МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 4 • 1997

УДК 532.517.4

 Ю.В. НУЖНОВ

УСЛОВНОЕ ОСРЕДНЕНИЕ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА И НОВЫЙ ПОДХОД В МОДЕЛИРОВАНИИ ПЕРЕМЕЖАЮЩИХСЯ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ

Предпринято дальнейшее развитие статистической теории турбулентных течений с явным учетом эффекта перемежаемости, проведено условное осреднение уравнений Навье–Стокса, в результате которого получены новые уравнения для условных средних характеристик, сформулирован новый подход к построению дифференциальных моделей без использования уравнений Рейнольдса, обоснована возможность трансформации моделей, основанных на уравнениях Рейнольдса, в модели по данному подходу.

1. Математические (дифференциальные) модели развитых турбулентных течений, основанные на уравнениях Рейнольдса с привлечением соответствующих гипотез замыкания, не являются универсальными и дают значительную ошибку в расчетах пульсационных характеристик (порядка 30% и выше). Об этом свидетельствуют и неутешительные результаты очередного тура "Коллективного тестирования моделей турбулентности 1990/91", организованного Стэнфордским университетом (см. [1]).

Одной из основных причин несовершенства моделей, построенных на уравнениях Рейнольдса, является невозможность учета эффекта перемежаемости, т.е. чередования областей с существенно различным характером течения турбулентной и нетурбулентной жидкости [2–8]. В результате такие модели не позволяют определить условные средние характеристик и потому не в состоянии описать структуру турбулентных течений более детально.

Известные подходы [9–13], учитывающие явление перемежаемости и позволяющие строить модели для условных средних, основываются на использовании безусловного осреднения уравнений (в частности, уравнений Навье–Стокса, предварительно умноженных на функцию перемежаемости). Полученные таким образом уравнения содержат дополнительные слагаемые, коэффициент перемежаемости, полные средние значения скорости, диссипации и др., что требует привлечения новых часто не вполне обоснованных гипотез замыкания. Все это в конечном счете не обходится без использования уравнений Рейнольдса для расчета входящих полных средних, значительно усложняет модели и препятствует повышению их точности.

Основная цель работы – проведение условного осреднения уравнений Навье–Стокса и развитие на основе полученных таким образом уравнений нового подхода в моделировании турбулентных течений с возможностью расчета условных средних без привлечения уравнений Рейнольдса.

2. На данном этапе развития статистической теории перемежающихся турбулентных течений введение границы раздела между областями с турбулентной Ω_t и нетурбулентной Ω_0 жидкостью в поле течения Ω представляется необходимым [2]. Прежде всего это связано с различной структурой каждой из перемещающихся областей и возможностью использования метода условной выборки с целью статистического описания их гидродинамических характеристик [5]. Первым вопросом при этом является вопрос идентификации турбулентной среды, связанный с определением ее индикатора (функции перемежаемости) $I = I(\mathbf{x}, t)$. Наиболее часто для его определения используется поле концентрации динамически пассивной примеси. Однако коэффициенты перемежаемости динамического и концентрационного (температурного) полей заметно различаются [2, 3] и выбор индикатора турбулентной среды по значениям концентрации следует рассматривать только как приближение. Определение индикатора турбулентной среды по значениям вязкой диссипации мелкомасштабных пульсаций скорости поэтому представляется более строгим.

Известные трудности определения мгновенной величины диссипации (из-за сильной зависимости от числа Re и объема осреднения, что является одной из основных причин использования недетерминированного подхода к описанию турбулентных сред), а также условие адекватного опытным данным теоретического описания характеристик течения вообще приводят к необходимости частичного осреднения характеристик. Это значит, что, например, в качестве мгновенной величины диссипации принимается величина, осредненная по малому объему, и на самом деле рассматривается несколько сглаженная микроструктура турбулентной среды. Следствием такого представления является понятие "внешней" перемежаемости [2, 8], что позволяет дать определение турбулентной и нетурбулентной жидкости (среды) в виде

$$\varepsilon = \frac{\nu}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)^2 = \begin{cases} \langle\varepsilon\rangle_v \geqslant \varepsilon_0, \ (\mathbf{x}, t) \in \Omega_t \\ \langle\varepsilon\rangle_v \leqslant \varepsilon_0, \ (\mathbf{x}, t) \in \Omega_0 \end{cases} \tag{2.1}$$

Здесь первое выражение соответствует турбулентной среде, второе – нетурбулентной среде, $\langle\varepsilon\rangle_v$ – величина диссипации, осредненная по объему с центром в точке $\mathbf{x}$ и характерным размером порядка внутреннего масштаба турбулентности, $\varepsilon_0 = \langle\varepsilon\rangle/\mathrm{Re}$ – уровень диссипации по схеме Обухова, $\mathrm{Re} = qL/\nu$ – число Рейнольдса для энергосодержащих (крупномасштабных) вихрей (см., например, [2]), $\langle\varepsilon\rangle = \langle\langle\varepsilon\rangle_v\rangle$ – среднестатистическое значение диссипации в фиксированной точке пространства.

Конструктивное определение функции перемежаемости, основанное на условиях (2.1), теперь записывается как

$$I = \begin{cases} 1, \ (\mathbf{x}, t) \in \Omega_t \\ 0, \ (\mathbf{x}, t) \in \Omega_0 \end{cases} \tag{2.2}$$

В результате введения функции перемежаемости (2.2) мгновенное поле течения представляется областями с турбулентной (разрастающейся, как правило, вниз по течению) и нетурбулентной жидкостью. Эти области разделены нестационарными и хаотически искривленными в пространстве поверхностями раздела, на которых функция перемежаемости терпит разрыв.

Представим теперь некоторую характеристику течения $f = f(\mathbf{x}, t)$ стохастически эквивалентной случайной (в зависимости от I) функцией f_1. В физическом пространстве $(\mathbf{x}, t)$ такое представление может быть достигнуто за счет введения обобщенной функции

$$f_1 = If + (1 - I)f \tag{2.3}$$

отдельные слагаемые которой определяют поведение параметров турбулентной (f_t) и нетурбулентной (f_0) жидкости во всем поле течения, т.е. в области Ω функции

$$f_t = If, \ f_0 = (1 - I)f \tag{2.4}$$

Как видно, эти функции являются кусочно-непрерывными вне зависимости от характера самой функции f (см. ниже).

В силу стохастической эквивалентности функций f и f_1 одноточечная функция плотности распределения вероятностей $P(f) = P(f_1)$ с вероятностью, равной единице (здесь $P(f) \equiv P(f;\ \mathrm{x}, t)$), и, согласно (2.3)

$$P(f_1) = IP(f) + (1 - I)P(f) \tag{2.5}$$

с выполнением условий нормировки $\int P(f_1)df = \int P(f)df = 1$ при $t \to \infty$.

Для определения полных средних установим их взаимосвязь с условными средними характеристик.

Как известно, полное среднее $\mathrm{Mf} = \int fP(f)df$. Условные средние для каждой из перемежающихся областей теперь запишутся в виде $\mathrm{Mf}_t^* = \int fP(f|I = 1)df$ и $\mathrm{Mf}_0^* = \int fP(f|I = 0)df$. Для статистически стационарных течений, которые здесь только и рассматриваются, эти значения не зависят от времени и операция статистического осреднения тождественна операции осреднения по времени

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t f dt \equiv \int fP(f)df$$

После обозначения операции полного (безусловного) осреднения как $\langle\ \rangle$, а условного по турбулентной и нетурбулентной областям соответственно $\langle\ \rangle_t$ и $\langle\ \rangle_0$ полное и условное статистическое осреднение некоторой характеристики теперь проводится по формулам

$$\langle f\rangle = \int fP(f)df,\ \langle f\rangle_t = \int fP_t(f)df,\ \langle f\rangle_0 = \int fP_0(f)df \tag{2.6}$$

Здесь $P_t(f)$ и $P_0(f)$ – нормированные условные функции плотности распределения вероятностей для турбулентной и нетурбулентной среды, $\int P_t(f)df = 1$ и $\int P_0(f)df = 1$. Функции $P_t(f)$ и $P_0(f)$ определяются после привлечения условия нормировки $P(f_1)$ и принятия, согласно (2.5), очевидных соотношений $\int IP(f)df = \gamma$ и $\int(1-I)P(f)df = 1 - \gamma$ с последующим обозначением $P_t(f) = IP(f)/\gamma$ и $P_0(f) = (1 - I)P(f)/(1 - \gamma)$. При этом $P_t(f) = P(f|I - 1)$ и $P_0(f) = P(f|I = 0)$. Безусловно осредненная по времени функция перемежаемости $\langle I\rangle = \gamma$ в силу эргодической гипотезы Максвелла, а соотношения (2.6) справедливы и для осреднения некоторой функции $g = g(f)$, т.е. в данном случае для функций (2.3) и (2.4).

Таким образом, вследствие введения обобщенных функций (2.3) между функциями плотности распределения вероятностей устанавливаются следующие соотношения:

$$IP = \gamma P_t,\ (1 - I)P = (1-\gamma)P_0,\ P(f_1) = \gamma P_t(f) + (1-\gamma)P_0(f) \tag{2.7}$$

последнее из которых следует из (2.5) и согласуется с известной формулой полной вероятности.

На основании (2.3), (2.6) и (2.7) полное среднее значение функции f_1 выражается через ее условные средние (для каждой из перемежающихся турбулентно-нетурбулентных областей течения) и коэффициент перемежаемости

$$\langle f_1\rangle = \gamma\langle f\rangle_t + (1-\gamma)\langle f\rangle_0 \tag{2.8}$$

Безусловное и условное осреднения функций (2.4), выражающих поведение параметров турбулентной (f_t) и нетурбулентной (f_0) сред в поле течения Ω, дают, согласно (2.6) и (2.7), искомые взаимосвязи

$$\langle f_t\rangle = \gamma\langle f\rangle_t,\ \langle f_t\rangle_t \equiv \langle f\rangle_t,\ \langle f_0\rangle = (1-\gamma)\langle f\rangle_0,\ \langle f_0\rangle_0 \equiv \langle f\rangle_0 \tag{2.9}$$

Полученные соотношения указывают на принципиальную разницу между условным и безусловным осреднением некоторой характеристики турбулентной (нетурбулентной) среды. Именно это обстоятельство вместе с (2.8) и условием $\langle f\rangle = \langle f_1\rangle$ (ввиду стохастической эквивалентности f и f_1) используется для развиваемого далее подхода.

Обобщение полученных результатов на случай осреднения входящих в уравнения гидродинамики параметров, включая всевозможные комбинации из их произведений, достигается путем введения случайного вектора $\xi = \xi(u_1, u_2, u_3, \rho, p, \ldots \varepsilon)$. Причем по аналогии со сказанным выше $\xi_1 = I\xi + (1 - I)\xi$, $IP(\xi) = \gamma P_t(\xi)$, $(1 - I)P(\xi) = (1 - \gamma)P_0(\xi)$, совместная функция плотности распределения вероятностей $P(\xi) = P(\xi_1)$ и нормирована, т.е. $\int \ldots \int P(\xi)du_1du_2\ldots d\varepsilon = 1$, а значение $\langle\xi\rangle = \langle\xi_1\rangle$ ввиду стохастической эквивалентности ξ и ξ_1. Теперь операция осреднения некоторой величины Q (как компоненты вектора ξ) приводится по формулам

$$\langle Q\rangle = \int QP(\xi)d\xi,\ \langle Q\rangle_t = \int QP_t(\xi)d\xi,\ \langle Q\rangle_0 = \int QP_0(\xi)d\xi \tag{2.10}$$

$$P_t(\xi) \equiv P(\xi | I = 1),\ \ P_0(\xi) \equiv P(\xi | I = 0)$$

Здесь, как и в случае (2.6), возможна замена Q на Q_1. Соотношения (2.10) формально совпадают с (2.6), т.е. выражения (2.8), (2.9) сохраняют вид и в данном случае. Вместе с тем (2.10) применимы и для осреднения значений, составленных из произведения параметров. Для примера, $Q = uv$ и значение $\langle uv\rangle \equiv \mathrm{Muv} = \int uvP(\xi)d\xi = \int\int uv\ P(u, v)dudv = \gamma\langle uv\rangle_t + (1 - \gamma)\langle uv\rangle_0$. При этом $\mathrm{Muv} = \mathrm{MuMv} + \mathrm{cov}\,(u, v)$, $\mathrm{MuMv} = \langle u\rangle\langle v\rangle$, $\mathrm{cov}\,(u, v) = \mathrm{M}[(u - \mathrm{Mu})(v - \mathrm{Mv})] = \langle u'v'\rangle$, что используется для вывода искомых уравнений.

Значения для условных средних находятся аналогичным образом, с той лишь разницей, что пульсационные составляющие в этом случае определяются относительно условных средних значений для каждой из перемежающихся сред ($Q_t' = Q_t - \langle Q\rangle_t$, когда $(\mathbf{x}, t) \in \Omega_t$, и $Q_0' = Q_0 - \langle Q\rangle_0$, когда $(\mathbf{x}, t) \in \Omega_0$). Например, $\langle uv\rangle_t = \langle u\rangle_t\langle v\rangle_t + \langle u'v'\rangle_t$. Взаимосвязь условных и полных средних определяется по (2.9), так что ковариация

$$\langle u'v'\rangle = \gamma\langle u'v'\rangle_t + (1-\gamma)\langle u'v'\rangle_0 + \gamma(1-\gamma)(\langle u\rangle_t - \langle u\rangle_0)(\langle v\rangle_t - \langle v\rangle_0) \tag{2.11}$$

т.е. использование только градиентных гипотез для выражения $\langle u'v'\rangle$ может быть недостаточным из-за последнего слагаемого.

3. Как выясняется, более строгое (с возможностью определения условных и полных средних) развитие статистической теории турбулентных течений, неотъемлемым свойством которых является перемежаемость, требует введения функции перемежаемости (2.2) и представления мгновенных характеристик течения в виде обобщенных функций (2.3), (2.4). При этом функция перемежаемости $I = I(t)$ в точке $\mathbf{x} = \mathrm{const}$ выражается через обобщенную функцию Хевисайда в виде знакопеременного ряда $I(t) = \sum(-1)^k\theta(t - t_{sk})$, t_{sk} – моменты времени наблюдения поверхности раздела, $k = 0, 1,\ldots$ Теперь в отличие от [11] величина $\partial I/\partial t = \sum(-1)^k\delta(t - t_{sk})$. Аналогично $\partial I/\partial\mathbf{x} = \sum(-1)^k\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{sk})$ для градиентов "замороженного" поля течения, $t = \mathrm{const}$.

Относительно выражений (2.3) и (2.4) заметим, что с вероятностной точки зрения $f_1 = f_t^* + f_0^*$, где $f_t^* = f | I = 1$ за время наблюдения турбулентной и $f_0^* = f | I = 0$ – нетурбулентной среды. Случайные функции f_t^* и f_0^* определены и абсолютно непрерывны в соответствующих им областях Ω_t и Ω_0, а их значения образуют попарно непересекающиеся множества. Обобщение каждой из функций f_t^* и f_0^* на всю область Ω с целью определения их полных средних приводит к необходимости дополнения значений этих функций соответствующими пустыми множествами. В физическом пространстве это сводится к введению кусочно-непрерывных функций

$$f_t = \begin{cases} f, & I = 1 \\ 0, & I = 0 \end{cases},\quad f_0 = \begin{cases} f, & I = 0 \\ 0, & I = 1 \end{cases}$$

Для проведения операций интегрирования (с целью осреднения) или дифференцирования этих разрывных на границах раздела функций они представляются обобщенными функциями (2.4). Такое представление идентично известным выражениям кусочно-непрерывных функций через обобщенные в виде $f_1(y) = f(y) - \sum h_k \theta(y - y_k)$ в том смысле, что дифференцирование этих функций в том и другом случае приводит к одинаковому результату, а сами функции восстанавливаются по своим производным. Другими словами, в данном подходе функция f заменяется почти везде непрерывной функцией f_1 в виде (2.3), отдельные слагаемые которой представляют собой разрывные функции (2.4). Это возможно в силу стохастической эквивалентности f и f_1, когда $P(f) = P(f_1)$ и $\langle f \rangle = \langle f_1 \rangle$ с точностью до меры нуль. При этом сама функция f может быть гладкой, кусочно-гладкой (с изломами, $h_k = 0$) или кусочно-непрерывной (со скачками $h_k = \mathrm{const}$ на границах раздела). Последнее замечание может быть существенным.

Выражение мгновенных характеристик турбулентного течения через частично осредненные (см. выше) приводит к необходимости рассмотрения возможности разрыва параметров. При этом следует учитывать характер течения в зависимости от числа Re. В этой связи такие параметры течения, как скорость, плотность и др., можно считать непрерывными гладкими функциями только при умеренных числах Re. В случае больших Re возможны поверхности слабого разрыва, когда функции содержат изломы, а их производные на этих поверхностях (границах раздела) существуют только слева и справа. Наконец, при очень больших Re имеют место поверхности сильного разрыва, функции являются кусочно-непрерывными со скачками конечной величины, а производные на границах раздела содержат δ-функции Дирака. Во всех случаях представление исходных функций через обобщенные в виде (2.3) справедливы, поскольку отдельные (дискретные) значения гидродинамических параметров на самих границах не играют роли.

Таким образом, для создания наиболее общего математического аппарата теории необходимо учитывать возможность различного поведения параметров. Во всех случаях при этом уравнения Навье–Стокса применимы для каждой из сред в отдельности. Однако для проведения их безусловного осреднения как раз необходима информация о поведении гидродинамических параметров при переходе через границу. В этой связи параметры должны быть представлены в виде обобщенных функций. Подстановка выраженных таким образом параметров в исходные уравнения приводит к появлению (в случае разрыва параметров) новых слагаемых сингулярного характера. Это же относится и к безусловному осреднению уравнений (предварительно умноженных на I или на $1 - I$) даже для гладких f из-за разрывного характера самой функции перемежаемости. Во всех перечисленных случаях возникают проблемы, связанные с проведением операции безусловного осреднения указанных уравнений.

4. Необходимость осреднения уравнений Навье – Стокса

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_k}{\partial x_k} = 0, \quad \frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_k}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}(\sigma_{ik} - p\delta_{ik}) + \rho B_i \tag{4.1}$$

с помощью $P(\xi)$, где $\xi = \xi(u_1, u_2, u_3, \rho, p, \sigma_{11}, \sigma_{12}, \ldots, B_1, \ldots, B_3)$, определяется возможностью решения осредненных таким образом уравнений относительно средних компонентов вектора скорости. Однако введение функции перемежаемости и умножение уравнений на I (или $1 - I$) с целью описания характеристик турбулентной (нетурбулентной) среды приводит к проблеме осреднения (с помощью $P(\xi)$) входящих в эти уравнения производных. Так, в случае кусочно-непрерывных функций согласно (2.3)

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = I\frac{\partial f}{\partial x} + (1 - I)\frac{\partial f}{\partial x} + h_k \frac{\partial I}{\partial x}$$

где значения $h_k = (f|I = 1 - f|I = 0)_{sk}$ характеризуют скачки функции f на границах раздела. Ввиду сингулярного характера последнего слагаемого безусловное осреднение производной на основе $P(\xi)$ в виде (2.5) невозможно. В равной мере это относится и к производным функций f_t и f_0 вне зависимости от характера функции f, поскольку, например, для $f_t = If$ производная $\partial If/\partial x = I\partial f/\partial x + h_{kt}\partial I/\partial x$, где $h_{kt} = (f|I = 1)_{sk}$. В случае кусочно-гладких функций f с изломами ($h_k = 0$) величина $\partial f_1/\partial x = I\partial f/\partial x + (1 - I)\partial f/\partial x$ и теперь значения производных на границах раздела имеют разрыв. Так как производные от тензора вязких напряжений σ_{ik} в уравнении движения связаны со вторыми производными скорости, то во всех перечисленных случаях они носят сингулярный характер и не могут быть осреднены с помощью $P(\xi)$, представленной в виде (2.5).

В известных подходах, следуя правилам осреднения Рейнольдса, принимается перестановка операции интегрирования (осреднения) и дифференцирования. Особую значимость при этом имеет вопрос о возможности такой перестановки для разрывных функций f_t и f_0.

В связи с принципиальным характером этого вопроса отметим, что при безусловном осреднении производной разрывной функции отмеченная перестановка невозможна. (Впервые, по-видимому, такой вывод сформулирован в [10]. В [11], напротив, такая перестановка используется.)

Для примера, как и в [11], рассмотрим соотношение $\langle\nabla IQ\rangle = \langle I\nabla Q\rangle + \langle Q\nabla I\rangle$. Отсюда при $Q = 1$ получаем тождество. Если теперь, согласно [11], сделать указанную перестановку, т.е. $\langle\nabla IQ\rangle = \nabla\langle IQ\rangle$, то $\langle I\nabla Q\rangle = \nabla\langle IQ\rangle - \langle Q\nabla I\rangle$, и при $Q = 1$ получим уравнение $\nabla\gamma = \langle\nabla I\rangle$ (в [11] правая часть выражена интегралом по поверхности). Как видно, перестановка операций дифференцирования и осреднения в случае разрывной функции вместо тождества приводит к новому уравнению, что и доказывает непригодность такой перестановки. Важно теперь отметить, что для условного осреднения такая перестановка возможна, поскольку внутри турбулентной (нетурбулентной) области функции и их производные непрерывны и $\langle\nabla IQ\rangle_t = \nabla\langle IQ\rangle_t$ ввиду (2.6), причем для $Q = 1$ естественно получаем тождество с нулевым значением правой и левой части. Отсюда следует, что в разрабатываемом здесь подходе возможно использование метода условной выборки, связанного с условным осреднением исходных уравнений (4.1).

Получим теперь уравнения для условных средних путем условного осреднения уравнений Навье–Стокса с помощью функций $P_t(\xi)$ и $P_0(\xi)$. В соответствии с разработанным математическим аппаратом условное осреднение уравнения неразрывности $\partial u_k/\partial x_k = 0$ для течения турбулентной жидкости проводится следующим образом:

$$\int \frac{\partial u_k}{\partial x_k} P_t(\xi)d\xi = \frac{\partial}{\partial x_k}\int u_k P_t(u_k)du_k = \frac{\partial\langle u_k\rangle_t}{\partial x_k} = 0,\quad k = 1,2,3$$

В данном случае операция дифференцирования вынесена за знак интеграла (следствие теоремы Фубини), так как в турбулентной среде ($(\mathbf{x}, t) \in \Omega_t$, $I = 1$) скорость и ее производные непрерывны, функция $P_t(u_k) = P(u_k|I = 1)$ и все условия для перестановки указанных операций выполнены.

Условное осреднение уравнения движения проводится аналогичным образом. К примеру, для второго слагаемого в (4.1) получаем

$$\int \frac{\partial u_i u_k}{\partial x_k} P_t(u_i, u_k)du_i du_k = \frac{\partial\langle u_i u_k\rangle_t}{\partial x_k} = \frac{\partial\langle u_i\rangle_t\langle u_k\rangle_t}{\partial x_k} + \frac{\partial\langle u_i' u_k'\rangle_t}{\partial x_k}$$

Осреднение соответствующих уравнений для нетурбулентной жидкости осуществляется с помощью $P_0(u_k) = P(u_k|I = 0)$.

В результате проведенных операций условного осреднения система уравнений (4.1) расщепляется на две автономные, состоящие из уравнений для условных средних характеристик течения каждой из перемежающихся областей турбулентной и нетурбулентной жидкости, и в данном случае статистически стационарного течения имеют вид

$$\frac{\partial\langle u_k\rangle_r}{\partial x_k}=0,\quad \frac{\partial\langle u_i\rangle_r\langle u_k\rangle_r}{\partial x_k}+\frac{\partial\langle u_i'u_k'\rangle_r}{\partial x_k}=\frac{\partial}{\partial x_k}\langle\sigma_{ik}-p\delta_{ik}\rangle_r+\langle\rho B_i\rangle_r \tag{4.2}$$

где индекс r принимает значения t или 0 для турбулентной или нетурбулентной среды соответственно. Уравнения каждой из систем (4.2) совпадают по виду с уравнениями Рейнольдса. Таким же свойством обладают и уравнения для турбулентных напряжений трения, баланса турбулентной энергии и др. (см. [3]).

5. Новый подход к построению дифференциальных моделей перемещающихся турбулентных течений, основанный на предпринятом здесь развитии статистической теории таких течений с явным учетом эффекта перемежаемости, формулируется достаточно просто: полученные условно осредненные уравнения каждой из систем (4.2) замыкаются с помощью гипотез, соответствующих физическим представлениям о структуре течения каждой из перемежающихся сред. Качественный вид таких гипотез предлагается заимствовать из работ по замыканию уравнений Рейнольдса, заменяя входящие в них полные средние на соответствующие условные. После решения этих уравнений определяются условные средние характеристик каждой из перемежающихся областей турбулентной и нетурбулентной жидкости. В случае необходимости расчета полных средних используются соотношения (2.8), (2.11) и др. Необходимые при этом значения коэффициента перемежаемости могут быть найдены по известным методам [2, 3, 13, 14 и др.].

Возможность трансформации известных моделей турбулентных течений, основанных на уравнениях Рейнольдса, в модели, соответствующие новому подходу, определяется тем, что уравнения (4.2) совпадают по виду с уравнениями Рейнольдса. Таким же свойством обладает и условно осредненные уравнения для напряжений Рейнольдса, турбулентной энергии и др. (см. [3]). Это позволяет применять уже известные (по виду) гипотезы замыкания и методы решения для данного подхода, учитывая тем самым различную структуру течения каждой из перемежающихся сред.

Заключение. Необходимость определения условных средних характеристик турбулентных течений, неотъемлемым свойством которых является перемежаемость, связана с перспективой более детального и точного их описания. Предпринятое в данной работе развитие статистической теории таких течений позволило впервые условно осреднить уравнения Навье–Стокса по каждой из перемежающихся сред. Полученные при этом уравнения для условных средних выгодно отличаются от известных тем, что они не содержат коэффициента перемежаемости, полных средних значений скорости, диссипации и др. и не требуют дополнительных гипотез замыкания. Сформулированный на основе этих уравнений подход в моделировании турбулентных течений позволяет определить условные средние характеристик без привлечения уравнений Рейнольдса. Для определения полных средних используются соотношения теории вероятностей, связывающие полные и заранее вычисленные условные средние и коэффициент перемежаемости. В этом заключаются основные отличия данного подхода от имеющихся.

Математически строгое обоснование подхода достигается за счет представления мгновенных характеристик течения стохастически эквивалентными обобщенными функциями, которые связываются с функцией перемежаемости. Автономное описание условных средних каждой из перемежающихся сред является следствием статистической теории, построенной для одноточечных моментов.

Апробация подхода осуществлялась на относительно хорошо изученном в экспериментальном плане турбулентном и, в общем, неизотермическом течении в случае смешения спутных потоков. Проведенные при этом расчеты [3, 14] как условных для каждой из перемещающихся сред, так и полных средних характеристик скорости, турбулентного напряжения трения, кинетической энергии турбулентности и др., а также коэффициента перемежаемости, заданного по формуле $\gamma = \langle\varepsilon\rangle/\langle\varepsilon\rangle_t$, показало практически полное совпадение с известными опытными данными.

Автор благодарит Б.П. Устименко и А.Н. Секундова за оказанное внимание и высказанные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гуляев А.Н., Козлов В.Е., Секундов А.Н.* К созданию универсальной однопараметрической модели для турбулентной вязкости // Изв. РАН. МЖГ. 1993. № 4. С. 69–81.
2. *Кузнецов В.Р., Сабельников В.А.* Турбулентность и горение. М.: Наука, 1986. 287 с.
3. *Нужнов Ю.В., Устименко Б.П.* Диффузионное горение турбулентных потоков. Алма-Ата: Наука, 1993, 300 с.
4. *Нужнов Ю.В., Устименко Б.П.* К статистической теории диффузионного турбулентного факела // Физика горения и взрыва. 1995. Т. 31. № 2. С. 41–46.
5. Turbulent reacting flows / Ed. P.A. Libby, F.A. Williams, Berlin: Springer-Verlag, 1980. 243 P. (Рус. перев.: Турбулентные течения реагирующих газов / Под ред. П.А. Либби, Ф.А. Вильямса, М.: Мир, 1983. 325 с.).
6. *Bilger R.W.* Conditional moment closure for turbulent reacting flow // Phys. Fluids. A. 1993. V. 5. № 2. P. 436–444.
7. *Клименко А.Ю.* Уравнения для условного среднего и флуктуации диссипации концентрации пассивной примеси // Изв. РАН. МЖГ. 1993. № 5. С. 50–59.
8. *Townsend A.A.* The structure of turbulent shear flow. Cambridge: Univ. Press, 1956. 315 p. (Рус. перев.: *Таунсенд А.А.* Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. 399 с.).
9. *Libby P.A.* On the prediction of intermittent turbulent flows // J. Fluid Mech. 1975. V. 68. Pt 2. P. 273–295.
10. *Saffman P.G.* On the boundary condition at the surface of a porous medium // Stud. Appl. Math. 1971. V. 50. № 2. P. 93–101.
11. *Dopazo C.* On conditioned averages for intermittent turbulent flows // J. Fluid Mech. 1977. V. 81. Pt 3. P. 433–438.
12. *Byggstoyl S., Kollmann W.* Closure model for intermittent turbulent flows // Intern. J. Heat and Mass Trasfer. 1981. V. 24. № 11. P. 1811–1822.
13. *Сабельников В.А.* Полуэмпирическая модель для расчета коэффициента перемежаемости, условно осредненных скоростей и вторых моментов в турбулентных потоках // Уч. зап. ЦАГИ. 1985. Т. 16. № 5. С. 48–59.
14. *Nuzhnov Yu.V., Ustimenko B.P.* A new model for intermittent turbulent flows // Rus. J. Engng Thermophys. 1994. V. 4. № 3. P. 301–311.

Алматы

Поступила в редакцию
5.I.1996