МЕХАНИКА

ЖИДКОСТИ И ГАЗА

№ 4 • 1997

УДК 532.5.013.4:536.25

 Н.И. ЛОБОВ, С.В. ШКЛЯЕВ

ВЛИЯНИЕ ДВИЖЕНИЯ ГРАНИЦ НА УСТОЙЧИВОСТЬ КОНВЕКТИВНОГО ТЕЧЕНИЯ В ВЕРТИКАЛЬНОМ СЛОЕ С ВНУТРЕННИМИ ИСТОЧНИКАМИ ТЕПЛА

Численно методом дифференциальной прогонки исследуется устойчивость течения жидкости в вертикальном слое, которое вызывается совместным действием внутренних источников тепла и встречным движением границ слоя. Определены численные характеристики неустойчивости в зависимости от параметров задачи (чисел Рейнольдса, Прандтля и волнового числа). Обнаружена достаточно сильная стабилизация конвекции в присутствии вынужденного течения.

Конвективные течения в отличие от чисто гидродинамических обладают более разнообразными механизмами потери устойчивости. Имеется несколько примеров, на которых показывается действие основных механизмов неустойчивости. К их числу принадлежит свободноконвективное течение в вертикальном слое, вызываемое равномерно распределенными в жидкости источниками тепла. Устойчивость этого течения исследовалась ранее (см., например, [1, 2]). В чисто гидродинамическом случае исследованы два нижних уровня неустойчивости [1]: первый уровень – четный (амплитуда функции тока возмущений – четная функция поперечной координаты) и второй – нечетный. Наиболее опасны возмущения четного типа.

Учет тепловых факторов [2] приводит к более сложной картине кризиса. Существенно меняются критические значения Gr и k. На нейтральных кривых образуются петли (физический смысл петель достаточно подробно изложен в [2, 3]).

Довольно интересной представляется проблема управления конвективной устойчивостью. В настоящее время имеется ряд работ, в которых рассматривается влияние различных факторов на устойчивость конвективных течений. Достаточно полная библиография указанных работ приведена в [3]. К числу таких факторов относится и комбинирование конвективного течения с гидродинамическим течением той или иной природы. В данной статье рассматривается влияние встречного движения границ слоя на устойчивость свободноконвективного течения, вызываемого внутренними источниками тепла. Так как вынужденное течение в этом случае является хорошо изученным течением Куэтта (абсолютно устойчивым относительно малых возмущений), то можно ожидать существенной стабилизации комбинированного течения.

Пусть вязкая несжимаемая жидкость находится в вертикальном слое толщиной $2h$. Границы слоя достаточно высокой теплопроводности поддерживаются при постоянной температуре, принимаемой за начало отсчета, и движутся в параллельных плоскостях с противоположно направленными и равными по величине скоростями: $x = \pm h$, $\mathbf{v} = \mp \mathbf{U}$ (x – координата поперек слоя). В жидкости однородно распределены источники тепла. Их интенсивность будем характеризовать мощностью тепловыделения в единице объема Q. Конвективное движение описывается уравнениями тепловой конвекции в приближении Буссинеска, которые запишем в безразмерном виде [4]

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\,\nabla)\mathbf{v}=-\nabla\, p+\Delta\mathbf{v}+T\boldsymbol{\gamma}\\
&\frac{\partial T}{\partial t}+(\mathbf{v}\,\nabla)T=\frac{1}{\mathrm{Pr}}\Delta T+\frac{\mathrm{Gr}}{\mathrm{Pr}},\quad \operatorname{div}\mathbf{v}=0
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Здесь все обозначения обычные; $\boldsymbol{\gamma}$ – единичный вектор, направленный вертикально вверх. В качестве единиц измерения принято: расстояние – h; время – h^2/ν; скорость – ν/h; температура – $\nu^2/\beta g h^3$; давление – $\rho(\nu/h)^2$.

На границах слоя выполняются условия прилипания и условие изотермичности

$$x=\pm 1:\quad \mathbf{v}=\mp\mathrm{Re}\,\boldsymbol{\gamma},\quad T=0 \tag{2}$$

Кроме того, необходимо условие замкнутости слоя – поток жидкости через поперечное сечение слоя должен отсутствовать:

$$\int_{-1}^{1}\mathbf{v}_z dx=0 \tag{3}$$

Здесь z – координата вдоль слоя.

Система уравнений (1) и граничные условия (2) содержат три безразмерных параметра: число Грасгофа Gr, число Прандтля Pr и число Рейнольдса Re

$$\mathrm{Gr}=\frac{g\beta h^5 Q}{\rho C_p \nu^2\chi},\qquad \mathrm{Pr}=\frac{\nu}{\chi},\qquad \mathrm{Re}=\frac{Uh}{\nu}$$

Задача (1)–(3) допускает стационарное решение, описывающее плоскопараллельное течение в вертикальном направлении с профилями скорости и температуры

$$\mathbf{v}_0=\frac{\mathrm{Gr}}{120}(5x^4-6x^2+1)-\mathrm{Re}\,x,\qquad T_0=\frac{\mathrm{Gr}}{2}(1-x^2) \tag{4}$$

Таким образом, стационарное течение жидкости является результатом суперпозиции свободноконвективного движения с четным профилем скорости и сдвигового плоского течения Куэтта. Для исследования устойчивости такого комбинированного течения введем возмущения скорости, температуры и давления $\mathbf{v}=\mathbf{v}_0+\mathbf{v}'$; $T=T_0+T'$, $p=p_0+p'$. Подставляя возмущенные поля в систему уравнений (1) и граничные условия (2), получим в линейном по малым возмущениям порядке систему уравнений (для простоты штрихи у возмущений опускаем)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\,\nabla)\mathbf{v}_0+(\mathbf{v}_0\,\nabla)\mathbf{v}=-\nabla\, p+\Delta\mathbf{v}+T\boldsymbol{\gamma}\\
&\frac{\partial T}{\partial t}+(\mathbf{v}_0\,\nabla)T+(\mathbf{v}\,\nabla)T_0=\frac{1}{\mathrm{Pr}}\Delta T,\quad \operatorname{div}\mathbf{v}=0
\end{aligned}
\tag{5}
$$

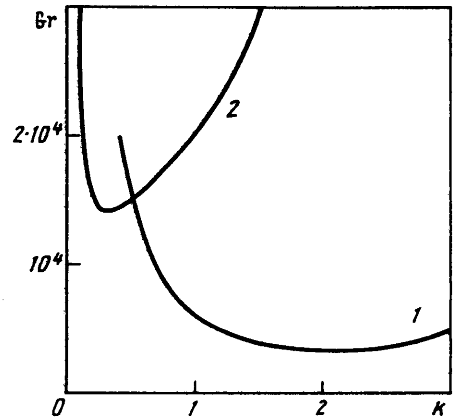
$$x=\pm 1:\quad \mathbf{v}=0,\quad T=0 \tag{6}$$

Можно показать, что в данном случае теорема Сквайра справедлива, и для линейной устойчивости комбинированного течения (4) наиболее опасными являются плоские возмущения. Тогда можно ввести функцию тока соотношениями

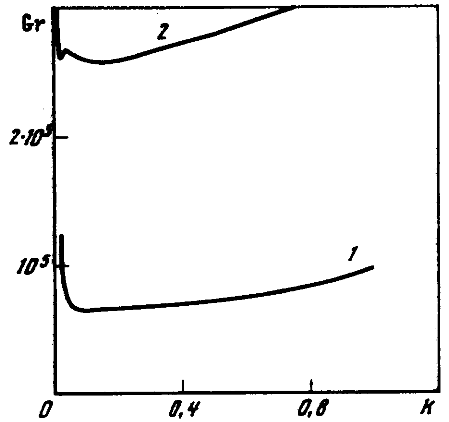
$$\mathbf{v}_x=\frac{\partial\phi}{\partial z},\qquad \mathbf{v}_z=-\frac{\partial\phi}{\partial x}$$

Будем искать решение в классе нормальных возмущений

$$\phi(x,z,t)=\varphi(x)\exp\{-\lambda t+ikz\},\qquad T(x,z,t)=\theta(x)\exp\{-\lambda t+ikz\}$$



Фиг. 1. Нейтральные кривые Gr(k) четной моды, Pr = 0; Re = 0, 1000 (кривые *1*, *2*)



Фиг. 2. Нейтральные кривые Gr(k) четной моды, Pr = 0; Re = 5000, 20000 (кривые, *1*, *2*)

Здесь φ и θ – амплитуды, k – вещественное волновое число, а $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$ – комплексный декремент. Тогда задача об устойчивости комбинированного течения (5)–(6) примет вид

$$-\lambda\Delta\varphi + v_0 ik\Delta\varphi - v_0'' ik\varphi = \Delta\Delta\varphi - \theta'$$
$$-\lambda\theta + v_0 ik\theta + ikT_0'\varphi = \frac{1}{\mathrm{Pr}}\Delta\theta, \qquad \Delta = \frac{d^2}{dx^2} - k^2 \tag{7}$$

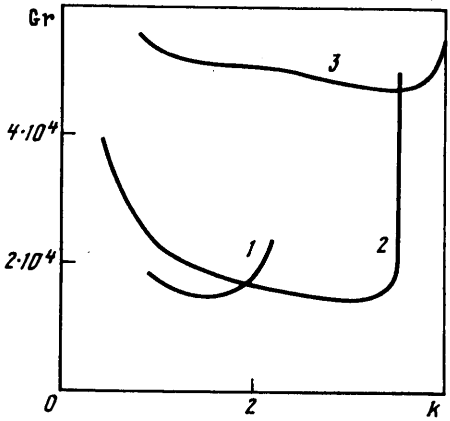
$$x = \pm 1: \ \varphi = \varphi' = \theta = 0 \tag{8}$$

Краевая задача (7)–(8) определяет декременты возмущений как функции параметров задачи. Если ограничиться рассмотрением нейтральных возмущений ($\lambda_r = 0$), то в результате решения краевой задачи получим зависимость критического числа Грасгофа $\mathrm{Gr}_k = \mathrm{Gr}_k(\mathrm{Pr}, \mathrm{Re}, k)$.

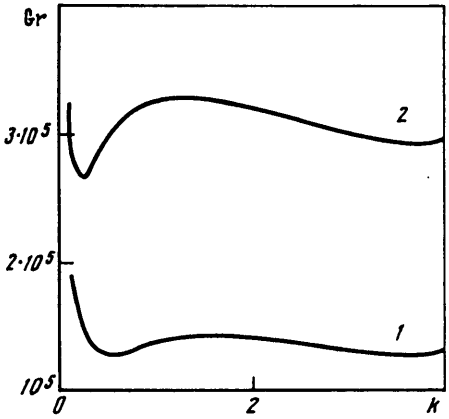
Существуют два важных предельных случая. При Gr = 0 получаем задачу линейной устойчивости течения Куэтта. Известно, что плоское сдвиговое течение абсолютно устойчиво относительно малых возмущений. Противоположный предельный случай Re = 0 соответствует конвективному течению жидкости с внутренними источниками тепла в вертикальном слое. Устойчивость этого течения исследовалась ранее (см., например, работы [1, 2]). В промежуточном случае можно ожидать, что встречное движение границ слоя приведет к стабилизации конвективного течения. Для численного решения задачи (7), (8) применялся метод дифференциальной прогонки [5].

Рассмотрим чисто гидродинамический случай Pr = 0. При этом краевая задача (7), (8) сводится к задаче Орра–Зоммерфельда с профилем скорости (4). На фиг. 1–4 представлены нейтральные кривые Gr(k) для различных значений числа Рейнольдса. При Re = 0 имеем гидродинамический предел свободноконвективного течения в слое с внутренними источниками тепла. Изучены два нижних уровня неустойчивости – четный и нечетный. Четный уровень реализуется возмущениями в виде вихрей на границах встречных потоков с шахматной упаковкой. Вихри медленно дрейфуют вниз. Эти возмущения являются наиболее опасными, нейтральная кривая приведена на фиг. 1 (линия *1*). Минимальное критическое число Грасгофа $\mathrm{Gr}_m = 3440$, волновое число соответствующих критических возмущений $k_m = 2{,}05$.

С усилением вынужденного движения происходит деформация нейтральной кривой четной моды. Хотя в присутствии движения границ слоя возмущения теряют свойства четности, характерные для случая свободноконвективного течения, в статье сохра-



Фиг. 3. Нейтральные кривые Gr(k) нечетной моды, Pr = 0, Re = 0, 100, 500 (кривые 1, 2, 3)



Фиг. 4. Нейтральные кривые Gr(k) нечетной моды, Pr = 0, Re = 1200, 2500 (кривые 1, 2)

няются прежние названия, как указание на происхождение этих возмущений. Минимумы нейтральных кривых с ростом Re смещаются в область малых волновых чисел (фиг. 1, кривая 2 – Re = 1000). При достаточно больших Re на нейтральной кривой появляется добавочный минимум, именно он соответствует в дальнейшем наиболее опасным возмущениям. Волновое число k_m при этом скачком увеличивается. На фиг. 2 показаны нейтральные кривые для Re = 5000; 20 000 (линии 1, 2). Заметно стабилизирующее действие движения границ слоя на тепловую конвекцию.

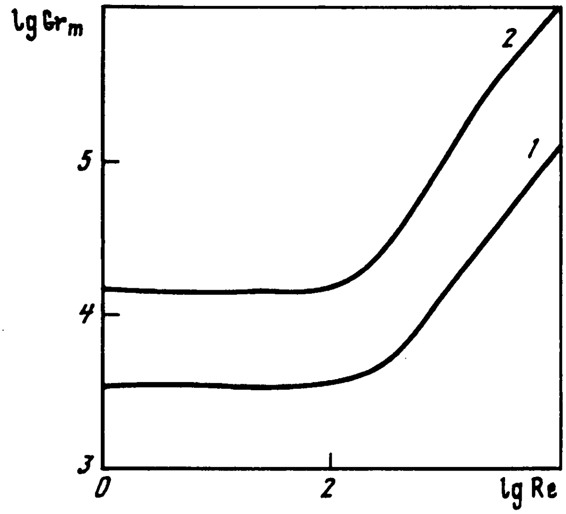
Нейтральные кривые нечетных возмущений для различных чисел Рейнольдса приведены на фиг. 3, 4. Движение границ эффективно подавляет и эту моду неустойчивости; с ростом Re резко увеличивается критическое число Gr_m. Деформация нейтральных кривых происходит по другому сценарию. Сначала минимум смещается в сторону больших волновых чисел – кривые 1, 2, 3 на фиг. 3 (Re = 0; 100; 500). Затем (по мере увеличения Re) в области малых волновых чисел появляется добавочный минимум (фиг. 4, линии 1, 2 – Re = 1200; 2500), который впоследствии соответствует наиболее опасным из нечетных возмущений. Численные характеристики неустойчивости при Re = 0 хорошо согласуются с результатами [2]; расхождение в значениях критического числа Грасгофа не превышает 1%, что может быть объяснено использованием в [2] метода Галеркина.

На фиг. 5 представлена сводная диаграмма устойчивости комбинированного конвективного течения относительно четных (кривая 1) и нечетных (кривая 2) возмущений на плоскости Gr_m – Re в гидродинамическом приближении (Pr = 0). Области неустойчивости расположены выше соответствующих нейтральных линий. Движение границ сначала оказывает относительно слабое стабилизирующее действие, минимальное критическое число Грасгофа увеличивается незначительно. С дальнейшим ростом числа Рейнольдса наступает резкое повышение устойчивости. При достаточно больших интенсивностях вынужденного течения Gr_m выходит на асимптотические зависимости соответственно для четной и нечетной моды

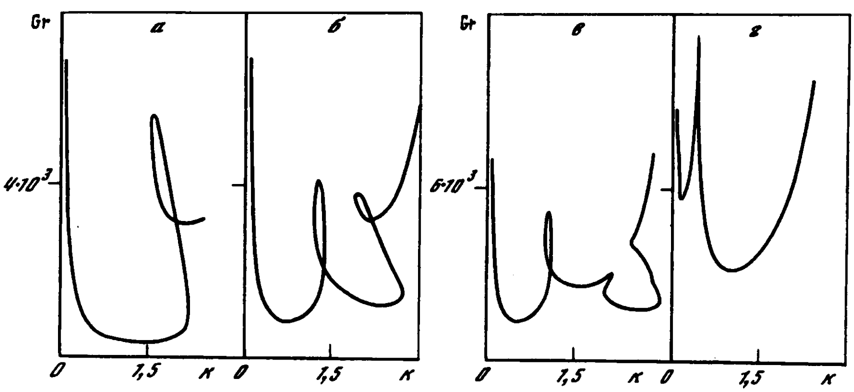
$$\mathrm{Gr}_m = 12{,}85\mathrm{Re} + 1033, \quad \mathrm{Gr}_m = 106{,}8\mathrm{Re} - 604{,}6$$

Как видно, нечетные возмущения и в присутствии вынужденного течения являются менее опасными, чем четные.

При учете тепловых факторов следует ожидать, что более богатый спектр возмущений приведет к усложнению картины кризиса течения. Так, в случае чисто конвективного течения (Re = 0) с увеличением числа Прандтля происходит деформа-



Фиг. 5. Карта устойчивости течения Pr = 0 (кривые *1*, *2* – четные и нечетные возмущения)



Фиг. 6. Нейтральные кривые, Pr = 10

ция правой ветви нейтральной кривой Gr(k) и при Pr > 5,7 (см., например, [2]) на нейтральной кривой образуется петля, обусловленная полным слиянием двух четных уровней спектра (совпадают вещественная и мнимая части декрементов). Эта петля разбивает нейтральную кривую на две части – тепловую (в области более длинных волн) и гидродинамическую, близкую к соответствующей кривой при Pr = 0.

На фиг. 6, *а* показана нейтральная кривая, соответствующая Pr = 10, Re = 0. Отметим очень хорошее согласие с результатами [2]. При данном числе Прандтля кризис течения определяется развитием возмущений типа бегущих тепловых волн. Подчеркнем, что при смещении вдоль нейтральной кривой механизм неустойчивости меняется плавно и деление возмущений на вихри на границах потоков и температурные волны достаточно условно.

С ростом числа Рейнольдса нейтральная кривая критических возмущений претерпевает значительные изменения. На фиг. 6, *б*, *в*, *г* изображены нейтральные кривые при Pr = 10 и Re = 10, 20, 100. Сначала (фиг. 6, *б*) на участке нейтральной кривой, соответствующем тепловым волнам, появляется еще одна петля с образованием добавочного минимума (физический смысл этой петли тот же, что и для случая чисто конвективного течения). Затем эта петля поднимается в область больших чисел Грасгофа, а петля в области больших k (гидродинамические возмущения) размыкается (фиг. 6, *в*).

При дальнейшем увеличении интенсивности вынужденного течения упрощается вид нейтральной кривой. При этом фрагмент кривой $\mathrm{Gr}(k)$, отвечающий гидродинамическим возмущениям, приближается к аналогичной нейтральной кривой для случая $\mathrm{Pr} = 0$, а область существования нарастающих тепловых возмущений исчезает с уменьшением интервала допустимых волновых чисел и поднимается вверх. Минимум нейтральной кривой скачком переходит на ее гидродинамическую часть (фиг. 6, *г*).

В дальнейшем с ростом Re влияние тепловых факторов становится незаметным – нейтральные кривые при фиксированном числе Рейнольдса не меняются с изменением числа Прандтля, что говорит о гидродинамической природе кризиса течения при больших числах Рейнольдса.

При исследовании устойчивости относительно нечетных возмущений обнаружена их очень слабая зависимость от числа Прандтля и соответствующие результаты численных исследований здесь не приводятся.

Заключение. Движение границ приводит к существенной стабилизации конвективного течения. Ранее исследовалась устойчивость некоторых комбинированных течений [3], но присутствие вынужденного движения приводило только к стабилизации течения в целом. При изменении числа Прандтля и в присутствии вынужденного течения смена механизмов неустойчивости происходила обычным порядком. В рассматриваемом случае, в присутствии вынужденного течения достаточно высокой интенсивности, механизм неустойчивости остается гидродинамическим по своей природе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Якимов А.А.* Об устойчивости стационарного конвективного движения, вызванного внутренними источниками тепла // ПММ. 1970. Т. 34. Вып. 4. С. 700–705.
2. *Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Якимов А.А.* О двух типах неустойчивости стационарного конвективного движения, вызванного внутренними источниками тепла // ПММ. 1973. Т. 37. Вып. 3. С. 564–568.
3. *Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Непомнящий А.А.* Устойчивость конвективных течений. М.: Наука, 1989. 319 с.
4. *Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
5. *Гольдштик М.А., Штерн В.Н.* Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск: Наука, 1977. 366 с.

Пермь

Поступила в редакцию
15.II.1996