

УДК 532.526:532.529

© 1997 г. Е.Г. БОРД, Е.Б. ИСАКОВ, В.Я. РУДЯК

## УСТОЙЧИВОСТЬ ЛАМИНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ РАЗРЕЖЕННЫХ ДИСПЕРСНЫХ СРЕД

В рамках линейной теории исследуется устойчивость течений в струе и следе разреженной дисперсной среды, состоящей из несущей жидкости (газа) и взвешенных частиц. Показано, что устойчивость течений существенно меняется в зависимости от размера частиц дисперсной фазы, плотности и характера их распределения в области течения. В результате сравнения с характеристиками устойчивости изученного ранее течения Пуазейля выявлены некоторые общие свойства устойчивости дисперсных течений.

Многочисленные экспериментальные данные по изучению ламинарно-турбулентного перехода и развитого турбулентного течения свидетельствуют о том, что добавление частиц в поток в ряде случаев радикально меняет его свойства. Тем не менее для гетерогенной среды даже линейная теория гидродинамической устойчивости все еще отсутствует. В [1] была поставлена линейная задача устойчивости для сильно разреженной газозвеси (суспензии), состоящей из несущего газа (жидкости) со взвешенными твердыми частицами.

В [2–6] в рамках модели дисперсной среды [1] систематически исследована устойчивость плоского течения Пуазейля. Было показано, что присутствие твердых частиц существенно отражается на устойчивости течения. При их однородном распределении изменение устойчивости течения определяется временем релаксации среды  $\tau = SReL/U_0$ ,  $Re = \rho_f L U_0 / \mu$  – число Рейнольдса течения. Здесь  $\rho_f$  – плотность несущего газа (жидкости),  $L$  – характерный линейный масштаб течения,  $U_0$  – характерное значение скорости течения,  $\mu$  – динамическая вязкость несущей среды. Параметр  $S$  представляет собой время релаксации среды, обезразмеренное на характерное "вязкое" время  $ReL/U_0 = \rho_f L^2 / \mu$ . Для сферических дисперсных частиц радиуса  $a$ , взаимодействие которых с несущей жидкостью описывается силой Стокса, параметр  $S = (2/9)(a/L)^2(\rho_p^*/\rho_f)$ , где  $\rho_p^*$  – плотность материала частиц. При  $SRe \ll 1$  течение становится менее устойчивым, при  $SRe \sim 1$  стабилизируется, а при  $SRe \gg 1$  характеристики устойчивости дисперсного течения практически совпадают с характеристиками устойчивости течения несущей жидкости (газа). В случае, когда частицы распределены неоднородно, важную роль играет их распределение в окрестности критического слоя, причем наибольшее влияние на устойчивость течения оказывают мелкие частицы.

В настоящей работе продолжено изучение устойчивости течений разреженных дисперсных жидкостей. В рамках линейной теории изучена устойчивость двух типичных безграничных течений: струи и следа. Предполагается, что дисперсная среда монодисперсная и состоит из несущего газа (жидкости) и твердых частиц. Объемная плотность дисперсных частиц столь мала, что их взаимодействием друг с другом можно пренебречь.

Динамика среды описывается в рамках двухжидкостной модели [1]. Несущая среда является несжимаемой и описывается обычным уравнением Навье–Стокса с допол-

нительной силой межфазных взаимодействий, а "газ" дисперсных частиц – уравнением переноса, в котором также присутствует сила межфазных взаимодействий, но не учитывается тензор вязких напряжений. Сила межфазных взаимодействий пропорциональна относительной скорости фаз  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{F}_f = -\mathbf{F}_p = n_p K \mathbf{u}$ , где  $\mathbf{F}_f$  и  $\mathbf{F}_p$  – межфазные силы, действующие соответственно на несущую жидкость и континуум дисперсных частиц,  $n_p$  – число частиц в единице объема среды. Коэффициент  $K$  зависит от свойств частиц и несущей жидкости. В частности, если сила сопротивления, действующая на частицу, задается законом Стокса,  $K = 6\pi\mu$ .

**1. Устойчивость струи и следа.** Задача линейной устойчивости течения разреженной гетерогенной среды с произвольным распределением дисперсной фазы сводится к решению уравнения типа Орра-Зоммерфельда с дополнительными членами [3, 4]

$$(W - c)\Delta\psi - W''\psi + (f'J\psi)' = \frac{1}{i\alpha \text{Re}} \Delta^2\psi \quad (1.1)$$

$$c = \frac{\omega}{\alpha}, \quad W(y) = U + fJ, \quad J(y) = \frac{U - c}{1 + i\alpha S \text{Re}(U - c)}, \quad \Delta = \left( \frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2 \right)$$

Здесь  $U(y)$  – профиль скорости стационарного плоскопараллельного течения;  $f(y)$  – профиль массовой концентрации дисперсной фазы;  $\text{Re}$  (число Рейнольдса) и  $S$  (безразмерное время релаксации) – два независимых параметра подобия. Штрих обозначает дифференцирование по  $y$ ;  $\psi(y)\exp[i(\alpha x - \omega t)]$  – функция тока малых возмущений.

Будем исследовать линейную устойчивость безграничных течений: плоской струи с профилем скорости  $U_j(y) = \exp(-y^2)$  и следа за тонкой пластиной с профилем  $U_w(y) = 1 - \exp(-y^2)$ . Эти профили связаны друг с другом соотношением  $U_w = 1 - U_j$ . Решения задач устойчивости для обоих течений поэтому практически эквивалентны. В частности, кривые нейтральной устойчивости и скорости нарастания (затухания) возмущений одни и те же, а волновые числа для струи  $\alpha_j$  и для следа  $\alpha_w$  связаны формулой  $\alpha_w = -\alpha_j$ . Поэтому ниже для определенности будет изучаться течение в следе, а индекс  $w$  – опускаться.

На границах области течения выполняются условия затухания возмущений

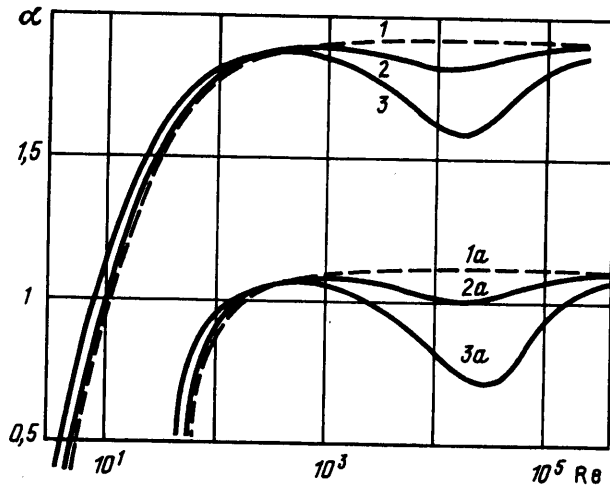
$$\psi(y) = A_\alpha \exp(-\alpha y) + A_\gamma \exp(-\gamma y), \quad \text{Re} \gamma > 0$$

Из-за симметрии профиля скорости возмущения также обладают симметрией и имеют либо симметричную ( $\psi'(0) = 0$ ,  $\psi'''(0) = 0$ ), либо антисимметричную функцию тока ( $\psi(0) = 0$ ,  $\psi''(0) = 0$ ).

Уравнение (1.1) решалось численно методом ортогонализации и  $\tau$ -методом [7]. Тестирование расчетных схем проводилось на решении соответствующих задач устойчивости чистой жидкости (газа). При численном решении область интегрирования обычно ограничивалась значениями поперечной координаты  $y \leq 5-10$ , которая обезмеривалась на толщину потери импульса.

Струйное и следовое течения характеризуются сравнительно малыми значениями критических чисел Рейнольдса  $\text{Re}_c \sim 1$ . С другой стороны, физически осмысленные значения параметра  $S$  для рассматриваемой модели лежат в пределах от  $10^{-2}$  до  $10^{-8}$  [3]. Поэтому при числах Рейнольдса, близких к критическому, параметр  $S \text{Re} \ll 1$ . Качественные соображения [1, 3, 5] показывают, что при таких значениях времени релаксации дисперсное течение должно быть менее устойчиво, нежели течение чистой жидкости.

Рассмотрим результаты расчетов. На фиг. 1 приведены типичные кривые нейтральной устойчивости исследуемого течения для симметричных и антисимметричных возмущений. Индексом  $a$  отмечены кривые, отвечающие случаю антисимметричных возмущений. Расчеты показывают, что в отличие от течения Пуазейля [2-4] струйные течения дисперсной жидкости менее устойчивы по сравнению с течениями чистой жид-



Фиг. 1. Кривые нейтральной устойчивости течений в следе однофазной и дисперсной жидкостей, 1 и 1а – течение чистого газа; 2 и 2а –  $S = 10^{-4}$ ,  $f = 0,1$ ; 3 и 3а –  $S = 10^{-4}$ ,  $f = 0,4$ . Индексом  $a$  отмечены кривые нейтральной устойчивости, соответствующие антисимметричной моде возмущений

кости при околоскритических значениях чисел Рейнольдса не только при наличии мелких взвешенных частиц, но и для крупных частиц. Поскольку для струйных течений и течения в следе за тонкой пластиной критические числа Рейнольдса  $Re_c$  малы, размеры частиц не имеют особого значения и все кривые нейтральной устойчивости для различных  $S$ , но одной массовой концентрации  $f$  в окрестности  $Re_c$  практически одинаковы. С увеличением массовой концентрации частиц степень дестабилизации течения также увеличивается.

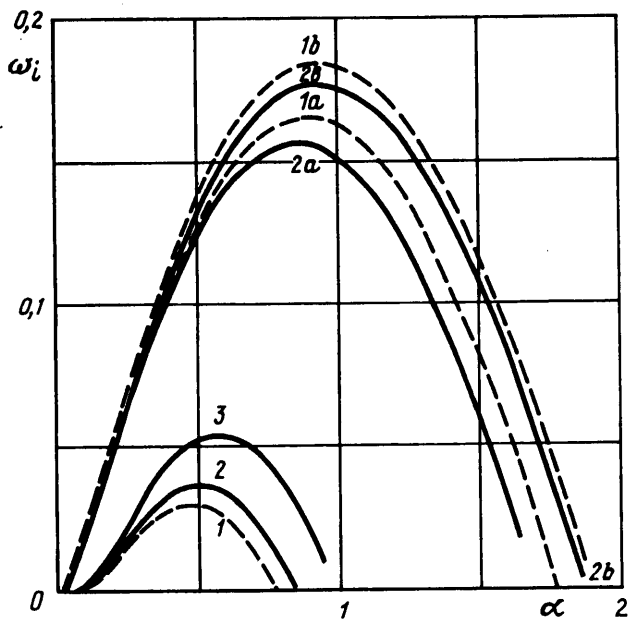
Напротив, при числах Рейнольдса  $Re \sim 1/S$  наблюдается стабилизация дисперсного течения в сравнении с однофазным. На фиг. 1 видно, что добавление частиц приводит при определенных скоростях течения к сужению диапазона волновых чисел  $\alpha$  неустойчивых возмущений. Устойчивость течения возрастает с увеличением массовой концентрации частиц. Скорость течения, при которой наблюдается его наибольшая устойчивость, определяется соотношением  $SRe \sim 1,6-2$ .

На фиг. 2 приведена зависимость временных инкрементов роста  $\omega_i$  ( $\omega = \omega_r + i\omega_i$ ) симметричных возмущений от волнового числа  $\alpha$  ( $S = 10^{-2}$ ). Графики на этой фигуре также иллюстрируют тот факт, что при малых числах Рейнольдса, когда параметр  $SRe$  много меньше единицы (кривые 2 и 3), течение дисперсной жидкости менее устойчиво, чем однофазное течение. С ростом концентрации указанный эффект возрастает (кривые 2 и 3). Однако если параметр  $SRe$  больше или порядка единицы, дисперсное течение становится более устойчивым по сравнению с течением чистой жидкости (кривые 2а и 2б).

Исследование устойчивости струйного течения и следа с неоднородным распределением дисперсной фазы привело в значительной мере к тем же выводам, что и исследование течения Пуазейля [5, 6]. Рассматривалось распределение дисперсной фазы в виде двух тонких пылевых слоев, расположенных симметрично относительно оси течения

$$f(y) = (1/2)f_0(\sigma, \xi)[\exp(-(y - \xi)^2 / \sigma^2) + \exp(-(y + \xi)^2 / \sigma^2)]$$

$$f_s = \int_{-1}^1 f(y) dy = \text{const}$$



Фиг. 2. Зависимость временного инкремента роста симметричных возмущений от волновых чисел. 1, 1а, 1б – течение чистого газа; 2, 2а, 2в –  $f = 0,1$ ; 3 –  $f = 0,4$ . Кривые без буквенных индексов соответствуют  $Re = 8$ , с индексом а –  $Re = 100$ , в –  $Re = 1000$

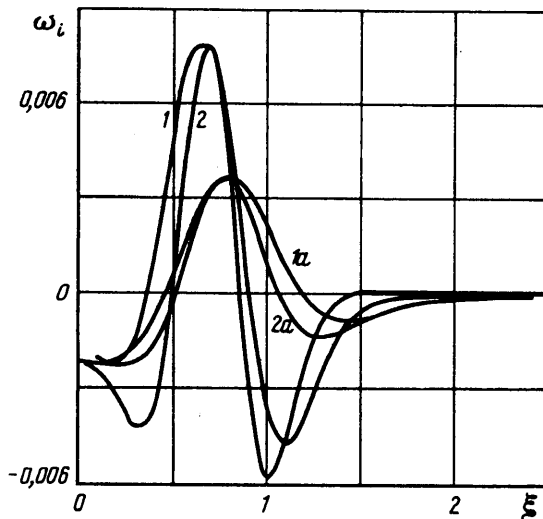
Здесь  $\sigma \ll 1$  – толщина пылевых слоев, координата  $y = \pm \xi$  определяет их расположение, параметр  $f_v$  выбирался таким образом, чтобы полное количество частиц в потоке  $f_s$  не менялось при изменении  $\xi$  и  $\sigma$ .

На фиг. 3 показано, как меняется скорость нарастания возмущений  $\omega_i$  в зависимости от положения пылевых слоев. При данном числе Рейнольдса волновые числа нейтральных возмущений составляют: симметричных –  $\alpha = 1,77$ , а антисимметричных –  $\alpha = 0,86$ . Устойчивость течения по отношению и к той и к другой модам возмущений может значительно повышаться и понижаться в зависимости от характера распределения частиц в окрестности критического слоя  $U(y_c) - c = 0$  (положения критических слоев для симметричной и антисимметричной мод близки к значению  $y_c \sim 0,7$ ).

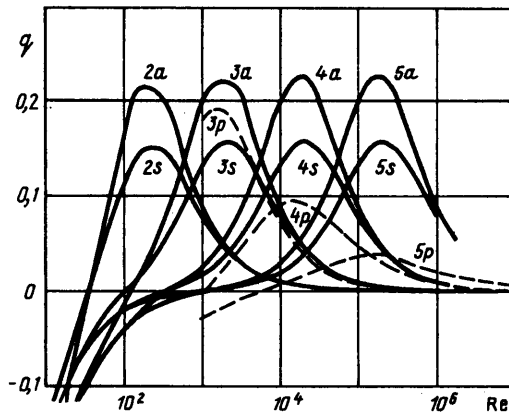
**2. Скорости нарастания возмущений в различных дисперсных течениях.** Влияние частиц на устойчивость течения определяется изменением скорости нарастания возмущений  $\Delta\omega$ , по сравнению с возмущениями в течении чистой жидкости. Согласно расчетам, при однородном распределении частиц отношение  $\Delta\omega_i/f$  практически не меняется при изменении концентрации  $f$  в пределах 0–0,1.

На фиг. 4 показаны зависимости  $q = -\Delta\omega_i/f$  от числа Рейнольдса течения  $Re$  для сред с различными временами релаксации. Индексами  $s$  и  $a$  отмечены зависимости, соответствующие симметричной и антисимметричной модам возмущений в струе ( $\alpha = 1$ ). В интервале  $Re = 10^3 - 10^6$  даны зависимости для симметричной моды в течении Пуазейля, обозначенные индексом  $p$ , рассчитанные для наиболее быстро растущих возмущений:  $\omega_i^*(Re) = \max_{\alpha} \omega_i(Re, \alpha)$ . Приведенные результаты показывают, что вне

зависимости от структуры течения и характеристик возмущений дисперсные среды обладают меньшей устойчивостью в сравнении с однородными при  $SRe \ll 1$  и боль-



Фиг. 3. Изменение инкрементов роста возмущений в следе в зависимости от положения пылевых слоев в различных течениях;  $Re = 100$ ,  $f_s = 0,005$ ,  $\sigma = 0,05$ ; 1 и 1a -  $S = 10^{-4}$ ; 2 и 2a -  $S = 10^{-2}$ . Кривые с индексом  $a$  относятся к антисимметричной моде возмущений



Фиг. 4. Изменение инкрементов роста возмущений в различных течениях при добавлении твердых частиц:  $S = 10^{-2}$ ;  $10^{-3}$ ;  $10^{-4}$ ;  $10^{-5}$  (кривые 2-5). Индексы  $a$  - антисимметричные,  $s$  - симметричные моды при  $\alpha = 1$ ,  $p$  - симметричные наиболее быстро растущие возмущения

шей - при  $SRe \geq 1$ . Максимальный эффект стабилизации течения достигается при  $SRe = 1,5-2$ . Отметим качественное сходство зависимостей  $q(Re)$ , относящихся к различным течениям и модам возмущений, но одному значению времени релаксации  $S$ . Это сходство указывает на существование единого механизма изменения устойчивости, действующего в дисперсных течениях различной структуры.

**3. Обсуждение результатов.** Анализ фиг. 4 показывает, что характер развития неустойчивости в различных дисперсных течениях имеет ряд общих черт. Вместе с

тем заметны и существенные различия. Влияние частиц на развитие неустойчивости струйного и следового течений заметно меньше, чем течения Пуазейля. Это связано, в частности, с высокими скоростями нарастания возмущений в данных течениях. Добавление частиц заметно изменяет форму области неустойчивости, однако не может полностью подавить двумерные возмущения, как это имеет место для течения Пуазейля [3, 4]. Качественно полученные результаты пригодны для описания широкого класса разреженных дисперсных течений.

Форма частиц дисперсной фазы не имеет принципиального значения. К примеру, сила, действующая на эллипсоидальную частицу со стороны окружающей жидкости, также определяется законом Стокса, при этом эффективный радиус частицы  $a$  связан с полуосями эллипса  $b$ ,  $c$  и  $d$  соотношением [8]

$$a = \frac{8}{3} \frac{bcd}{\chi + \alpha d^2}, \quad \alpha = bcd \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(d^2 + \lambda^2)D}$$

$$\chi = bcd \int_0^\infty \frac{d\lambda}{D}, \quad D = \sqrt{(d^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)}$$

В случае, если в гетерогенной среде в качестве взвешенной частицы выступает сферическая капля жидкости с вязкостью  $\mu_1$ , силу, действующую на нее со стороны несущей жидкости или газа, можно определить также методом Стокса. Следует иметь в виду только, что на поверхности жидкой частицы выполняются условия непротекания и компенсации напряжений. Последнее означает, что касательное напряжение, создаваемое на поверхности раздела (на поверхности капли) несущей жидкостью, равно по величине и противоположно по направлению напряжению, индуцируемому жидкостью капли. В результате коэффициент сопротивления изолированной жидкой частицы радиуса  $a$  определяется формулой [9]

$$K = -2\pi\mu a \frac{2\mu + 3\mu_1}{\mu + \mu_1}$$

Тогда время релаксации среды  $\tau = K/m_p$ , где  $m_p = 4/3\pi a^3 \rho_p$  – масса жидкой частицы. Аналогично определяется время релаксации любой среды, дисперсные частицы которой имеют коэффициент сопротивления  $K$ , отличный от стоксовского.

Если дисперсная фаза состоит из нескольких компонент с массовыми концентрациями  $f_1, \dots, f_n$  и временами релаксации  $S_1, \dots, S_n$ , задача снова сводится к уравнению (1.1) с эффективным профилем

$$W = U + f_1 J_1 + \dots + f_n J_n, \quad J_k = \frac{U - c}{1 + i\alpha S_k \operatorname{Re}(U - c)} \quad (k = 1, \dots, n)$$

Таким образом, каждая компонента дисперсной фазы приводит к появлению своей аддитивной поправки к эффективному профилю скорости. Если эти поправки невелики ( $f_k \ll 1$ ), то поправки к собственным числам также будут аддитивными [3]. В частности, для скорости нарастания возмущений

$$-\Delta\omega_i = f_1 q_1 + \dots + f_n q_n$$

где  $q_k$  – поправка к скорости нарастания, вносимая  $k$ -фазой отдельно (см. фиг. 4). Следовательно, качественное поведение полидисперсных течений с равномерным распределением частиц по пространству течения также может быть определено, исходя из результатов настоящей работы.

**Заключение.** Влияние частиц на развитие неустойчивости струйного и следового течений заметно меньше, чем течения Пуазейля. Добавление частиц заметно изменяет форму области неустойчивости, однако не может полностью подавить двумерные возмущения, как это имеет место для течения Пуазейля [3, 4]. Качественно полученные результаты пригодны для описания широкого класса разреженных дисперсных течений.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Saffman P.G.* On the stability of laminar flow of a dusty gas // *J. Fluid Mech.* 1962. V. 13. Pt 1. P. 120–128.
2. *Рудяк В.Я., Исаков Е.Б.* Устойчивость плоского течения Пуазейля разреженных суспензий и газовзвесей // *Изв. вузов. Авиац. техника.* 1994. № 4. С. 21–24.
3. *Рудяк В.Я., Исаков Е.Б.* Устойчивость гетерогенных сред. 1. Устойчивость плоского течения Пуазейля: Препринт № 2. Новосибирск: Новосиб. гос. акад. строительства, 1994. 44 с.
4. *Исаков Е.Б., Рудяк В.Я.* Устойчивость течений разреженных газовзвесей и суспензий в плоском канале // *Изв. РАН. МЖГ.* 1995. № 5. С. 79–85.
5. *Рудяк В.Я., Исаков Е.Б.* Устойчивость течения Пуазейля двухфазной жидкости с неоднородным распределением частиц // *ПМТФ.* 1996. Т. 37. № 1. С. 95–105.
6. *Rudyak V.Ya., Isakov E.B., Bord E.G.* Instability of antisymmetric disturbances of the Poiseuille flow of an inhomogeneous fluid // *Thermophysics & Aeromechanics.* 1996. V. 3. № 1. P. 51–56.
7. *Флетчер К.* Численные методы на основе метода Галеркина. М.: Мир, 1988. 352 с.

Новосибирск

Поступила в редакцию  
4.XII.1995