

УДК 533.6.011.5

© 1997 г. С.С. ГРАСЬКИН, М.И. НИШТ

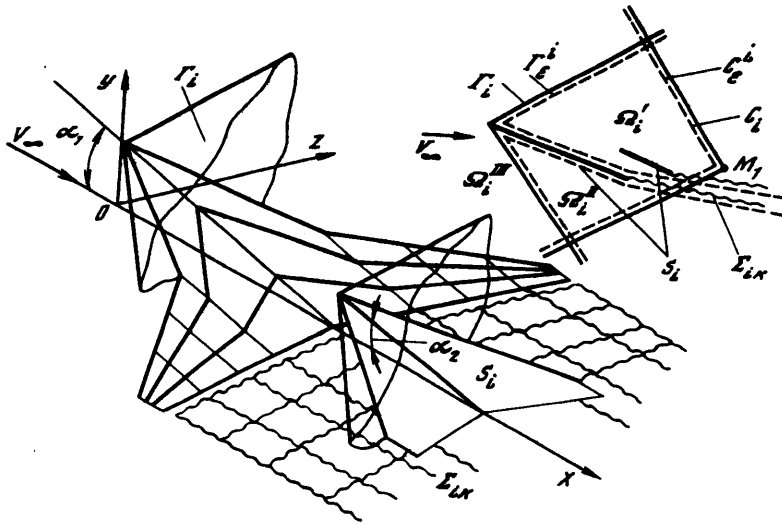
## РАЗВИТИЕ ТЕОРИИ ВОЛНОВОГО ПОТЕНЦИАЛА В НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧАХ ОТРЫВНОГО ОБТЕКАНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ НЕСУЩИХ СИСТЕМ СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ГАЗА

Развита теория волнового потенциала для решения задач нестационарного отрывного обтекания произвольных несущих систем сверхзвуковым изэнтропическим потоком газа. Приведены постановка задачи исследования и вывод основной интегральной формулы типа формулы Кирхгофа, сформулированы и сведены к сингулярным интегральным уравнениям соответствующие краевые задачи. Рассмотрены также вопросы их численной реализации и примеры расчетов.

В настоящее время произвольные пространственные системы несущих поверхностей используются в широком диапазоне изменения скоростей полета как на малых, так и на больших углах атаки, на которых, как показывает эксперимент [1], существует отрыв потока. Одним из основных инструментов исследования их характеристик, в том числе и аэродинамических, является расчет. Спектр используемых для этого методов включает как конечно-разностные методы интегрирования нестационарных уравнений Эйлера, так и методы граничных элементов, предназначенные для решения уравнения вихревого маловозмущенного или потенциального потоков [2–4]. Для сверхзвуковых скоростей с помощью последних из них решены только линейные нестационарные задачи [5, 6]. Их распространение на задачи отрывного обтекания, для которых аэродинамические характеристики рассматриваемых конфигураций нелинейны, является до сих пор не решенной проблемой, требующей проведения фундаментальных теоретических исследований.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим систему тонких несущих поверхностей  $S_i$ , которая в момент времени  $t_0 = 0$  начинает двигаться в идеальном невозмущенном потоке газа с постоянной сверхзвуковой скоростью  $V_\infty$  и с заданными углами атаки  $\alpha$  и скольжения  $\beta$  (фиг. 1). Будем полагать, что в процессе движения обтекание несущих поверхностей – отрывное с заданным местом схода вихревых пелен  $\Sigma_{ik}$  и пространственным положением скачков уплотнения  $\Gamma_i$ . Возникшие при этом возмущения распространяются в пространстве  $\Omega$  с конечной скоростью, а вся завихренность потока сосредоточена на поверхностях  $S_i$ ,  $\Sigma_{ik}$ ,  $\Gamma_i$ , ограничивающих рассматриваемый объем ( $i = 1, 2, \dots, N_S$ ;  $N_S$  – общее число несущих поверхностей, а индекс  $k$  соответствует кормовой, носовой или торцевой пеленам, сходящим с каждого несущего элемента). Тогда искомые нестационарные возмущения в момент времени  $t > t_0$  в произвольной точке  $M_1 \in \Omega$  определяются в виде составляющих вектора скорости  $V'$  через функцию потенциала  $\Phi(M_1, t)$ , которая в подвижной скоростной системе координат  $OXYZ$  удовлетворяет нелинейному волновому уравнению [7]

$$L_\infty(\Phi) = L(\Phi) \tag{1.1}$$



Фиг. 1. Обтекание тонких несущих поверхностей сверхзвуковым потоком

где  $L_\infty$  и  $L$  – операторы вида

$$L_\infty(\Phi) = (1 - M_\infty^2)\Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz} - \frac{2V_\infty}{a_\infty^2}\Phi_{xt} - \frac{1}{a_\infty^2}\Phi_{tt}$$

$$L(\Phi) = \frac{\Phi_{xx}}{a_\infty^2} \left[ (\gamma + 1)V_\infty\Phi_x + \frac{\gamma + 1}{2}\Phi_x^2 + \frac{\gamma - 1}{2}(\Phi_y^2 + \Phi_z^2) \right] +$$

$$+ \frac{\Phi_{yy}}{a_\infty^2} \left[ (\gamma - 1)V_\infty\Phi_x + \frac{\gamma - 2}{2}(\Phi_x^2 + \Phi_z^2) + \frac{\gamma + 1}{2}\Phi_y^2 \right] +$$

$$+ \frac{\Phi_{zz}}{a_\infty^2} \left[ (\gamma - 1)V_\infty\Phi_x + \frac{\gamma - 1}{2}(\Phi_x^2 + \Phi_y^2) + \frac{\gamma + 1}{2}\Phi_z^2 \right] + \frac{2}{a_\infty^2}\Phi_{xy}\Phi_y(V_\infty + \Phi_x) +$$

$$+ \frac{2}{a_\infty^2}\Phi_{xz}\Phi_z(V_\infty + \Phi_x) + \frac{2}{a_\infty^2}\Phi_{yz}\Phi_y\Phi_z + \frac{2}{a_\infty^2}(\Phi_x\Phi_{xt} + \Phi_y\Phi_{yt} + \Phi_z\Phi_{zt})$$

в которых  $M_\infty$ ,  $a_\infty$  – число Маха и скорость звука в невозмущенном потоке,  $\gamma = \text{const}$  – показатель адиабаты.

Решение уравнения (1.1) внутри области  $\Omega$  находится при известных начальных и граничных условиях на несущих элементах  $S_i$ , вихревых пеленах  $\Sigma_{ik}$  и скачках уплотнения  $\Gamma_i$ , на которых выполняются следующие равенства: на несущих элементах  $S_i$

$$\nabla_N \Phi n_N^+ = f_m(N), \quad m = 1 \quad (t < 0), \quad m = 2 \quad (t \geq 0) \quad (1.2)$$

на вихревых пеленах  $\Sigma_i$

$$\nabla_N \Phi n_N^+ = \nabla_N \Phi n_N^-, \quad p_+^+ = p_-^+ \quad (1.3)$$

на скачках уплотнения  $\Gamma_i$  линейные

$$\nabla_N \Phi n_N^+ = \alpha_m^i(N)$$

или нелинейные условия

$$\frac{\nabla_N \Phi n_N^+}{\nabla_N \Phi n_N^-} = \frac{A + B_m^i}{1 + AB_m^i}, \quad A = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}, \quad B_m^i = \left( \frac{p_+^+}{p_-^+} \right)_m$$

$$\nabla_N \Phi \tau_N^+ = \nabla_N \Phi \tau_N^- \quad (1.4)$$

а в области вне  $\Gamma_i$

$$\nabla_N \Phi = 0, \quad p' = 0$$

В выражениях (1.2)–(1.4) векторы  $\tau_N, \mathbf{n}_N, \mathbf{v}_N$  соответствуют касательной, нормали и ко нормали [7] к рассматриваемым поверхностям, а  $p'$  – возмущенное давление.

**2. Вывод основных расчетных формул.** Искомую функцию  $\Phi$  в наблюдаемой точке  $M_1$  в момент времени  $t$  представим в виде последовательности приближений

$$\Phi(M_1, t) = \sum_{j=1}^n \Phi_j(M_1, t)$$

первый член из которой удовлетворяет однородному уравнению, а все последующие – неоднородному уравнению, в котором правая часть  $L(\Phi)$  на  $j$ -й итерации определена через  $\Phi(M_1, t)$  на  $(j-1)$ -й итерации. Для определения первого приближения  $\Phi_1(M_1, t)$  искомой функции  $\Phi(M_1, t)$  вводятся в рассмотрение новые независимые переменные по координатам и времени

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t_b = t_0 - t + \frac{1}{k^2} \left[ \frac{V_\infty(x_1 - x)}{a_\infty^2} \mp \frac{R}{a_\infty} \right]$$

и новые функции

$$\Phi_1(M, t_0) = \Phi_1 \left( x', y', z', t_b + t - \frac{1}{k^2} \left[ \frac{V_\infty(x_1 - x)}{a_\infty^2} \mp \frac{R}{a_\infty} \right] \right) = \Phi_1^l(x', y', z', t_b)$$

где

$$R = \{(x_1 - x)^2 + (1 - M_\infty^2)(y_1 - y)^2 + (1 - M_\infty^2)(z_1 - z)^2\}^{1/2}, \quad k = \sqrt{M_\infty^2 - 1}$$

Здесь  $t_0$  – время выхода волны возмущения из текущей точки  $M \in \Omega$ ,  $t$  – время появления волны возмущения в наблюдаемой точке  $M_1$ ,  $t_b$  – локальное время образования одиночной волны возмущения; знаки минус и плюс и индексы  $l = 1, 2$  соответствуют переднему и заднему фронтам волны возмущения. Преобразуем уравнение (1.1) к новым независимым переменным, рассмотрев при этом передний и задний фронты волны возмущения отдельно друг от друга. В результате для функции  $\Phi_1^l$  получим уравнение вида

$$\frac{1}{R} \nabla' \Phi_1^l + \frac{2}{a_\infty R^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Phi_1^l}{\partial t_b} \right) = 0 \quad (2.1)$$

где  $r$  – расстояние между текущей и наблюдаемой точками

$$\nabla' \Phi_1^l = (1 - M_\infty^2) \Phi_{1x'x'}^l + \Phi_{1y'y'}^l + \Phi_{1z'z'}^l$$

Проинтегрируем теперь уравнение (2.1) по выбранной области  $\Omega$ , на границе которой, включающей характеристический конус  $C_i$ , в нуль обращается подинтегральная функция  $R$ , на несущих поверхностях  $S_i$  и вихревых пеленах  $\Sigma_{ik}$  терпит разрыв сама искомая функция  $\Phi_1^l$ , а на поверхности скачка уплотнения  $\Gamma_i$  – ее нормальная производная. Эти поверхности должны быть выделены из рассматриваемой области  $\Omega$  и заменены бесконечно близкими к ним поверхностями  $S_\epsilon^i, \Sigma_\epsilon^{ik}, C_\epsilon^i$  и  $\Gamma_\epsilon^i$  (фиг. 1) [8]. В соответствии с этим область  $\Omega$  разделится на две части: на область  $\Omega_\epsilon$ , ограниченную

введенными поверхностями  $S_\epsilon^i$ ,  $\Sigma_\epsilon^{ik}$ ,  $C_\epsilon^i$  и  $\Gamma_\epsilon^i$ , и область  $\Omega - \Omega_\epsilon$ , лежащую за поверхностями разрыва  $S_i$ ,  $\Sigma_{ik}$ ,  $C_i$  и  $\Gamma_i$ , но вне введенных выше поверхностей. К области  $\Omega_\epsilon$  и к функциям  $1/R$  и  $\Phi_1^{i'}$  применим вторую формулу Грина [9] при условии, что время образования одиночной волны возмущения  $t_b$  в точке  $M$  стремится к нулю

$$\iint_{\Omega_\epsilon} \left[ \frac{1}{R} \nabla' \Phi_1^{i'} - \Phi_1^{i'} \nabla' \frac{1}{R} \right] d\Omega = \iint_{S_\epsilon^i + \Sigma_\epsilon^{ik} + \Gamma_\epsilon^i + C_\epsilon^i} \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi_1^{i'}}{\partial v_N^+} - \Phi_1^{i'} \frac{\partial}{\partial v_N^+} \left( \frac{1}{R} \right) \right] dS \quad (2.2)$$

где  $v_N^+$  — направление внешней конормали в точке  $\mathbf{n}$ , являющейся источником нестационарного возмущения, определяемое равенством

$$v_N^+ = (1 - M_\infty^2) \cos \gamma_1 \mathbf{i} + \cos \gamma_2 \mathbf{j} + \cos \gamma_3 \mathbf{k}$$

Здесь  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  — углы между внешней нормалью  $\mathbf{n}_N^+$  и координатными осями.

Из суммы интегралов (2.2) рассмотрим интеграл по поверхности  $C_\epsilon^i$ , близкой к поверхности характеристического конуса  $C_i$ . Дифференцирование в нем искомой функции  $\Phi_1^{i'}$  по конормали  $v_N^+$  есть дифференцирование по направлению образующей характеристической поверхности  $C_i$ , на которой величина  $R$  есть малая величина порядка  $\epsilon$ , равная  $R'$ . В результате получим следующее равенство:

$$\iint_{C_\epsilon^i} \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi_1^{i'}}{\partial v_N^+} dS = \frac{k}{\epsilon} \left[ \int_{l_1^i} \Phi_1^{i'}(N, 0) dl - \int_{l_2^i} \Phi_1^{i'}(N, 0) dl \right] \quad (2.3)$$

где  $l_1^i, l_2^i$  — линии пересечения характеристической поверхности  $C_\epsilon^i$  с плоскостью  $S_\delta^i$ , перпендикулярной вектору скорости набегающего потока, и с поверхностью  $\Gamma_\epsilon^i$ , близкой к скачку уплотнения  $\Gamma_i$ . Выбрав теперь наблюдаемую точку  $N'$  в центре круга, являющегося сечением характеристической поверхности  $C_\epsilon^i$  этой плоскостью, и полагая при этом функцию  $\Phi_1^{i'}$  на  $S_\delta^i$  постоянной и равной  $\Phi_1^{i'0l}$ , первый член интеграла (2.3) преобразуем к виду

$$\int_{l_1^i} \Phi_1^{i'}(N, 0) dl = \Phi_1^{i'0l}(N', 0) 2\pi r$$

При величине  $\delta = x_1 - x_{N'}$ , стремящейся к нулю, точка  $N'$  стремится к наблюдаемой точке  $M_1$  и тогда  $r = \epsilon/k$ . Учитывая это, найдем

$$\iint_{C_\epsilon^i} \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi_1^{i'}}{\partial v_N^+} dS = 2\pi \Phi_1^{i'}(M_1, 0) - \frac{k}{\epsilon} \int_{l_2^i} \Phi_1^{i'}(N, 0) dl \quad (2.4)$$

В интеграле по поверхности  $\Gamma_\epsilon^i$ , близкой к поверхности скачка уплотнения  $\Gamma_i$ , дифференцирование функций  $R$  и  $\Phi_1^{i'}$  также производится по направлению внешней конормали  $v_N^+$  к области  $\Omega_\epsilon$ . Это направление совпадает с направлением вектора касательной  $\tau_N$  к поверхности скачка уплотнения  $\Gamma_i$ , вдоль которого функция  $\Phi_1^{i'}$  также постоянна, и тогда вместо интеграла (2.2) по поверхности  $\Gamma_\epsilon^i$  получим

$$\iint_{\Gamma_\epsilon^i} \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi_1^{i'}}{\partial v_N^+} - \Phi_1^{i'} \frac{\partial}{\partial v_N^+} \left( \frac{1}{R} \right) \right] dS = -k \left[ \int_{l_3^i} \Phi_1^{i'}(N, 0) \frac{1}{R} dl - \int_{l_2^i} \Phi_1^{i'}(N, 0) \frac{1}{R} dl \right]$$

где  $l_3^i$  — линия пересечения несущих поверхностей со скачком уплотнения.

Объединив полученный результат с (2.4), при  $\varepsilon \rightarrow 0$  найдем

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \frac{1}{R} \nabla' \Phi_1' d\Omega = & \iint_{S_i + \Sigma_{ik}} \left[ \frac{1}{R} \left( \frac{\partial \Phi_1'}{\partial v_N^+} \right)_{N,0} - \Phi_1'(N,0) \frac{\partial}{\partial v_N^+} \left( \frac{1}{R} \right) \right] dS + \\ & + 2\pi \Phi_1'(M_1,0) - k \int_{l_3} \Phi_1'(N,0) \frac{1}{R} dl \end{aligned} \quad (2.5)$$

Следует отметить, что при записи интегралов (2.5) в состав элемента границы  $S_i$  кроме собственно несущих элементов включены их продолжения до пересечений со скачками уплотнения  $\Gamma_i$ .

Второй член уравнения (1.1) интегрируем по области  $\Omega_{\varepsilon,i}$  в сферической системе координат с параметрами  $r'$ ,  $\varphi$ ,  $\theta$  и с центром в наблюдаемой точке  $M_1$ , что позволяет получить соответствующие поверхностные интегралы по всей границе  $S_{\varepsilon}^* \in (S_{\varepsilon}^i, \Sigma_{\varepsilon}^{ik}, \Gamma_{\varepsilon}^i, C_{\varepsilon}^i)$  этой области

$$\iiint_{\Omega_{\varepsilon,i}} \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Phi_1'}{\partial t_b} \right) d\Omega = \iint_{S_{\varepsilon}^*} \frac{r^2}{R^2} \left( r \frac{\partial \Phi_1'}{\partial t_b} \right) d\omega' \quad (2.6)$$

где  $d\omega'$  – телесный угол, под которым виден из наблюдаемой точки  $M_1$  элемент границы  $dS_{\varepsilon}^*$ . Величина  $d\omega'$  для части границы  $S_{\varepsilon}^*$ , включающей характеристическую поверхность  $C_{\varepsilon}^i$ , будет равна нулю, а для части границы  $S_{\varepsilon}^*$ , включающей поверхность  $\Gamma_{\varepsilon}^i$ , близкую к поверхности скачка уплотнения  $\Gamma_i$ , будем иметь постоянство функции вдоль ее касательного направления. Следовательно, на этих поверхностях получим равенство нулю производной искомой функции  $\Phi_1'$  по времени  $t_b$ , а на части границы  $S_{\varepsilon}^*$ , включающей несущие элементы  $S_{\varepsilon}^i$  и вихревые пелены  $\Sigma_{\varepsilon}^{ik}$ , интегралы (2.6) приведем к виду

$$\iint_{S_{\varepsilon}^i + \Sigma_{\varepsilon}^{ik}} \frac{r^2}{R^2} \left( r \frac{\partial \Phi_1'}{\partial t_b} \right) d\omega' = \iint_{S_{\varepsilon}^i + \Sigma_{\varepsilon}^{ik}} \frac{r^2 \mathbf{n}_N^+}{R^2} \frac{\partial \Phi_1'}{\partial t_b} (N,0) dS \quad (2.7)$$

Сумма выражений (2.7) и (2.5) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  позволяет теперь найти функцию  $\Phi_1'(M_1, 0)$  в виде

$$\begin{aligned} 2\pi \Phi_1'(M_1,0) - k \int_{l_3} \Phi_1'(N,0) \frac{1}{R} dl + \frac{2}{a_{\infty}} \iint_{S_i + \Sigma_{ik}} \frac{r^2 \mathbf{n}_N^+}{R^2} \frac{\partial \Phi_1'}{\partial t_b} (N,0) dS + \\ + \iint_{S_i + \Sigma_{ik}} \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi_1'}{\partial v_N^+} (N,0) - \Phi_1'(N,0) \frac{\partial}{\partial v_N^+} \left( \frac{1}{R} \right) \right] dS = 0 \end{aligned}$$

Вернемся вновь к старым координатам и к функции  $\Phi_1'(M_1, t)$ , для которой

$$\Phi_1'(M_1, 0) = \Phi_1'(M_1, t), \quad \frac{\partial \Phi_1'}{\partial v_N^+} = \frac{\partial \Phi_1'}{\partial v_N^+} + \frac{\partial \Phi_1'}{\partial t_b} \left( \frac{V_{\infty}}{a_{\infty}^2} \cos \gamma_1 + \frac{\mathbf{r} \mathbf{n}_N^+}{a_{\infty} R} \right)$$

При этом конормаль направлена из наблюдаемой точки  $M_1$  в источник возмущений  $N$ . С учетом этого получим

$$\Phi_1'(M_1, t) = -\frac{1}{2\pi} \left[ \iint_{S_i + \Sigma_{ik}} \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi_1'}{\partial v_N^+} (N, t_{1,2}) - \Phi_1'(N, t_{1,2}) \frac{\partial}{\partial v_N^+} \left( \frac{1}{R} \right) \right] dS - \right.$$

$$-\frac{V_\infty}{a_\infty^2} \iint_{S_i + \Sigma_{ik}} \frac{1}{R} \dot{\Phi}'_1(N, t_{1,2}) \cos \gamma_1 dS + \frac{1}{a_\infty} \iint_{S_i + \Sigma_{ik}} \frac{\mathbf{r} \mathbf{n}_N^+}{R^2} \dot{\Phi}'_1(N, t_{1,2}) dS - k \int_{l_3} \dot{\Phi}'_1(N, t_{1,2}) \frac{dl}{R} \quad (2.8)$$

В формуле (2.8) потенциал  $\Phi'_1$  и его производные по конормали и времени отличны от нуля в том случае, если значения величин  $t_{1,2}$ , определяемые равенством

$$t_{1,2} = t - \frac{1}{k^2} \left[ \frac{V_\infty(x_1 - x)}{a_\infty^2} \mp \frac{R}{a_\infty} \right]$$

положительны. В противном случае сам потенциал и его производные будут нулевыми. Выполнение условия  $t_{1,2} > 0$  физически будет означать, что волна возмущений, вышедшая в момент времени  $t$  из контрольной точки  $M_1 \in \Omega$ , достигла текущей точки  $N \in S^*$ , удаленной от  $M_1$  на расстояние, равное  $r$ , и в дальнейшем будет воздействовать на эту точку. В прямом движении это же условие означает, что волна возмущения, возникшая в точке  $N \in S^*$  в момент времени  $t_0 = 0$ , к моменту времени  $t$  достигла наблюдаемой точки  $M_1 \in \Omega$  и далее будет воздействовать на эту точку.

**3. Формулировка краевой задачи и основные интегральные уравнения относительно интенсивностей.** На основе интегральной формулы (2.8) сформулируем краевую задачу, поскольку непосредственно для расчетов рассматриваемая формула непригодна и требует известных значений самой функции и ее производных по конормали и времени на границе  $S^*$ , включающей несущие элементы  $S_i$ , вихревые пелены  $\Sigma_{ik}$  и скачки уплотнения  $\Gamma_i$ . Поэтому целесообразно на основе комбинации решений, получаемых с помощью этой интегральной формулы, свести решаемую задачу к краевой задаче Дирихле или Неймана. Тип краевой задачи должен соответствовать физической сущности моделирования течения и, в частности, определяться возможностью моделировать поверхности тангенциального разрыва, на которых нормальная производная потенциала  $\partial\Phi_1 / \partial n_N^+$  непрерывна, а касательная  $\partial\Phi_1 / \partial \tau_N^+$  терпит разрыв. С этой точки зрения краевую задачу удобнее сформулировать в терминах потенциала двойного слоя (задача Дирихле) с плотностью распределения  $g(N, t)$  на несущих элементах  $S_i$  и с плотностью  $\mu(N, t)$  на вихревых пеленах  $\Sigma_{ik}$ .

Итак, рассмотрим фиг. 1, согласно которой наличие поверхностей разрыва  $S_i, \Sigma_{ik}, \Gamma_i$  делит выбранную область  $\Omega$  на три части:  $\Omega', \Omega'', \Omega'''$ . Границей области  $\Omega'$  является скачок уплотнения  $\Gamma_i$ , характеристический конус  $C_i$ , несущие элементы  $S_i$  и вихревые пелены  $\Sigma_{ik}$ . Область  $\Omega''$  отделена от области  $\Omega'$  несущими элементами  $S_i$  и вихревыми пеленами  $\Sigma_{ik}$ , а область  $\Omega'''$  отделена от областей  $\Omega'$  и  $\Omega''$  соответственно поверхностью скачка уплотнения  $\Gamma_i$ . Применим теперь к каждой из рассматриваемых областей интегральную формулу (2.8), а затем полученные результаты сложим, учитывая при этом направления внешних нормалей и непрерывность производной  $\partial\Phi_1 / \partial \mathbf{v}_N^+$  при переходе через поверхности  $S_i$  и  $\Sigma_{ik}$ , а производной  $\partial\Phi_1 / \partial \tau_N^+$  – при переходе через скачок уплотнения  $\Gamma_i$

$$\begin{aligned} \Phi_1(M_1, t) = & -\frac{1}{4\pi} \left[ \iint_{S_i} [g(N, t_{1,2})] \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_N^+} \left( \frac{1}{R} \right) dS + \frac{V_\infty}{a_\infty^2} \iint_{S_i} \frac{1}{R} [\dot{g}(N, t_{1,2})] \cos \gamma_1 dS \pm \right. \\ & \left. \pm \frac{1}{a_\infty k^2} \iint_{S_i} \frac{1}{R} [\dot{g}(N, t_{1,2})] \frac{\partial R}{\partial \mathbf{v}_N^+} dS + k \int_{l_3} [g(N, t_{1,2})] \frac{dl}{R} \right] + \\ & + \iint_{\Sigma_{ik}} \frac{1}{R} [\mu(N, t_{1,2})] \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_N^+} \left( \frac{1}{R} \right) dS + \frac{V_\infty}{a_\infty^2} \iint_{\Sigma_{ik}} \frac{1}{R} [\dot{\mu}(N, t_{1,2})] \cos \gamma_1 dS \pm \end{aligned}$$

$$\pm \frac{1}{a_\infty k^2} \iint_{\Sigma_{ik}} \frac{1}{R} [\dot{\mu}(N, t_{1,2})] \frac{\partial R}{\partial \mathbf{v}_N^+} dS \quad (3.1)$$

Здесь квадратные скобки при определении плотностей  $g, \mu$ , равных скачку потенциала, и их производных по времени  $\dot{g}$  и  $\dot{\mu}$  означают их вычисление в моменты времени  $t_1 \geq 0$  и  $t_2 \geq 0$ , соответствующие охвату источника  $N$  передним и задним фронтами волны возмущения, вышедшей из точки  $M_1$  в момент времени  $t$ . Приняв во внимание

$$\frac{\partial g}{\partial \mathbf{v}_N^+} = \dot{g} \left( \frac{V_\infty}{a_\infty^2} \cos \gamma_1 \pm \frac{1}{a_\infty k^2} \frac{\partial R}{\partial \mathbf{v}_N^+} \right)$$

формулу (3.1) упростим

$$\Phi_1(M_1, t) = -\frac{1}{4\pi} \left[ \iint_{S_i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_N^+} \left[ \frac{g}{R} \right] dS + k \int_{l_j} [g] \frac{dl}{R} + \iint_{\Sigma_{ik}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_N^+} \left[ \frac{\mu}{R} \right] dS \right] \quad (3.2)$$

Итак, в нестационарной постановке получено выражение для расчета потенциала  $\Phi_1(M_1, t)$ . При этом искомая функция может быть определена в некоторый момент времени  $t$  в произвольной точке объема  $\Omega$ , если известна величина разрыва этой функции на границе  $S^*$ , включающей вихревые пелены  $\Sigma_{ik}$ , несущие элементы  $S_i$  и линии пересечения последних из них со скачками уплотнения  $\Gamma_i$ . Следует отметить, что в сравнении с [7, 11] формула (3.2) имеет более общий вид и включает в себя особенности получаемого решения на скачке уплотнения  $\Gamma_i$ .

Формула (3.2) совместно с граничными условиями (1.2)–(1.4) используется для вывода соответствующих интегральных уравнений относительно искомых интенсивностей  $g(N, t)$ . Сначала составим уравнение для определения этих интенсивностей на самих элементах  $S_i$  при условии, что вихревые пелены  $\Sigma_{ik}$  отсутствуют. В результате получим

$$\begin{aligned} & \frac{k^2}{4\pi} \sum_i \iint_{S_i} [g(N, t_{1,2})] \nabla_{M_1} \left( \frac{\mathbf{r} \mathbf{n}_N^+}{R^3} \right) \mathbf{n}_{M_1}^+ dS \pm \frac{1}{2\pi a_\infty} \sum_i \iint_{S_i} [\dot{g}(N, t_{1,2})] \nabla_{M_1} \left( \frac{\mathbf{r} \mathbf{n}_N^+}{R^2} \right) \mathbf{n}_{M_1}^+ dS + \\ & + \frac{k}{4\pi} \nabla_{M_1} \left[ \sum_i \int_{l_j} [g(N, t_{1,2})] \frac{dl}{R} \right] \mathbf{n}_{M_1}^+ = f(M_1) \end{aligned} \quad (3.3)$$

В последнем интеграле разрыв функции  $g$ , возникший на линии пересечения скачка уплотнения  $\Gamma_i$  с несущим элементом  $S_i$ , распространяется вдоль образующих поверхности скачка. При этом воздействие разрыва искомой функции на контрольную точку  $M_1$  сохраняется постоянным. Тогда, учитывая

$$\nabla_{M_1} \left( \frac{\mathbf{r} \mathbf{n}_N^+}{R^3} \right) \mathbf{n}_{M_1}^+ = \frac{3(\mathbf{R} \mathbf{n}_{M_1}^+)(\mathbf{r} \mathbf{n}_N^+) - R^2(\mathbf{n}_N^+ \mathbf{n}_{M_1}^+)}{R^5}$$

$$\nabla_{M_1} \left( \frac{\mathbf{r} \mathbf{n}_N^+}{R^2} \right) \mathbf{n}_{M_1}^+ = \frac{2(\mathbf{r} \mathbf{n}_N^+)(\mathbf{R} \mathbf{n}_N^+) - R^2(\mathbf{n}_N^+ \mathbf{n}_{M_1}^+)}{R^4}$$

$$\nabla_{M_1} \left[ \int_{l_j} [g] \frac{dl}{R} \right] \mathbf{n}_{M_1}^+ = k \int_{l_j} \left[ \frac{dg}{d\tau_N^+} \right] \frac{(\mathbf{n}_N^+ \mathbf{n}_{M_1}^+)}{R} dl - \int_{l_j} [g] \frac{(\mathbf{R} \mathbf{n}_N^+)(\mathbf{n}_N^+ \mathbf{n}_{M_1}^+)}{R^3} dl$$

$$\mathbf{R} = (x - x_1)\mathbf{i} + (1 - M_\infty^2)(y - y_1)\mathbf{j} + (1 - M_\infty^2)(z - z_1)\mathbf{k}$$

в безразмерных пространственно-временных координатах ( $b_a$  – характерный линейный размер)

$$\xi = \frac{x}{b_a}, \quad \eta = \frac{y}{b_a}, \quad \zeta = \frac{z}{b_a}, \quad \tau = \frac{V_\infty t}{b_a}$$

и функций

$$g = V_\infty b_a G, \quad f(M_1) = V_\infty f'(M_1)$$

придем к сингулярному интегральному уравнению относительно искомым интенсивностей  $G(N, \tau)$

$$\begin{aligned} & \frac{k^2}{4\pi} \sum_i \iint_{S_i} [G(N, \tau_{1,2})] \frac{3(\mathbf{Rn}_{M_1}^+)(\mathbf{rn}_N^+) - R^2(\mathbf{n}_N^+ \mathbf{n}_{M_1}^+)}{R^5} dS \pm \\ & \pm \frac{M_\infty}{2\pi} \sum_i \iint_{S_i} [\dot{G}(N, \tau_{1,2})] \frac{2(\mathbf{rn}_N^+)(\mathbf{Rn}_{M_1}^+) - R^2(\mathbf{n}_N^+ \mathbf{n}_{M_1}^+)}{R^4} dS - \\ & - \frac{k^2}{4\pi} \sum_i \iint_{l_i} [G(N, \tau_{1,2})] \frac{(\mathbf{Rn}_{M_1}^+)(\mathbf{n}_N^+ \mathbf{n}_{M_1}^+)}{R^3} dl + \frac{k^2}{4\pi} \sum_i \int_{l_i} \left[ \frac{\partial G}{\partial \tau_N^+}(N, \tau_{1,2}) \right] \frac{(\mathbf{n}_N^+ \mathbf{n}_{M_1}^+)}{R} dl = f'(M_1) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Относительно полученного уравнения сделаем два замечания. Замечание первое относится к вычислению контурных интегралов и состоит в том, что контрольная точка  $M_1$  может находиться внутри или вне области влияния  $i$ -го несущего элемента. Поэтому разрывы функции  $G(N, \tau)$  будут влиять на эту точку лишь в том случае, если она принадлежит области, лежащей за огибающей наиболее передних конусов Маха, исходящих от ее передней кромки, но перед огибающей этих же конусов, исходящих от ее задней кромки. В противном случае влияние разрыва функции  $G(N, \tau)$  на скачке уплотнения  $\Gamma_i$  на контрольную точку  $M_1$  не распространяется. Замечание второе относится к вычислению интегралов непосредственно по поверхности самих несущих элементов  $S_i$ . В первом интеграле искомая функция  $G(N, \tau)$  присутствует в явном виде, а во втором – в виде производной по времени  $\dot{G}(N, \tau)$ , которая существует лишь на линии, определяемой в безразмерных координатах уравнением

$$\tau - \frac{M_\infty^2}{k^2} \left( (\xi_1 - \xi) \mp \frac{R}{M_\infty} \right) = 0 \quad (3.5)$$

Для вычисления первого интеграла используем расчетные формулы, приведенные в [10], а для второго интеграла, содержащего производную  $\dot{G}$ , получим следующие соотношения.

**4. Интеграл по поверхности вихревой рамки, содержащий производную  $\dot{G}$ .** Сначала рассмотрим изолированный несущий элемент  $S_1$ , лежащий в плоскости, параллельной вектору  $V_\infty$ , и контрольную точку  $M_1$ , удаленную от этой плоскости на величину, равную  $\eta_1$  (фиг. 2). Интегралы, соответствующие этому случаю обтекания, обозначим через

$$I_{S_1}(\tau) = \pm \frac{M_\infty k^2 \eta^2}{\pi} \iint_{S_1} [\dot{G}(N, \tau_{1,2})] \frac{dS}{R^4} \pm \frac{M_\infty}{2\pi} \iint_{S_1} [G(N, \tau_{1,2})] \frac{dS}{R^2} = I_{S_1}^{(1)}(\tau) + I_{S_1}^{(2)}(\tau) \quad (4.1)$$

Пусть в момент времени  $t_0$  на поверхности элемента  $S_1$  возникают возмущения, которые в виде сферических волн начинают распространяться в пространстве. Скорость их распространения от неподвижного элемента будет постоянной и равной соот-





где через  $F(\tau)$  обозначена первообразная

$$F(\tau) = \iint_{\Delta S_1} \frac{dS}{R^2}$$

для вычисления которой на элементе  $S_1$  сделаем переход из подвижной прямоугольной системы координат  $OXYZ$  в полярную с координатами  $(\rho, \Theta)$  и центром в источнике возмущения  $O$ . Тогда за время  $\Delta\tau_0$  возмущения по поверхности  $S_1$  распространятся вдоль полярного радиуса на величину  $\Delta\rho$ , а вдоль полярного угла охватят сектор  $\Delta\Theta$ . Тогда в полярных осях  $(\rho, \Theta)$   $dS = \rho d\rho d\Theta$ , а сами величины  $\rho$  и  $R$  могут быть представлены через текущее время  $\tau$  и полярный угол  $\Theta$ . Для такого представления воспользуемся уравнением (3.5) контура  $l$ , которое запишем для заданного времени  $\tau$ , текущей точки  $N \in l$  и контрольной точки  $M_1 \in S_2$

$$a_{11}\xi^2 + a_{22}\zeta^2 + 2a_{13}\xi + 2a_{23}\zeta + a_{33} = 0$$

Полученное уравнение есть уравнение кривой второго порядка с коэффициентами

$$a_{11} = k^2 M_\infty^2, \quad a_{12} = a_{21} = 0, \quad a_{22} = -k^2 M_\infty^2$$

$$a_{13} = k^2 M_\infty^2 (\tau - \xi_1), \quad a_{23} = -k^2 M_\infty \zeta_1$$

$$a_{33} = (k^2 \tau - M_\infty^2 \xi_1)^2 - M_\infty^2 (\xi_1^2 - k^2 \tau_1^2 - k^2 \eta_1^2)$$

и инвариантами

$$I = 2M_\infty^2 k^2, \quad D = M_\infty^4 k^4, \quad A = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{13}a_{31}a_{22}$$

и является окружностью с подвижным центром. Инварианты позволяют определить радиус этой окружности  $\rho$  и координаты ее центра (фиг. 2)

$$\rho = \frac{\tau}{M_\infty} \sin \gamma, \quad \xi_0 = \xi_1 - \tau, \quad \zeta_0 = \zeta_1$$

зная которые, найдем производную  $\dot{\rho} = 1/H(\tau)$  и относительную скорость перемещения центра окружности  $W_0 = V_0/V_\infty$ , равную единице, что свидетельствует о ее перемещении в пространстве со скоростью движения несущего элемента  $S_1$ . Здесь  $H(\tau) = M_\infty \sin \gamma$ ,  $\gamma$  – угол между нормалью  $\mathbf{n}_S^+$  и радиус-вектором  $\mathbf{r}(\tau)$ , соединяющим источник возмущений  $N$  и наблюдаемую точку  $M_1$  в момент времени  $\tau$ .

Возмущения в пространстве распространяются по нормали к поверхности волны возмущения. Следовательно, в каждый момент времени  $\tau$  скорость распространения возмущений по направлению полярного радиуса  $\rho$  складывается из скоростей сферической волны и перемещения самого источника возмущения, помещенного в центр окружности. Исходя из этого, найдем

$$d\rho = \left( \frac{1}{H(\tau)} - \cos \Theta \right) d\tau, \quad R = \pm \left( \sqrt{\tau^2 - M_\infty^2 \eta_1^2} \cos \Theta - \frac{\tau}{M_\infty} \right)$$

Здесь полярный угол  $\Theta$  отсчитывается от оси  $X$ . С учетом сделанных преобразований интеграл (4.2) запишем в виде

$$I_{S_1}^2(\tau) = \mp \frac{[\Gamma_{S_1}(N\tau_{1,2})]}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \tau} \iint_{\tau\Theta} \frac{d\tau d\Theta}{\sqrt{\tau^2 - M_\infty^2 \eta_1^2} \cos \Theta - \tau / M_\infty}$$

Затем проинтегрируем сначала по переменной  $\Theta$ , а потом по  $\tau$ , внося при этом

операцию дифференцирования под знак интеграла. В результате получим

$$I_{S_1}^2(\tau) = \frac{[\Gamma_{S_1}(N\tau_{1,2})]}{\pi} \frac{M_\infty p}{\tau\sqrt{H^2(\tau)-1}} \operatorname{Arth} \sqrt{\frac{H(\tau)+1}{H(\tau)-1}} \Big|_{p_1}^{p_2}, \quad H(\tau) > 1 \quad (4.3)$$

$$I_{S_1}^2(\tau) = -\frac{[\Gamma_{S_1}(N\tau_{1,2})]M_\infty}{2\pi\tau p} \Big|_{p_1}^{p_2}, \quad H(\tau) = 1 \quad (4.4)$$

$$I_{S_1}^2(\tau) = -\frac{[\Gamma_{S_1}(N\tau_{1,2})]}{\pi} \frac{M_\infty p}{\tau\sqrt{1-H^2(\tau)}} \operatorname{Arctg} \sqrt{\frac{1+H(\tau)}{1-H(\tau)}} \Big|_{p_2}^{p_1}, \quad H(\tau) < 1 \quad (4.5)$$

В расчетных формулах (4.3)–(4.5)  $p = \operatorname{tg}(\Theta/2)$  и пределы интегрирования выбираются исходя из условий  $Y(\tau) < \Theta_{1,2} < 2\pi - Y(\tau)$  для переднего фронта,  $-Y(\tau) < \Theta_{1,2} < Y(\tau)$  для заднего фронта волны возмущения ( $Y(\tau) = \arccos 1/H(\tau)$ ).

Аналогичные преобразования могут быть проведены и над интегралом  $I_{S_1}^{(1)}(\tau)$  из рассматриваемой суммы (4.1)

$$I_{S_1}^{(1)}(\tau) = -\frac{2k^2\eta_1^2 M_\infty^2 [\Gamma_{S_1}(N, \tau_{1,2})]}{\pi\tau^3} \left\{ \frac{p}{b(a-bp^2)^2} \left( p^2 + \frac{a}{b} + \frac{2}{3} \right) + \left( 1 \mp \frac{2a}{3b} + \frac{a^2}{b^2} \right) \times \right. \\ \left. \times \left[ \pm \frac{p}{4a(a-bp^2)} \left( \frac{1}{a-bp^2} + \frac{3}{2a} \right) + \frac{3}{8a^2} \Phi(p) \right] \right\} \Big|_{p_1}^{p_2}, \quad a = H(\tau) - 1, \quad b = H(\tau) + 1$$

$$\Phi(p) = -\frac{p}{\sqrt{ab}} \operatorname{Arth} \sqrt{\frac{b}{a}}, \quad a > 0; \quad \Phi(p) = -\frac{p}{\sqrt{ab}} \operatorname{arctg} \sqrt{-\frac{b}{a}}, \quad a < 0; \quad \Phi(p) = \frac{1}{2p}, \quad a = 0$$

Здесь верхний и нижний индексы выбираются соответственно для заднего и переднего фронтов волны возмущения. Объединив полученный результат с (4.3)–(4.5), окончательно найдем

$$I_{S_1}(\tau) = -\frac{2k^2\eta_1^2 M_\infty^3 [\Gamma_{S_1}(N, \tau_{1,2})]}{\pi\tau^3} \times \\ \times \left\{ \frac{p}{b(a-bp^2)^2} \left( p^2 \mp \frac{a}{b} + \frac{2}{3} \right) - \frac{M_\infty [\Gamma_{S_1}(N, \tau_{1,2})]}{\pi\tau} \Phi(p) \right\} \Big|_{p_1}^{p_2} \quad (4.6)$$

При произвольной ориентации несущих элементов  $S_i$  друг относительно друга и вектора  $\mathbf{V}_\infty$  не представляется возможным получить соответствующие расчетные формулы в квадратурах. В этом случае интегралы из уравнения (3.4), содержащие производную  $\dot{G}$ , определяются численно. Например, для контрольной точки  $M_1 \in S_2$  этот интеграл сводится к расчетному случаю

$$I_{S_1}(\tau) = \pm \frac{M_\infty \Gamma_{S_1}(N, \tau_{1,2})}{\pi} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \iint_{S_1} \frac{(\mathbf{r}\mathbf{n}_N^+(\mathbf{R}\mathbf{n}_{M_1}^+))}{R^4} dS - \frac{1}{2} \iint_{S_1} \frac{(\mathbf{n}_N^+\mathbf{n}_{M_1}^+)}{R^2} dS \right] \quad (4.7)$$

в котором поверхность  $S_1$  является плоскостью, заданной уравнением

$$A\xi + B\eta + C\zeta + D = 0, \quad N \in S_1$$

В результате раскрытия неопределенности в интеграле (4.7) получим

$$\Phi_1(\tau) = -\frac{1}{M_\infty \gamma_2} \left[ \int_{\Theta_1}^{\Theta_2} \frac{F_1(\tau, \Theta) F_2(\tau, \Theta) - G'(\tau, \Theta, \Theta')}{(\sqrt{\tau^2 - M_\infty^2 r^2 \cos \Theta - \tau / M_\infty})^3} d\Theta + K(\tau, \Theta_1, \Theta_2) \right] \quad (4.8)$$

$$\Phi_2(\tau) = -\frac{2 \cos \varphi}{\tau \gamma_2} \Phi(p)$$

где  $\varphi$  – угол между векторами нормалей  $\mathbf{n}_N^+$  и  $\mathbf{n}_{M_1}^+$ ;  $F_1(\tau, \Theta) = \mathbf{r} \mathbf{n}_N^+$

$$F_2(\tau, \Theta) = \mathbf{R} \mathbf{n}_{M_1}^+, \quad K(\tau, \Theta_1, \Theta_2) = \int_{\Theta_1}^{\Theta_2} \frac{G'(\tau, \Theta, \Theta')}{(\sqrt{\tau^2 - M_\infty^2 r^2 \cos \Theta - \tau / M_\infty})^3} d\Theta$$

В точках касания фронта волны возмущения характеристической поверхности  $C_i$  (точки  $K$  и  $K'$  на фиг. 2) знаменатель подынтегральной функции обращается в нуль и тогда дискретная схема вычисления интеграла  $\Phi_1(\tau)$  по вихревой ячейке, содержащей такую точку, строится в соответствии с определением его главного значения по Коши [12]. При этом функцию  $G'(\tau, \Theta, \Theta')$  в (4.8) выбираем специальным образом

$$G'(\tau, \Theta, \Theta') = F(\tau, \Theta') + \frac{\partial F(\tau, \Theta')}{\partial \Theta'} \left( \sqrt{\tau^2 - M_\infty^2 r^2 \cos \Theta} - \frac{\tau}{M_\infty} \right)$$

Следует отметить, что при выборе этой функции скалярное произведение  $F(\tau, \Theta) = F_1(\tau, \Theta) F_2(\tau, \Theta)$  определяется для полярного угла  $\Theta'$ , соответствующего точке касания  $K(K')$ . Зная теперь эту функцию, вычислим

$$K(\tau, \Theta_1, \Theta_2) = \frac{2F(\tau, \Theta') M_\infty H^2(\tau)}{\tau} \left[ \left( 1 \mp \frac{2a}{3b} + \frac{a^2}{b^2} \right) \left( \pm \frac{p}{4aq} \left( \frac{1}{q} + \frac{3}{2a} \right) + \frac{3}{8a^2} \Phi(p) \right) + \right. \\ \left. + \frac{p}{bq^2} \left( p^2 \mp \frac{a}{b} + \frac{2}{3} \right) \right]_{\Theta_1}^{\Theta_2} + \frac{\partial F(\tau, \Theta')}{\partial \Theta'} \frac{M_\infty H(\tau)}{\tau} \left[ \frac{p}{q} \left( \frac{1}{a} \pm \frac{1}{b} \right) + \left( \pm \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \Phi(p) \right]_{\Theta_1}^{\Theta_2}$$

а затем уже интеграл (4.7). Здесь  $q = a - bp^2$ .

Высшие приближения искомого решения являются дополнением к рассмотренным выше составляющим и включают возмущенную скорость, индуцируемую объемными источниками

$$V'_\Omega(M_1, t) = -\frac{1}{4\pi k^2} \iiint L(\Phi(M, t_{1,2})) \frac{\mathbf{R}}{R^3} d\Omega \quad (4.9)$$

При этом интенсивность этих источников находится на основе итераций по известным интенсивностям двойного слоя на несущих элементах  $S_i$  и на вихревых пеленах  $\Sigma_{ik}$  и основой расчета является решение интегрального уравнения типа (3.4), в правую часть которого добавляются возмущенные скорости от вихревых пелен и объемных источников.

**5. Дискретные схемы и расчет нагрузки.** Основы используемых здесь дискретных схем рассмотрены в [10] применительно к стационарным отрывным режимам обтекания. Отличие состоит лишь в том, что при нестационарном обтекании построение вихревых пелен осуществляется по временным шагам и, кроме этого, конечная скорость распространения возмущений в сжимаемом потоке приводит к необходимости использования в качестве дискретного образа замкнутой вихревой рамки. Такой переход требует рассматривать коэффициенты влияния каждой такой рамки в зависимости не только от ее положения относительно характеристического конуса с вершиной в выбранной контрольной точке, но и относительно переднего и заднего фронтов волны возмущения, вышедшей из этой точки. При этом будем считать, что вихревая рамка с циркуляцией  $\Gamma_\zeta(N, \tau)$  охвачена передним или задним фронтом волны возмущения,

вышедшей в момент  $\tau = 0$  из точки  $M_1$ , если контрольная точка, принадлежащая этой рамке, охвачена этим контуром.

Для построения дискретной схемы каждый из  $N_p$  несущих элементов делим на  $N_n$  участков, а каждый участок на  $N_z^p$  полос и каждую полосу на  $N_x^p$  отрезков. Через точки деления проводим прямые и в результате получаем вихревые рамки, общее число которых будет равно

$$N_S = \sum_{p=1}^{N_p} \left( N_x^p \sum_{i=1}^{N_n} N_z^{ip} \right)$$

В каждой вихревой рамке на пересечении средних линий размещаем контрольную точку, в которой в заданные моменты времени  $\tau$  выполняется граничное условие непротекания (1.2). Тогда, согласно (3.4), соответствующие коэффициенты влияния в зонах воздействия характеристических конусов и волн возмущения определим по формулам

$$a_{st} = k^2 \iint_{S_i} \frac{3(\mathbf{R}_{st} \mathbf{n}_t^+)(\mathbf{r}_{st} \mathbf{n}_s^+) - R_{st}^2 (\mathbf{n}_s^+ \mathbf{n}_t^+)}{R^5} dS$$

$$b_{st} = \frac{(k^2 - \text{tg}^2 \chi_s)}{\Delta \tau_s^+} \int_{l_3}^+ \frac{(\mathbf{n}_s^+ \mathbf{n}_t^+)}{R_{st}} dl, \quad c_{st} = -\sqrt{k^2 - \text{tg}^2 \chi_s} \int_{l_3}^+ \frac{(\mathbf{R}_{st} \mathbf{n}_s^+)(\mathbf{n}_s^+ \mathbf{n}_t^+)}{R_{st}^3} dl \quad (5.1)$$

Однако при нестационарном обтекании к совокупности коэффициентов (5.1) необходимо добавить коэффициенты, обусловленные наличием производной  $\dot{G}$ , порядок деления которых следующий. В полярной системе вычисляются координаты подвижного центра волн возмущения  $O'$  и радиус-векторы угловых точек  $s$ -й вихревой рамки

$$\xi_{O'} = \xi_1 - \tau, \quad \zeta_{O'} = \zeta, \quad \eta_{O'} = -(A\xi_{O'} + O\zeta_{O'} + D) / B$$

$$r_{O'M_{ik}}^s = \sqrt{(\xi_{ik} - \xi_1 + \tau)^2 + (\zeta_{ik} - \zeta_1)^2 + (\eta_{ik} - \eta_{O'})^2}$$

где  $\xi_{ik}$ ,  $\zeta_{ik}$ ,  $\eta_{ik}$  – координаты  $(ik)$ -й угловой точки этой рамки. При выполнении условия  $r_{O'A_{ik}}^s > \rho$  для всех угловых точек рассматриваемая  $s$ -я вихревая рамка лежит вне круга, ограниченного при заданном времени  $\tau$  передним и задним фронтами волны возмущения. В свою очередь невыполнение этого условия соответствует фронтам волны возмущения, уже прошедшим по рассматриваемой рамке. Очевидно, что в обоих этих случаях производная  $\dot{G}$  будет равна нулю и поэтому такие рамки из дальнейшего рассмотрения исключаются, а интерес представляют лишь те из них, в которых для двух соседних угловых точек  $ik$  и  $i+1, k$  или  $ik$  и  $i, k+1$  выполняются условия  $r_{O'A_{ik}}^s > \rho$  и  $r_{O'A_{i+1,k}}^s < \rho$  или наоборот. При выполнении этих соотношений  $(ik, i+1, k)$ -я или  $(ik, i, k+1)$ -я сторона  $s$ -й вихревой рамки пересекаются контуром волны возмущения, а следовательно, для этой рамки существуют контурные интегралы, обусловленные наличием производной  $\dot{G}$ . Из совокупности этих рамок выделяются две рамки, которым принадлежат точки касания фронта волны возмущения характеристическим конусом  $C_i$ , а для оставшихся по формуле (4.7) рассчитываются соответствующие коэффициенты их влияния. Для чего  $(A_{ik}, A_{i, k+1})$ -я или  $(A_{ik}, A_{i+1, k})$ -я кромка, принадлежащая такой вихревой рамке, с целью определения точек ее пересечения с контуром  $\tau_{1,2} = 0$  разбивается на  $N_l$  элементарных отрезков. После этого область интегрирования по найденной дуге окружности  $\tau_{1,2} = 0$  разбивается на  $N_\Theta$  частей, в которых выбираются текущие точки. Для каждой такой точки вычисляются скалярные произведения  $F_1^i(\tau, \Theta^i)$ ,  $F_2^i(\tau, \Theta^i)$ , а на границах области интегрирования  $\Theta_1^i$

и  $\Theta_2^s$  – функция  $\Delta\Phi^s(p)$ . В результате определение коэффициента влияния  $d_{s't}$ , обусловленного производной  $\dot{G}$ , осуществляется по формуле

$$d_{s't} = \frac{4}{\gamma_2^{s'}} \left[ \sum_{i=1}^{N_\Theta} \frac{F_1^i(\tau, \Theta^i) F_2^i(\tau, \Theta^i)}{(\sqrt{\tau^2 - M_\infty^2 r^{s'^2} \cos \Theta^i - \tau / M_\infty})^3} \Delta\Theta^i - \frac{M_\infty \cos \varphi^{s'}}{\tau} \Delta\Phi^s(p) \right] \quad (5.2)$$

Для оставшихся двух вихревых рамок, которым принадлежат точки пересечения с характеристическим конусом, коэффициент влияния  $d_{s't}$  определим по выражению

$$d_{s't} = \frac{4}{\gamma_2^{s'}} \left[ \sum_{j=1}^2 \frac{F_1^j(\tau, \Theta^j) F_2^j(\tau, \Theta^j) - G_s^{ji}(\tau, \Theta^j, \Theta_{s'}^j)}{(\sqrt{\tau^2 - M_\infty^2 r^{s'^2} \cos \Theta^j - \tau / M_\infty})^3} \Delta\Theta^j + K_{s'}(\tau, \Theta_1^s, \Theta_2^s) - \frac{M_\infty}{\tau} \cos \varphi^{s'} \Delta\Phi^s(p) \right] \quad (5.3)$$

В целом алгоритм расчета циркуляций  $\Gamma_s$  следующий. В связанных с несущими элементами координатах по точкам излома передних и задних кромок задается их геометрия (фиг. 1). Каждый элемент по заданной логике, учитывающей условия стыковки дискретных схем, делится на  $N_s$  вихревых рамок с контрольными точками. На кромках ряда рамок задаются точки отрыва. При этом схема обтекания передних и боковых кромок этих рамок определяется в зависимости от угла атаки и числа Маха, нормальных соответственно к передней или боковой кромке [8]. На первом временном шаге  $\tau = h_\tau$  вихревые пелены и объемные источники отсутствуют и поэтому коэффициенты влияния (5.1)–(5.3) вычисляются только по рамкам, моделирующим несущие элементы. Здесь определяются коэффициенты уравнений  $s$ -й и  $t$ -й вихревых рамок, направляющие косинусы нормалей  $\mathbf{n}_s^+$ ,  $\mathbf{n}_t^+$  и угол  $\varphi^{s'}$  между ними. Для  $s$ -й рамки и  $t$ -й контрольной точки  $M_1$  находится положение переднего  $\tau_1$  и заднего  $\tau_2$  фронтов волны возмущения. При  $\tau_{1,2} < 0$  эта рамка исключается из дальнейшего рассмотрения, а коэффициенты ее влияния полагаются нулевыми. В противном случае вычисляются коэффициенты влияния (5.1). Далее устанавливается совокупность вихревых рамок, которые в момент времени  $\tau = h_\tau$  пересекаются волной возмущения, находятся координаты точек касания фронта волны характеристическим конусом  $C_i$  и определяются коэффициенты (5.2), (5.3).

К этому следует добавить, что при расчете циркуляций для моментов времени  $\tau < 0$  движение несущих поверхностей считается с нулевыми углами атаки и скольжения. В противном случае в правые части интегральных уравнений (3.4) добавляются возмущения, обусловленные стационарным положением вихревых пелен и наличием объемных источников.

На второй итерации в заданных точках отрыва сначала находятся величина и направление скорости движения частиц газа, сосредоточенных в этих точках, а затем расстояние  $dr$ , на которое за интервал времени  $h_\tau$  они перемещаются.

На этом же временном шаге определяются интенсивности объемных источников, для чего область пространства вблизи несущих элементов разбивается на элементарные объемы  $\Delta\Omega_i$ , в центре которых размещаются источники возмущений. По координатам источника возмущений  $M$  и контрольной точки  $M_1$  устанавливается факт воздействия на источник волны возмущения и с учетом этого производится численное определение интеграла (4.11).

Рассмотрим порядок расчета аэродинамической нагрузки  $\Delta C_p = (p_+ - p_-) / q_\infty = C_{p+} - C_{p-}$ , которая затем интегрируется по всем несущим элементам. Здесь  $C_{p+}$  и  $C_{p-}$  – коэффициенты давления соответственно на нижней и на верхней сторонах

рассматриваемой вихревой ячейки, моделирующей часть  $S_i$ -го несущего элемента;  $q_\infty$  – скоростной напор невозмущенного потока.

Для баротропной среды скорость потока газа  $V$  связана с давлением  $p$  через интеграл Коши – Лагранжа, применение которого для нижней и верхней сторон поверхности каждой вихревой ячейки позволяет получить соотношение

$$\pm \frac{1}{2} (V_\infty + V'(M_1, t)) \nabla_{M_1} \Gamma_s + \frac{\partial \Phi_\pm}{\partial t} + \frac{a_\infty^2}{\gamma - 1} [C'_{p\pm}{}^{(\gamma-1)/\gamma} - 1] = \frac{V_\infty^2}{2}$$

на основе которого затем найдем

$$C_{p\pm} = \frac{2}{\gamma M_\infty^2} \left\{ 1 + M_\infty^2 \frac{(\gamma - 1)}{2} \left[ 1 \mp (A_x + A_y + A_z) \mp \frac{\partial \Gamma_s}{\partial \tau} - 2 \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} \right] \right\}^{\gamma/\gamma-1} \quad (5.4)$$

$$A_x = \frac{\partial \Gamma_s}{\partial \xi_s} (\cos \alpha \cos \beta + \zeta_s \omega_y - \eta_s \omega_z + w'_x(M_1, \tau))$$

$$A_y = \frac{\partial \Gamma_s}{\partial \eta_s} (\sin \alpha \cos \beta + \xi_s \omega_z - \zeta_s \omega_x + w'_y(M_1, \tau))$$

$$A_z = \frac{\partial \Gamma_s}{\partial \zeta_s} (-\sin \beta + \eta_s \omega_x - \xi_s \omega_y + w'_z(M_1, \tau))$$

Здесь  $w'_x, w'_y, w'_z$  – составляющие вектора безразмерной возмущенной скорости;  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  – заданные угловые скорости вращения несущих элементов относительно центра масс,  $C'_{p\pm} = p_\pm/p_\infty$ .

Однако непосредственное применение формулы (5.4) требует определения как искомым интенсивностей, так и потенциала, что значительно увеличивает объем требуемых вычислений. Поэтому формулу (5.4) упростим, разложив ее правую часть в степенной ряд. В результате получим

$$\Delta C_p = -2 \left[ (A_x + A_y + A_z) + \frac{\partial \Gamma_s}{\partial \tau} \right]$$

Суммарные аэродинамические силы и моменты находим интегрированием полученной аэродинамической нагрузки  $\Delta C_p$ .

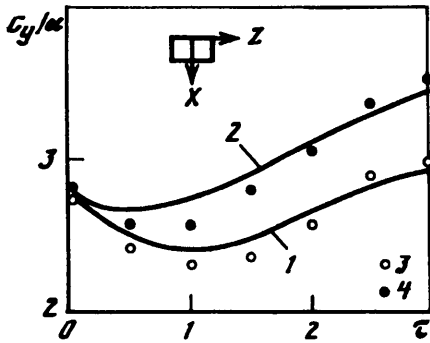
Особенности численной реализации полученных расчетных формул связаны с определением производных по координатам  $\partial \Gamma_s / \partial \xi_s, \partial \Gamma_s / \partial \eta_s, \partial \Gamma_s / \partial \zeta_s$ , и времени  $\partial \Gamma_s / \partial \tau$ . Численно эти производные находятся по формулам

$$\frac{\partial \Gamma_{i,k}}{\partial \xi_{i,k}} = \frac{\Gamma_{i+1,k} - 2\Gamma_{i,k}}{\Delta \xi_{i,k}}, \quad \frac{\partial \Gamma_{i,k}}{\partial \zeta_{i,k}} = \frac{\Gamma_{i,k+1} - 2\Gamma_{i,k}}{\Delta \zeta_{i,k}}$$

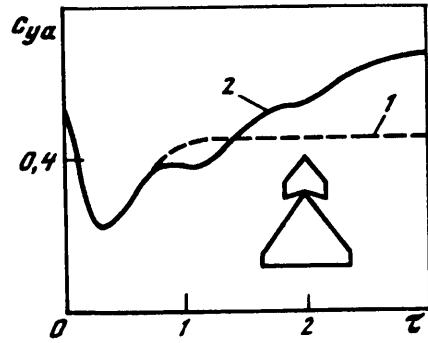
$$\frac{\partial \Gamma_{i,k}}{\partial \eta_{i,k}} = \frac{\Gamma_{i,k+1} - 2\Gamma_{i,k}}{\Delta \eta_{i,k}}, \quad \frac{\partial \Gamma_{i,k}}{\partial \tau} = \frac{\Gamma^{h_\tau+1} - \Gamma_{i,k}^{h_\tau}}{h_\tau}$$

где  $\Delta \xi_{i,k}, \Delta \zeta_{i,k}, \Delta \eta_{i,k}$  – линейные размеры вихревой рамки с индексом  $ik$ . При произвольной ориентации вихревой рамки в пространстве сначала определяются ее распределенные интенсивности  $\gamma_1 = \partial \Gamma_{ik} / \Delta l_{i,k}^{i,k+1}, \gamma_2 = \partial \Gamma_{ik} / \Delta l_{i,k}^{i+1,k}$ , а затем уже искомые производные  $\partial \Gamma_{i,k} / \partial \xi_{i,k}, \partial \Gamma_{i,k} / \partial \eta_{i,k}$  и  $\partial \Gamma_{i,k} / \partial \zeta_{i,k}$ .

**6. Результаты.** По описанным выше алгоритмам были рассчитаны нестационарные аэродинамические характеристики и исследованы особенности обтекания как изолированных несущих элементов, так и их систем. Некоторые из полученных резуль-



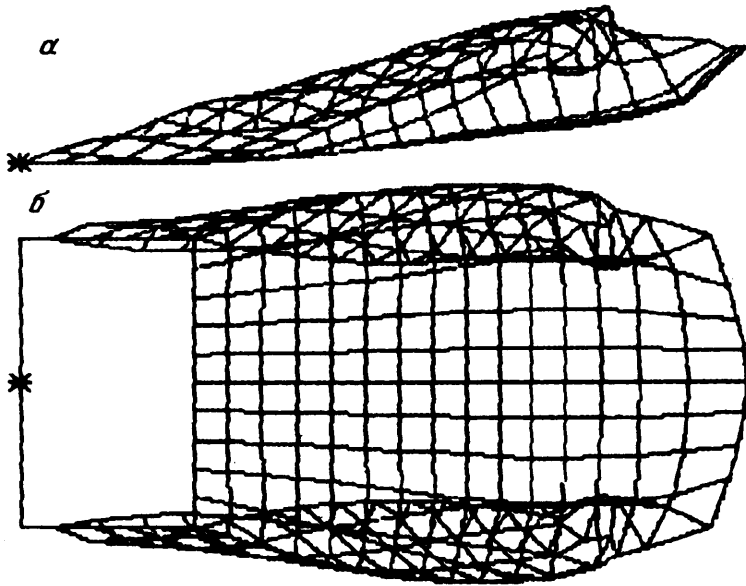
Фиг. 3



Фиг. 4

Фиг. 3. Переходные функции прямоугольных крыльев для коэффициента подъемной силы при ступенчатом изменении угла атаки

Фиг. 4. Влияние вихревых пелен и скорости распространения возмущений на коэффициент подъемной силы систем тонких несущих поверхностей: 1 – система крыльев; 2 – изолированное трапецевидное крыло



Фиг. 5. Нестационарный вихревой след за прямоугольным крылом: а – проекции на плоскость XOY; б – проекции на плоскость XOZ

татов продемонстрированы на фиг. 3–5. Сначала с целью проверки достоверности в качестве объектов исследования были выбраны прямоугольные несущие элементы удлинений  $\lambda = 2$  (фиг. 3, кривая 1) и  $\lambda = 5$  (фиг. 3, кривая 2), движущиеся на малых углах атаки ( $\alpha = 2-6^\circ$ ) со сверхзвуковой скоростью, соответствующей числу  $M_\infty = 1,4$ . Малые углы атаки позволили использовать дискретную схему, в которой положение вихревой пелены задано в плоскости самих несущих элементов. В результате вместо аэродинамических коэффициентов определяются (фиг. 3, точки 3, 4) соответствующие переходные функции вида  $[C_y/\alpha]$ , для которых имеются известные аналитические решения [5] (фиг. 3, сплошные кривые). Из сравнения видно удовлетворительное их



совпадение. Далее была рассмотрена система поверхностей, состоящая из двух тонких крыльев сложной формы в плане, установленных по потоку друг за другом (фиг. 4). Для каждого из них в отдельности нестационарность обтекания обусловлена в основном конечной скоростью распространения волн возмущения в пространстве, а для системы элементов в целом кроме того процессами развития и формирования сошедших в поток вихревых пелен. Влияние вихревых пелен возрастает с течением времени переходного процесса и для данного случая является определяющим фактором при  $\tau > 1$ . В ряде задач интерес представляет форма самих вихревых структур, индуцируемых этими элементами. Пример построения такой структуры за прямоугольным крылом удлинения  $\lambda = 2$  для  $M_\infty = 1,7$ ;  $\alpha = 15^\circ$  и момента времени  $\tau = 3$  показан на фиг. 5. Видно образование устойчивых вихревых жгутов, диаметр которых на удалении двух хорд от задней кромки элемента составляет почти 1/3 его размаха. В вертикальной плоскости оси этих же жгутов отклонены от плоскости элемента, примерно на  $18^\circ$ .

**Заключение.** Развита прикладные методы решения краевых задач для нелинейных волновых уравнений при отрывном обтекании тонких несущих поверхностей сверхзвуковым потоком идеального газа. Полученный результат для условий обтекания исследуемых конфигураций движущихся в изэнтропическом потоке с постоянной сверхзвуковой скоростью и с заданными местами отрыва потока и пространственным положением скачков уплотнения включает в себя выделение особенностей решения в подвижных скоростных осях, формулирование соответствующей краевой задачи и сведение ее к численному решению сингулярных интегральных уравнений.

На основе этого предложен численный метод расчета нестационарных аэродинамических характеристик рассматриваемых конфигураций, учитывающий как саму скорость распространения возмущений в сверхзвуковом потоке, так и процессы формирования и развития вихревых структур, а с помощью разработанных математических моделей исследованы закономерности и выявлены особенности их аэродинамических характеристик и обтекания при полете со сверхзвуковыми скоростями в диапазоне углов атаки  $\alpha$  от 0 до  $15\text{--}20^\circ$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чжен П. Управление отрывом потока. М.: Мир, 1979. 552 с.
2. Белоцерковский О.М. Численное моделирование в механике сплошных сред. М.: Наука, 1984. 519 с.
3. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я. и др. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976. 400 с.
4. Численный эксперимент в прикладной аэрогидродинамике / Под ред. С.М. Белоцерковского. М.: Наука, 1986. 183 с.
5. Белоцерковский С.М., Кудрявцева Н.А., Попыталов С.А., Табачников В.Г. Исследование сверхзвуковой аэродинамики самолетов на ЭВМ. М.: Наука, 1983. 335 с.
6. Колесников Г.А. Нестационарный вихрь в сверхзвуковом потоке // Тр. ВВИА им. Н.Е. Жуковского. 1970. Вып. 1286. С. 31–42.
7. Общая теория аэродинамики больших скоростей / М.: Воениздат, 1962. 667 с.
8. Граськин С.С. К расчету пространственного обтекания несущих поверхностей сверхзвуковым потоком // Изв. вузов. Авиат. техника. 1992. № 2. С. 27–32.
9. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.
10. Граськин С.С. Численное исследование стационарного отрывного обтекания пространственных несущих систем сверхзвуковым потоком // Изв. РАН. МЖГ. 1993. № 3. С. 142.
11. Попыталов С.А. Расчет нестационарных аэродинамических характеристик пространственных несущих систем // Изв. АН СССР. МЖГ. 1976. № 1. С. 173–176.
12. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. М.: Наука, 1985. 253 с.