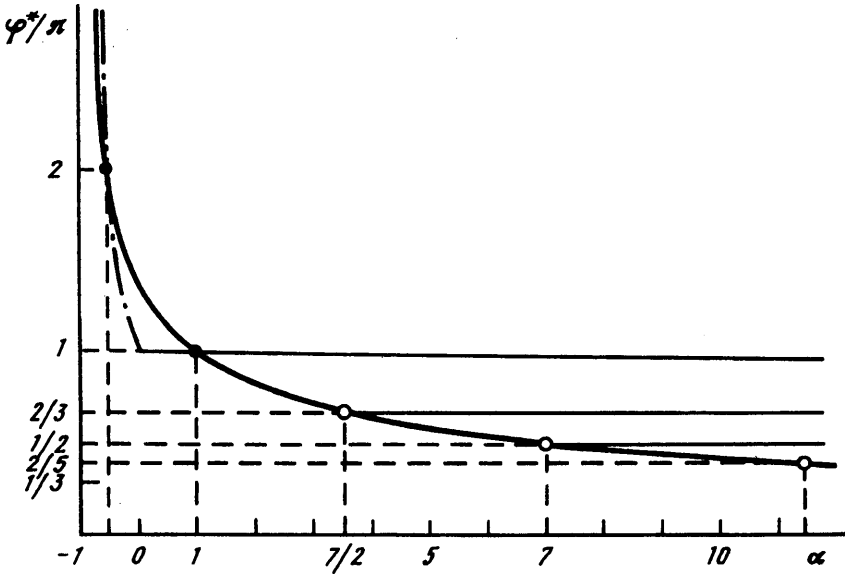
Нули самой функции $R(g)$ определяются выражением $g_{\pm} = g_0 \pm \left[\frac{1}{2}(1 + 1/\alpha)(g_0 + 2\alpha h_0) \right]^{1/2}$, откуда следует, что

$$C^* = \frac{\alpha+1}{\alpha} (-2\alpha h_0)^{1/(\alpha+1)}, \quad g^* = \sqrt{-2\alpha h_0}$$

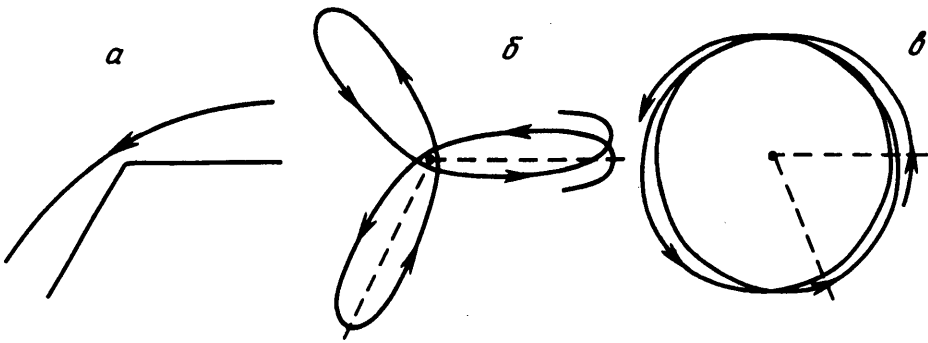
Таким образом, при C , близком к C^* , из (3.1) имеем

$$g - g_0 = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(\alpha+1)R(g_0)} \sin \sqrt{2(\alpha+1)}(\varphi - \varphi_0)$$

Следовательно, период изменения g по φ при C , близких к C^* , $\varphi^* = \sqrt{2/(\alpha+1)}\pi$ и не зависит от C .



Фиг. 5. Периодические течения. Зависимость периода от α



Фиг. 6. Линии тока течения при $\alpha = -1/4$: а – потенциальное течение, б – течение со слабой завихренностью, в – течение с завихренностью, близкой к предельной

На фиг. 5 приведены зависимости φ^* от α при $C \rightarrow 0$ (штрихпунктирная линия) и при $C \rightarrow C^*$ (сплошная линия). Предполагая монотонное изменение периода при изменении C от нуля до C^* , из фиг. 5 находим, что период растет при $-1/2 < \alpha < 0$ и убывает при $-1 < \alpha < -1/2$. Ни для одного значения α , кроме $\alpha = -1/2$, период не равен 2π и не составляет целочисленную часть этой величины. Отсюда следует, что при $\alpha \neq -1/2$ линии тока могут быть замкнутыми лишь на многолистной плоскости или вообще не замыкаются, если изменение угла φ при однократном обходе замкнутой фазовой траектории несоизмеримо с 2π . Любое такое течение можно рассматривать на всей плоскости с разрезом вдоль луча $\varphi = \text{const}$, на котором расположены источники массы и импульса с интенсивностью, меняющейся вдоль луча по степенному закону.

Для примера на фиг. 6 приведены линии тока течения при $\alpha = -1/4$ для $C = 0$ – потенциальное обтекание угла $4\pi/3$ (а), для C , близкого к нулю, – частицы движутся по вытянутым траекториям $r = r(\varphi)$ с периодом по φ , несколько большим $4\pi/3$ (б), и при C , близком к $C^* = 0,4725$, – частицы движутся по почти круговым траекториям, период изменения расстояния по углу близок к $\sqrt{8/3}\pi$ (в). Расстояние r линии тока от

центра связано с величиной g соотношением $r^{\alpha+1}g = \text{const}$, так что при рассматриваемых α максимуму g соответствует минимум r и наоборот.

При всех α при $C \rightarrow 0$ отношение наибольшего значения r на линии тока к наименьшему неограниченно возрастает, а при $C \rightarrow C^*$ оно стремится к единице, при этом линии тока стремятся к концентрическим окружностям.

Согласно упоминавшейся ранее аналогии, в рассматриваемом диапазоне $-1 < \alpha < 0$ течениям с $h_0 > 0$ соответствует центральная сила притяжения, а течениям с $h_0 < 0$ – сила отталкивания.

5. Обратимся теперь к течениям при $\alpha = 1/2$. Этот случай исключителен тем, что период изменения g по φ на всех замкнутых траекториях в фазовой плоскости, т.е. при всех C , равен 2π .

При $\alpha = -1/2$ центральная сила в уравнении (2.1) имеет вид $-h_0 A^2 \Gamma_0 / r^2$, т.е. при $h_0 > 0$ ее можно трактовать как ньютонову или кулонову силу притяжения, а при $h_0 < 0$ как кулонову силу отталкивания. Константа A^2 имеет в этом случае размерность $V^2 L$ – ту же, что и размерность объемного импульса. Это позволяет, как будет видно из дальнейшего, характеризовать некоторые из течений рассматриваемого вида величиной приложенной к ним конечной силы (импульса в единицу времени).

При $\alpha = -1/2$ согласно (1.5) и (2.2), имеем

$$\psi = 2Ar^{1/2}g, \quad f = -2g' \quad (5.1)$$

$$4g'^2 + g^2 - 2h_0 = \frac{C}{g^2} \quad (5.2)$$

При этом безразмерная константа C входит в выражения для p_0/ρ и ω следующим образом:

$$\frac{p_0}{\rho} = 2CA^4\psi^{-2}, \quad \omega = -2CA^4\psi^{-3} \quad (5.3)$$

Уравнение (5.2) имеет простое аналитическое решение

$$g = \pm \sqrt{a \cos(\varphi - \varphi_0) + h_0}, \quad a^2 - h_0^2 = C$$

Здесь φ_0 – константа интегрирования.

Не ограничивая общности, положим $\varphi_0 = 0$, $a = 1$ (изменение знака a равносильно повороту потока на угол $\pm\pi$, а численное значение a может быть включено в константу A), выберем перед корнем знак плюс и примем, что область течения включает луч $\varphi = 0$. Для выполнения последнего условия должно быть соблюдено неравенство $h_0 > -1$. Итак

$$g = \sqrt{\cos \varphi + h_0}, \quad f = \frac{\sin \varphi}{\sqrt{\cos \varphi + h_0}} \quad (5.4)$$

Кроме параметра A , зависимость от которого определена формулами (1.1), решение зависит только от безразмерного параметра h_0 . Проследим за эволюцией течения при изменении этого параметра во всем диапазоне его значений $-1 < h_0 < \infty$.

При $-1 < h_0 < 1$ решение описывает течения в угловых областях с углом раскрытия $2\varphi^*$, определяемым равенством $\cos \varphi^* = -h_0$. Это те течения, которым на фиг. 3 соответствуют кривые при $C > 0$. Угол раскрытия увеличивается от 0 при $h_0 = -1$ до 2π при $h_0 = 1$.

На граничных лучах $\varphi = \pm\varphi^*$ функция тока и окружная скорость равны нулю, а радиальная скорость и полное давление – бесконечности. При $h_0 < 0$ течение происходит внутри угла $2\varphi^* < \pi$; давление увеличивается по направлению к центру, неограниченно возрастая при $r \rightarrow 0$.

При $h_0 = 0$ течение является изобарическим и происходит в полуплоскости $x \geq 0$ (x – декартова координата в направлении луча $\varphi = 0$) вдоль линий $x = \text{const}$ с распределениями скорости и полного давления по закону

$$V = Ax^{-1/2}, \quad \frac{p_0}{\rho} = \frac{A^2}{2x} = \frac{2A^4}{\psi^2}$$

При $0 < h_0 < 1$ течение представляет собой обтекание выпуклого угла; давление убывает по направлению к центру, стремясь при $r \rightarrow 0$ к $-\infty$.

При $h_0 = 1$ (угол $\varphi^* = \pi$) течение происходит во всей плоскости и представляет собой хорошо известное потенциальное обтекание пластины (константа $C = 1 - h_0^2$ в формуле (5.3) для вихря равна нулю). Функции f и g , согласно (5.4), имеют вид

$$f = \sqrt{2} \sin \varphi / 2, \quad g = \sqrt{2} \cos \varphi / 2$$

Значения радиальной скорости с обеих сторон пластины конечны и противоположны по знаку. При таком обтекании пластины к жидкости в точке $r = 0$ приложена в направлении пластины сосредоточенная сила $X = -2\pi r A^2$; соответственно к пластине в ее передней кромке приложена сосредоточенная, так называемая "подсасывающая", сила $-X = 2\pi r A^2$, играющая важную роль в теории потенциального обтекания тонкого крыла [5]. О возможности появления в решении конечной сосредоточенной силы говорилось выше.

При $-1 < \alpha < 0$ течения в угловых областях с углом раскрытия, меньшим 2π , при $\alpha < -1/2$ приводят к появлению в точке $r = 0$ действующей на жидкость бесконечной силы вдоль средней линии течения в сторону роста x при течении внутри угла и в обратную сторону – при внешнем обтекании угла. При $\alpha > -1/2$ сила в угловой точке равна нулю.

Значениям $h_0 > 1$ соответствуют наиболее интересные вихревые течения во всей плоскости, в которых частицы жидкости движутся по замкнутым траекториям – подобным эллипсам с общим правым фокусом в точке $r = 0$. Эллипсы все более вытянуты влево при $h_0 \rightarrow 1$ и все более близки к окружности при $h_0 \rightarrow \infty$.

Рассмотрим для произвольного h_0 в диапазоне $h_0 > -1$ уравнение линий тока, которое, согласно (5.1) и (5.4), в декартовой системе координат $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ имеет вид

$$x + h_0 \sqrt{x^2 + y^2} = \left(\frac{\Psi}{2A} \right)^2$$

Случай $h_0 = 0$ уже был рассмотрен ранее. Избавляясь от радикала, получим

$$(h_0^2 - 1)x^2 + h_0^2 y^2 = \left(\frac{\Psi}{2A} \right)^4 - 2 \left(\frac{\Psi}{2A} \right)^2 x$$

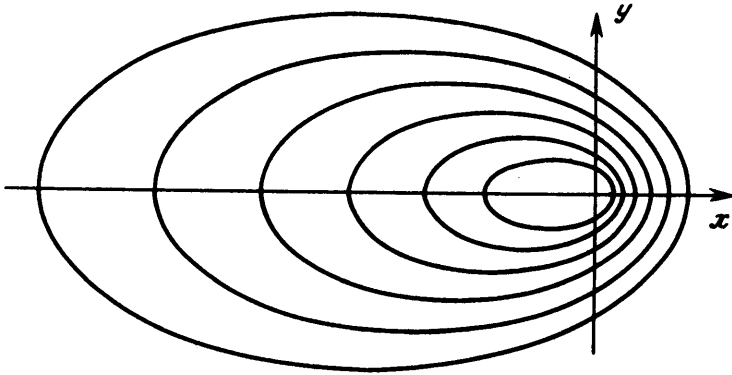
При $h_0 = 1$, т.е. при обтекании пластины, линии тока являются параболоми. При $|h_0| < 1$ линии тока – гиперболы (каждая линия тока имеет собственные асимптоты, параллельные граничным лучам); при $h_0 > 1$ линии тока – эллипсы с центром в точке

$$x_0 = - \left(\frac{\Psi}{2A} \right)^2 \frac{1}{h_0^2 - 1}$$

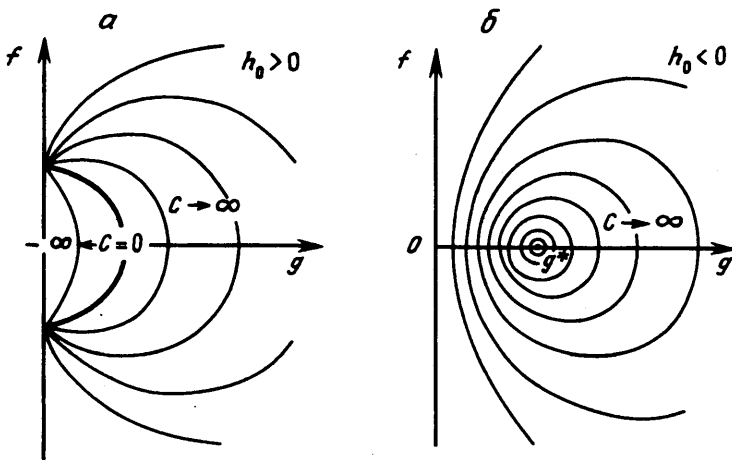
и с правым фокусом в точке $r = 0$.

На фиг. 7 приведен пример картины линий тока циркуляционного течения ($h_0 = 1,4$). В таких течениях в точке $r = 0$ к жидкости приложена сосредоточенная сила

$$X = 2\pi r A^2 h_0 \left(-h_0 + \sqrt{h_0^2 - 1} \right)$$



Фиг. 7. Пример несимметричного эллиптического вихря при $\alpha = -1/2$ (линии тока – кеплеровы траектории)



Фиг. 8. Фазовые кривые вихревых течений при $0 < \alpha < \infty$:
 $a - h_0 > 0, б - h_0 < 0$

Такая же по величине, но обратная по знаку сила (результатирующая сил давления) действует извне на любой эллиптический контур $\psi = \text{const}$ со стороны циркулирующей вокруг него жидкости. При $h_0 = 1$, т.е. в случае обтекания пластины, получаем уже упоминавшееся выражение $X = -2\pi\rho A^2$. При $h_0 \rightarrow \infty$, когда эллиптический контур стремится к окружности, получим, фиксируя при предельном переходе величину $A^2|h_0|$ (для того чтобы скорость u_φ и давление в каждой точке плоскости оставались конечными), что сила X уменьшается, стремясь к нулю как $|h_0|^{-1}$.

Возвращаясь к аналогии с движением материальной точки в центральном поле сил, можно считать, что при $h_0 > 0$ циркуляционные движения жидкости по эллиптическим траекториям и по гиперболическим траекториям при внешнем обтекании угла, большего π (а также и разделяющий их случай параболических траекторий), соответствуют кеплеровым движениям точки в поле ньютоновых сил тяготения (или кулоновых сил притяжения), а при $-1 < h_0 < 0$ движения по гиперболическим траекториям внутри угла, меньшего π , соответствуют движениям точки в поле кулоновых сил отталкивания.

6. Перейдем теперь к изучению течений, соответствующих диапазону $0 < m < 2$ ($0 < \alpha < \infty$). Кривые $C = \text{const}$ в фазовой плоскости изображены при $h_0 > 0$ на фиг. 8,а и $h_0 < 0$ – на фиг. 8,б. При $h_0 > 0$ кривые ведут себя по-разному вблизи точек $g = 0$, $f = \pm 1$ при $0 < m < 1$, $m = 1$ и $1 < m < 2$ (соответственно при $0 < \alpha < 1$, $\alpha = 1$, $\alpha > 1$). Фигура 8,а относится к случаю $m = 1$. Потенциальному течению на фиг. 8,а соответствует полуокружность $f^2 + g^2 = 1$, $C = 0$, но в отличие от предыдущего это течение происходит внутри угловой области с углом $\varphi^* = \pi/(\alpha + 1)$, меньшим π .

Вихревые течения при $h_0 > 0$ происходят, подобно предыдущему случаю, внутри угловых областей с углом, меняющимся от 0 при $C \rightarrow -\infty$ до π при $C \rightarrow \infty$. Продольная скорость на границах угловой области в этих течениях конечна, как и при потенциальном течении.

При $h_0 < 0$ фазовые траектории – замкнутые кривые, так что соответствующие движения частиц представляют собой периодические обращения вокруг центра. Изучим зависимость периода этого обращения от C в диапазоне $C^* < C < \infty$, ограничиваясь, как и в предыдущем случае, окрестностью предельных значений $C = C^*$ и $C = \infty$.

Для C , близких к C^* , рассуждения, приведенные ранее для случая $-\infty < m < 0$, $h_0 > 0$, $C < 0$, остаются в силе, так что и в рассматриваемом случае значение периода при $C \rightarrow C^*$ равно $\sqrt{2/(\alpha+1)} \cdot \pi$. Для выяснения предельного поведения решений уравнения (2.2) при $C \rightarrow \infty$ положим $g = C^{1/(2-m)} g^*$. Выбор такого масштаба для g сделан для того, чтобы значению $g = g_+$ – большему из двух корней $R(g) = 0$ соответственно при $C \rightarrow \infty$ значение $g^* = 1$.

После введения новой величины получим уравнение (звездочки у g опущены)

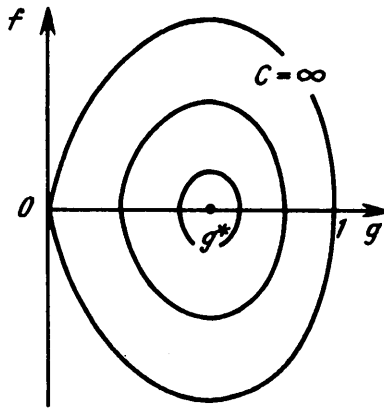
$$\frac{g'^2}{(\alpha+1)^2} = g^m - g^2 + \beta, \quad \beta = \frac{2h_0}{C^{\alpha+1}} \quad (6.1)$$

На фазовой плоскости уравнению (6.1) при $\beta = 0$, т.е. при $C \rightarrow \infty$, соответствует (фиг. 9) замкнутая кривая $f^2 = g^m - g^2$ (окружность при $m = 1$), проходящая через точки $f = 0$, $g = 0$ и $f = 0$, $g = 1$; кривые при $\beta < 0$ лежат внутри нее. Направление роста φ показано стрелками.

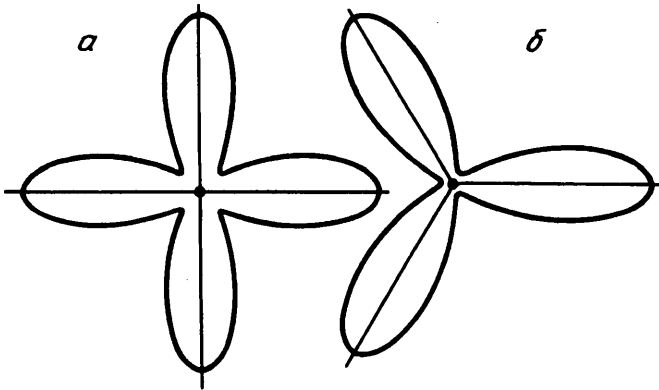
При $\beta = 0$ уравнение (6.1) имеет решение $g = \cos^{\alpha+1} \varphi$, которому соответствует линия тока из двух параллельных полупрямых, замыкаемых в бесконечности. При обходе соответствующей кривой в фазовой плоскости угол φ меняется на величину π . Отсюда следует, что при $C \rightarrow \infty$ период изменения функции g по φ стремится к π . Можно показать, что, как и при $C \rightarrow C^*$, при $C \rightarrow \infty$ период асимптотически перестает зависеть от C .

Обратимся вновь к фиг. 5, на которой (теперь для $\alpha > 0$) приведены предельные значения периода при $C \rightarrow C^*$ и $C \rightarrow \infty$. При всех α , отличных от $\alpha = 1$, период с ростом C изменяется: уменьшается при $0 < \alpha < 1$ и растет при $\alpha > 1$. Значение $\alpha = 1$ является исключительным – при таком α период не зависит от C и равен π , т.е. целой доле 2π (ситуация аналогична случаю $\alpha = -1/2$ в диапазоне $-1 < \alpha < 0$).

В отличие от предыдущего в рассматриваемом диапазоне значений α и при $\alpha \neq 1$ возможны течения с замкнутыми в физической плоскости линиями тока. Действительно, при превышении величиной α значений $\alpha = \frac{1}{2}n^2 - 1$ ($n = 3, 4, \dots$) в интервал изменения периода последовательно попадают числа, составляющие целую часть 2π : $2\pi/3$, $\pi/2$ и т.д. Таким образом, в интервалах $\frac{1}{2}n^2 - 1 < \alpha < \frac{1}{2}(n+1)^2 - 1$ существуют $n - 2$ циркуляционных вихревых течения с замкнутыми линиями тока, инвариантными относительно поворота вокруг центра на угол $2\pi/k$ ($k = n, \dots, 3$) каждое при определенном значении C . На фиг. 5 этим течениям соответствуют точки горизонтальных



Фиг. 9. Фазовые кривые при $0 < \alpha < \infty, h_0 < 0$ в преобразованных переменных



Фиг. 10. Пример "многолепестковых" вихрей: линии тока вихревых течений при $\alpha = 9; a - \beta = -9,3 \cdot 10^{-3}, b - \beta = -3,5 \cdot 10^{-5}$

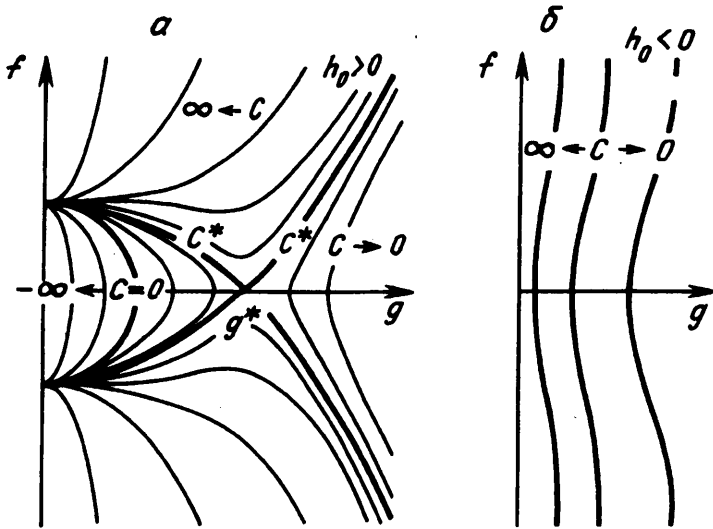
полупрямых, идущих от точек нижней границы значений периода, соответствующих $\alpha = \frac{1}{2}n^2 - 1$.

На фиг. 10 в качестве примера приведены циркуляционные течения при $\alpha = 9$, когда таких течений два: одно с периодом изменения расстояния r линии тока от центра, равным $\pi/2$, другое – с периодом, равным $2\pi/3$. Представлены линии тока обоих течений (в рассматриваемом примере $0 \geq \beta \geq \beta^* = -0,03874$).

Значению $n = 1$ ($\alpha = \frac{1}{2}n^2 - 1 = -\frac{1}{2}$) соответствует описанное ранее вихревое циркуляционное течение с линиями тока в виде софокусных эллипсов с периодом изменения r , равным 2π при всех C . При $n = 2$ ($\alpha = 1$) будем иметь циркуляционное движение с постоянной завихренностью и с периодом, равным π при всех C , описываемое ниже.

При $\alpha = 1$ ($m = 1$) уравнение (2.2) имеет вид

$$\frac{1}{4}g'^2 + g^2 - 2h_0 = Cg \quad (6.2)$$



Фиг. 11. Фазовые кривые вихревых течений при $-\infty < \alpha < -1$:
 $a - h_0 > 0, \delta - h_0 < 0$

Траектории в фазовой плоскости являются окружностями, а решением уравнения (6.2)

$$f^2 + (g - \frac{1}{2}C^2)^2 = \frac{1}{4}C^2 + 2h_0$$

будет

$$g = \frac{1}{2}C \pm \sqrt{\frac{1}{4}C^2 + 2h_0} \sin 2(\varphi - \varphi_0), \quad f = \mp \sqrt{\frac{1}{4}C^2 + 2h_0} \cos 2(\varphi - \varphi_0)$$

Это решение и соответствующее ему течение описаны в классической литературе [2].

При $h_0 > 0$ решение существует для всех C и в соответствии с приведенным выше общим анализом описывает течения внутри угла φ^* во всем диапазоне значений $0 < \varphi^* < \pi$: $\varphi^* = 0$ при $C \rightarrow -\infty$, $\varphi^* = \pi/2$ при $C = 0$, $\varphi^* = \pi$ при $C \rightarrow \infty$. Линии тока при этом – гиперболы.

При $h_0 < 0$ решение существует лишь при $C^2 \geq -8h_0$. Линии тока – подобные эллипсы с произвольным отношением осей, симметрично расположенные относительно начала координат. В литературе это циркуляционное течение известно как вихрь Бьеркнеса.

7. Рассмотрим диапазон значений $2 < m < \infty$ ($\alpha < -1$). Фазовые кривые соответствующих течений представлены при $h_0 > 0$ на фиг. 11,а и $h_0 < 0$ на фиг. 11,б.

Кривым при $h_0 < 0$ (центральная сила – отталкивающая) соответствуют течения внутри угловой области с углом φ^* , меняющимся от 0 ($C \rightarrow \infty$) до π ($C \rightarrow 0$).

В самом деле, пользуясь вновь уравнением в форме (6.1), находим, что при $C \rightarrow 0$ решение стремится к предельному $g = \cos^{\alpha+1} \varphi$ так, что $\varphi^* \rightarrow \pi$.

При $C \rightarrow \infty$ преобразуем уравнение (2.2), полагая

$$g = g_+ g_1, \quad \varphi = \frac{g_+}{|2h_0|^{1/2} |\alpha + 1|} \varphi_1, \quad g_+ = \left(\frac{|2h_0|}{C} \right)^{1/m}$$

В результате получим

$$\left(\frac{dg_1}{d\varphi_1} \right)^2 = g_1^m - 1 - \frac{|2h_0|^{1/\alpha}}{C^{2/m}}$$

Это уравнение при $C = \infty$ имеет решение, которое в исходных переменных запишем в виде

$$\varphi = \frac{g_+}{|2h_0|^{1/2}|\alpha+1|} \int_1^{g/g_+} \frac{d\eta}{\sqrt{\eta^m-1}}$$

Интеграл в правой части при $m > 2$ остается конечным при $g \rightarrow \infty$, так что при $C \rightarrow \infty$

$$\varphi^* \rightarrow \frac{2}{|\alpha+1|} \frac{|2h_0|^{1/\alpha}}{C^{1/m}} \int_1^\infty \frac{d\eta}{\sqrt{\eta^m-1}}$$

При приближении к граничным лучам функция тока и полное давление неограниченно растут; то же происходит и со значениями g и f .

При $h_0 > 0$ (центральная сила – притягивающая) возможны течения различных типов (фиг. 11,а).

При $C = 0$ в этом случае имеем потенциальные течения в угловой области с особенностью в вершине угла типа диполя (на фиг. 1,б): при $\alpha < -2$ – течение внутри угла, меньшего π , при $\alpha = -2$ – обычный диполь, при $\alpha > -2$ – течение вне выпуклого угла в области с угловым размером $\varphi^* > \pi$.

В случае вихревых течений при фиксированном значении α с уменьшением C от нуля в сторону отрицательных значений угол φ^* уменьшается и стремится к нулю при $C \rightarrow -\infty$ (кривые на фиг. 11,а внутри полуокружности $C = 0$). При росте C от нуля каждому значению $C < C^*$ (C^* – значение C , соответствующее сепаратрисе, проходящей через седловую точку на фиг. 11,а) соответствуют две кривые: одна между полуокружностью $C = 0$ и сепаратрисой, вторая – справа от сепаратрисы.

Первой кривой соответствует течение в угловой области с углом φ^* большим, чем при $C = 0$; угол φ^* неограниченно растет при $C \rightarrow C^*$, радиальная скорость на граничных лучах в этих течениях конечна. Второй кривой соответствует течение, подобное тем, что и при $h_0 < 0$, но с φ^* , меняющимся от π ($C \rightarrow 0$) до ∞ ($C \rightarrow C^*$); в этих течениях радиальная скорость на граничных лучах бесконечна.

Кривым при $C > C^*$ соответствуют течения со спиралевидными линиями тока, одна из которых изображена на фиг. 12,а.

При $C = C^*$ линии тока представляют собой спиралевидные кривые, наматывающиеся с ростом φ на окружность фиксированного радиуса снаружи (или изнутри) при подходе к седловой точке со стороны больших (или меньших) g (фиг. 12,б).

Для случая $\alpha = -2$ ($m = 4$) (в потенциальном течении этому соответствует диполь) уравнение сепаратрисы и соответствующее уравнение линии тока можно выписать в явном виде. Действительно, в этом случае при $8Ch_0 = 1$ уравнение для g и его решение имеют вид

$$g'^2 = \frac{1}{8h_0}(g^2 - 4h_0)^2, \quad g = \pm\sqrt{4h_0} \operatorname{th} \frac{\varphi}{\sqrt{2}}, \quad g = \pm\sqrt{4h_0} \operatorname{cth} \frac{\varphi}{\sqrt{2}}$$

Первое соответствует навиванию на окружность изнутри, второе – снаружи.

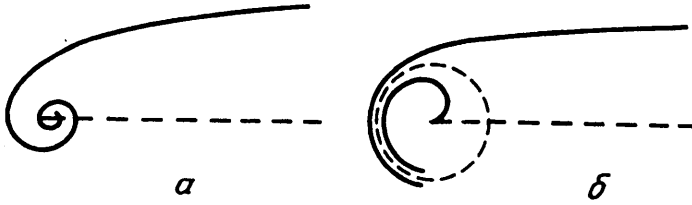
Аналогично можно получить в простой форме и решение, соответствующее сепаратрисе, при $\alpha = -3$ ($m = 3$).

$$g = \frac{1}{C^*} \left(\operatorname{th}^2 \varphi - \frac{1}{3} \right) \quad (g < g^*), \quad g = \frac{1}{C^*} \left(\operatorname{cth}^2 \varphi - \frac{1}{3} \right) \quad (g > g^*)$$

$$g^* = \frac{2}{3C^*}, \quad C^{*-1} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \sqrt{2h_0}$$

Это решение обладает теми же свойствами, что и в предыдущем случае.

Несложно аналитически исследовать поведение течений при C , близких к нулю.



Фиг. 12. Линии тока при $-\infty < \alpha < -1$, $h_0 > 0$: $a - C > C^*$, $b - C = C^*$

Так, для диполя с $\varphi^* = \pi$ ($\alpha = -2$) представим решение уравнения (2.2), в котором для простоты принято $2h_0 = 1$, в виде $g = \sin \varphi + C\varepsilon$, $\varepsilon \ll 1$. В линейном приближении получим

$$\varepsilon = A_1 \cos \varphi + \frac{1}{2} \sin^3 \varphi + \frac{3}{4} \sin \varphi \cos^2 \varphi + \frac{3}{4} \cos \varphi$$

Полагая $g = 0$ при $\varphi = 0$, найдем, в частности, угол φ^* , при котором $g = 0$: $\varphi^* = \pi + \frac{3}{4}\pi C$. Этот результат соответствует общим рассуждениям о зависимости φ^* от C .

Заключение. Рассмотрены установившиеся плоские вихревые течения идеальной несжимаемой жидкости с давлением p , зависящим только от расстояния r до некоторого центра: $p = p(r)$. Отмечена аналогия этих течений с движением в поле центральной силы с потенциалом $p(r)$ материальной точки и тонкого слоя сплошной среды.

Показано, что, кроме тривиального случая движений по концентрическим окружностям при любой зависимости $p = p(r)$, $p'(r) \geq 0$, возможные движения жидкости с $p = p(r)$ исчерпываются автомодельным случаем $p \sim r^{2\alpha}$ (α – произвольное число). Изучены все такие движения. Установлено, в частности, что каждому значению α соответствуют вихревые течения в угловых областях с произвольным углом раскрытия φ^* (для потенциальных течений $\varphi^* = \pi/|\alpha + 1|$, $\alpha \neq -1$).

Обнаружено, что существуют вихревые циркуляционные течения с подобными замкнутыми линиями тока, инвариантными относительно поворота на угол $2\pi/n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). Эти течения осуществляются при $\alpha \geq \frac{1}{2}n^2 - 1$ (равенство при $n = 1, 2$, неравенство при всех ббльших n). При $n = 1$, $\alpha = -\frac{1}{2}$ частицы движутся по подобным софокусным эллипсам – кеплеровым орбитам. Совокупное движение всех частиц создает приложенную к центру (в фокусе эллипсов) конечную силу. При $n = 2$, $\alpha = 1$ частицы движутся по подобным концентрическим эллипсам – это эллиптический вихрь Бьеркнеса. В обоих случаях отношение осей эллипсов может быть произвольным.

При $n \geq 3$ и α в диапазонах $\frac{1}{2}n^2 - 1 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}(n+1)^2 - 1$ существуют $n - 2$ циркуляционных течения с периодами $2\pi/n, 2\pi/(n-1), \dots, 2\pi/3$ и с определенным отношением наибольшего и наименьшего расстояний линии тока от центра.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кочин Н.Е., Кибель И.А. и др. Теоретическая гидромеханика. Ч. 1. М.: Физматгиз, 1963. 583 с.
2. Ламб Г. Гидродинамика. М.; Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
3. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 758 с.
4. Горькавый Н.Н., Фридман А.М. Физика планетных колец: Небесная механика сплошной среды. М.: Наука, 1994. 348 с.
5. Седов Л.И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.; Л.: Гостехиздат, 1950.

Москва

Поступила в редакцию
13.III.1997