

УДК 532.92

© 1997 г. О.В. АВРАМЕНКО, И.Т. СЕЛЕЗОВ, П. ХУК

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В СЛОИСТО- И НЕПРЕРЫВНО-НЕОДНОРОДНОЙ ПО ГЛУБИНЕ ЖИДКОСТИ

В приближении Буссинеска исследуется распространение внутренних волн в идеальной жидкости в двух системах: верхний однородный слой – непрерывно стратифицированное полупространство и верхний однородный слой – экспоненциально стратифицированный слой – однородное полупространство. В этих системах профиль частоты плавучести приближенно соответствует профилям, полученным в натуральных условиях. Введены дисперсионные уравнения, проводится подробный анализ особенностей распространения волн.

В океане и атмосфере равновесная плотность – функция вертикальной координаты [1–4]. Изменения температуры и солёности, инициированные на поверхности, часто вызывают неустойчивости в пределах верхнего слоя, вследствие чего плотность в нем практически постоянна, а частота Вайсяля равна нулю. Ниже этого слоя может существовать область резкого перехода, называемая термоклин. Особенно большие градиенты плотности в океане наблюдаются в пределах сезонного и главного термоклинов, где внутренние волны более всего выражены.

Изучение стратифицированных жидкостей было начато Стоксом (1847), Рэлеем (1900), Буссинеском (1903) с изучения сред с кусочно-однородными свойствами. В работах, опубликованных в последнее время, многие исследования проводились для случая экспоненциально стратифицированной среды [5]. В работе [6] анализируется генерация внутренних волн поверхностными волнами. Интересными представляются результаты экспериментальных исследований внутренних волн, приведенные в [7]. Отметим экспериментальные [8] и теоретические [9] исследования внутренних волн в трехслойной жидкости.

В настоящей работе задача распространения волн в непрерывно стратифицированной жидкости решается в приближении Буссинеска. Исследуется распространение внутренних волн в идеальной жидкости в двух системах: верхний однородный слой – непрерывно стратифицированное полупространство (случай I) и верхний однородный слой – экспоненциально стратифицированный слой – однородное полупространство (случай II).

1. Система однородный слой – непрерывно стратифицированное полупространство. Рассмотрим систему, состоящую из расположенного сверху слоя однородной жидкости над полупространством, заполненным более тяжелой жидкостью, непрерывно стратифицированной по глубине. Жидкости предполагаются несжимаемыми невязкими. В прямоугольной системе координат (x, y, z) с осью z , направленной вниз, свободная невозмущенная поверхность размещена на плоскости $z = h_0$, а поверхность контакта слоя и полупространства – на $z = h$ ($h > h_0$). Движение происходит под действием силы тяжести.

В приближении Буссинеска движение стратифицированной жидкости описывается

уравнением для вертикальной составляющей скорости w [10]

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) w + N^2(z) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) w = 0, \quad N(z)^2 = \frac{g}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} \quad (1.1)$$

На свободной поверхности должно выполняться условие

$$\frac{\partial^3 w_0}{\partial z^2 \partial z} + g \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) w_0 = 0 \quad (z = h_0) \quad (1.2)$$

где w_0 – вертикальная составляющая скорости в однородном слое, t – время, $N(z)$ – частота Вейселя, g – ускорение свободного падения. На поверхности контакта должно выполняться условие равенства полного давления и вертикальных составляющих скоростей. Откуда, учитывая непрерывность плотности, имеем

$$w_0 = w, \quad \frac{\partial w_0}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (z = h) \quad (1.3)$$

При $z \rightarrow \infty$ выполняется условие затухания скоростей на бесконечности

$$\lim_{z \rightarrow \infty} w(z) = 0 \quad (1.4)$$

Зависимость частоты Вейселя от глубины зададим в виде

$$N(z) = 0 \quad (h_0 \leq z \leq h), \quad N(z) = b/z \quad (z > h) \quad (1.5)$$

Из (1.5) определим распределение плотности с учетом условия непрерывности на поверхности контакта $z = h$ (1.3)

$$\rho(z) = \rho_0 \quad (h_0 \leq z \leq h), \quad \rho(z) = \rho_0 \exp \frac{-b^2(1/z - 1/h)}{g} \quad (z > h) \quad (1.6)$$

где ρ_0 – плотность однородного слоя.

Введем безразмерные переменные (далее звездочки будут опущены)

$$(\lambda^*, x^*) = \frac{(\lambda, x)}{l}, \quad (h^*, h_0^*, h_1^*, z^*) = \frac{(h, h_0, h_1, z)}{H}, \quad t^* = t \frac{\sqrt{gH}}{l}$$

$$(c^*, u^*) = \frac{(c, u)}{\sqrt{gH}} \beta, \quad (w^*, w_0^*) = \frac{(w, w_0)}{\sqrt{gH}}, \quad (w^*, N^*) = (\omega, N) \sqrt{\frac{H}{g}}$$

$$k^* = kl, \quad \beta = \frac{h}{l}, \quad \rho^* = \frac{\rho}{\rho_0}$$

где H – характерная глубина, l – характерная длина, в общем случае это абстрактная величина, которая в данной задаче принимается равной H ($\beta = 1$).

В дальнейшем рассматриваем распространение бегущих волн $w(z) = \Phi(z) \exp i(kx - \omega t)$, где k – волновое число, ω – круговая частота, λ – длина волны, c – фазовая скорость, $k = 2\pi/\lambda$ и $\omega = kc$. После подстановки (1.5) в (1.1)–(1.4) и введения безразмерных величин получим

$$\frac{d^2 \Phi_0}{dz^2} - (\beta k)^2 \Phi_0 = 0 \quad (h \leq z \leq h_0) \quad (1.7)$$

$$\frac{d^2 \Phi_1}{dz^2} + (\beta k)^2 \left[\frac{b^2}{(z\beta\omega)^2} - 1 \right] \Phi_1 = 0 \quad (z > h) \quad (1.8)$$

$$\left[\frac{d\Phi_0}{dz} + \frac{k^2}{\omega^2} \right] \Phi_0 = 0 \quad (z = h_0) \quad (1.9)$$

$$\Phi_0 = \Phi_1 \quad (z = h), \quad \frac{d\Phi_0}{dz} = \frac{d\Phi_1}{dz} \quad (z = h) \quad (1.10)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \Phi_1(z) = 0 \quad (1.11)$$

Общие решения уравнений (1.7) и (1.8) имеют вид

$$\Phi_0 = A_1 e^{\beta k z} + A_2 e^{-\beta k z} \quad (h \leq z \leq h_0) \quad (1.12)$$

$$\Phi_1 = \sqrt{z} B (I_\nu(\beta k z) + I_{-\nu}(\beta k z)) \quad (\nu \neq n)$$

$$\Phi_1 = \sqrt{z} B' K_\nu(\beta k z) \quad (\nu = n) \quad (1.13)$$

где $I_\nu(\tau)$, $K_\nu(\tau)$ – модифицированные функции Бесселя и Ханкеля; $\nu = (0,25 - k^2/\omega^2) = (0,25 - 1/c^2)$, n – любое целое число, A_1, A_2, B, B' – произвольные постоянные.

Подставляя решения (1.12)–(1.13) в граничные условия (1.9)–(1.11), получаем дисперсионные уравнения

$$(\beta + k/\omega^2) e^{2\beta k(h_0-h)} \{h\beta k(-I_{\nu+1} - I_{\nu-1} + I_{-\nu+1} + I_{-\nu-1} + 2I_{-\nu} - I_\nu) - I_\nu + I_{-\nu}\} - (-\beta + k/\omega^2) \{h\beta k(-I_{\nu+1} - I_{\nu-1} + I_{-\nu+1} + I_{-\nu-1} - 2I_{-\nu} + I_\nu) - I_\nu + I_{-\nu}\} = 0 \quad (\nu \neq 0) \quad (1.14)$$

$$(\beta + k/\omega^2) e^{2\beta k(h_0-h)} \{h\beta k(K_1 - K_0) - K_0\} - (-\beta + k/\omega^2) \{h\beta k(K_1 + K_0) - K_0\} = 0 \quad (\nu = n)$$

Здесь аргумент функций $I(\tau)$ и $K(\tau)$ есть величина $\tau = kh$.

Из уравнений (1.14) можно получить дисперсионные уравнения, описывающие некоторые частные случаи рассматриваемой задачи. Так, при $h_0 \rightarrow h$ несложно получить уравнение для задачи о распространении волн в непрерывно стратифицированном полупространстве без верхнего однородного слоя

$$h\beta k(-I_{\nu+1} - I_{\nu-1} + I_{-\nu+1} + I_{-\nu-1}) - I_\nu + I_{-\nu} + k^2/\omega^2 2h(-I_\nu + I_{-\nu}) = 0 \quad (\nu \neq n) \quad (1.15)$$

$$h\beta k K_1 - K_0 + k^2/\omega^2 h\beta k(-K_0) = 0 \quad (\nu = n)$$

2. Система однородный слой – экспоненциально стратифицированный слой – однородное полупространство. Сформулированная в этом разделе задача – простейшее приближение случая I для $\omega < b/h$, т.е. для таких значений круговой частоты бегущей волны, при которых возникают внутренние волны. Здесь стратифицированное полупространство моделируется экспоненциально стратифицированным слоем и однородным полупространством под ним. Толщина слоя фиксирована для каждого конкретного значения угловой частоты ω и равна $b/\omega - h$. Частота Вайсяля N_1 в стратифицированном слое задается средним интегральным частоты Вайсяля случая I

$$N_1 = \frac{1}{h_1 - h} \int_h^{h_1} N(z) dz \quad (2.1)$$

Из (1.5), (1.6) и (2.1) получаем, что в случае II

$$N(z) = 0 \quad (h_0 \leq z \leq h, \quad z > h_1), \quad N(z) = N_1 = b \frac{\ln \eta}{\eta - 1} \quad (h \leq z < h_1)$$

$$\rho(z) = \rho_0 \quad (h_0 \leq z \leq h), \quad \rho(z) = \rho_0 \exp(N_1^2(h - z)) \quad (h < z \leq h_1) \quad (2.2)$$

$$\rho(z) = \rho_0 \exp(N_1^2(h_1 - h)) \quad (z > h_1)$$

$$h_1 = \frac{b}{\omega}, \quad \eta = \frac{h_1}{h}$$

Необходимо определить функции $\Phi_2(z)$ ($h_0 \leq z \leq h$), $\Phi_3(z)$ ($h < z \leq h_1$) и $\Phi_4(z)$ ($z > h_1$). Уравнения для $\Phi_2(z)$ и $\Phi_4(z)$ аналогичны (1.7). С учетом (2.2) уравнение для $\Phi_3(z)$ запишем в виде

$$\frac{d^2 \Phi_3}{dz^2} - (\beta k)^2 \left(\frac{N_1^2}{(\beta \omega)^2} - 1 \right) \Phi_3 = 0 \quad (h \leq z < h_1)$$

Граничные условия на $z = h_0$, $z = h$, $z \rightarrow \infty$ совпадают с (1.9)–(1.11) и аналогичны (1.10) для $z = h_1$.

Общие решения имеют вид

$$\Phi_2(z) = C_1 e^{\beta k z} + C_2 e^{-\beta k z} \quad (h_0 \leq z \leq h)$$

$$\Phi_3(z) = D_1 \cos(dz) + D_2 \sin(dz) \quad (h < z \leq h_1)$$

$$\Phi_4(z) = E e^{-\beta k z} \quad (z > h_1), \quad d = \beta k \sqrt{(N_1 / \beta \omega)^2 - 1}$$

Здесь C_1, C_2, D_1, D_2, E – произвольные постоянные.

Дисперсионное уравнение имеет вид

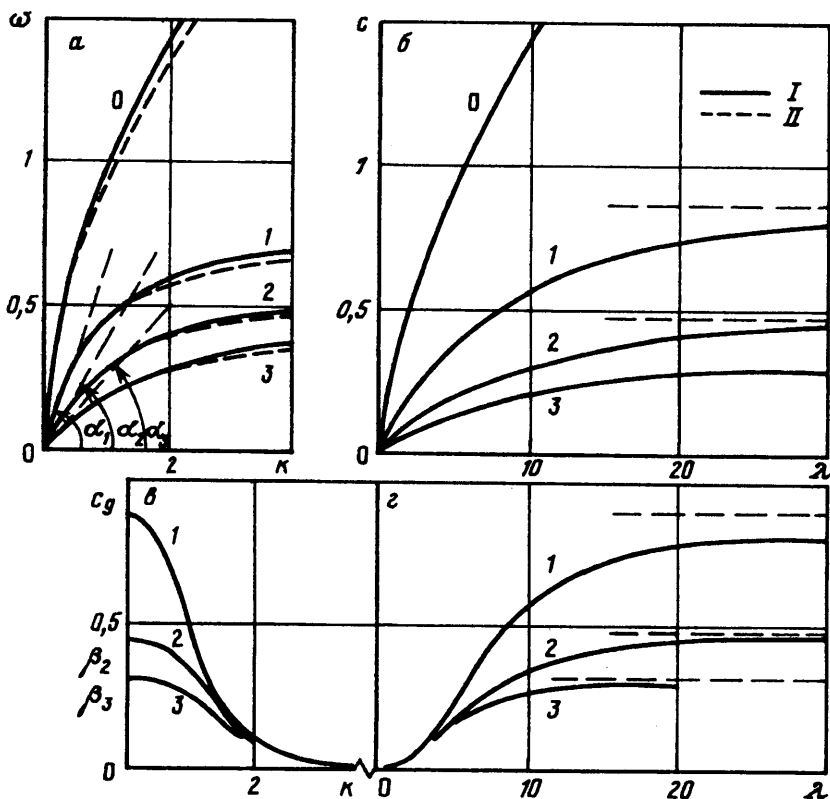
$$(\beta + k / \omega^2) e^{2\beta k(h_0 - h)} [d^2 - (\beta k)^2] \sin d(h - h_1) - (\beta + k / \omega^2) \times \\ \times \{2d\beta k(\sin dh \sin dh_1 - \cos dh \cos dh_1) + [d^2 - (\beta k)^2] \sin k(h - h_1)\} = 0 \quad (2.3)$$

При $h_1 \rightarrow h$ уравнение (2.3) сводится к известному уравнению для модели однородной "глубокой воды" $\omega^2 = k/\beta$.

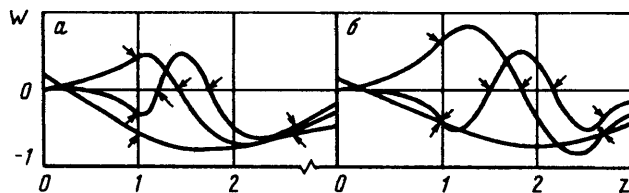
3. Анализ полученных результатов. Дисперсионные уравнения (1.14) и (2.3) решались численно для следующих значений параметров: $b = 1$, $\beta = 1$, $h_0 = 0$, $h = 1$. Результаты приведены на фиг. 1,а сплошными линиями для случая I и штриховыми для II, каждому значению k соответствует бесконечно много значений ω . Однако для частот $\omega \geq b$ существует единственное значение k , такие пары (ω, k) описывают поверхностные волны, так как при больших значениях частоты ω внутренние волны не возникают. Дисперсионные кривые, соответствующие внутренним волнам (все, кроме верхней), имеют асимптоту $\omega = 1$. Верхняя ветвь, соответствующая поверхностным волнам, незначительно отличается от графика кривой $\omega = \sqrt{k}$ – дисперсионной кривой для модели однородной "глубокой воды" при $\beta = 1$. Это подтверждает результат о слабом влиянии стратификации на свойства поверхностных волн [4]. Все дисперсионные кривые выходят из начала координат, каждая под собственным углом α_k .

На фиг. 1,б изображены дисперсионные кривые $c(\lambda)$, где верхняя кривая 0 соответствует поверхностным волнам, а кривые 1–3 – первым трем модам внутренних волн. Кривые для случая I не изображены, так как они незначительно отличаются от кривых для случая II. Каждая из кривых 1–3 имеют горизонтальную асимптоту $c = \beta_n$, $n = 1, 2, 3$, где β_n есть тангенс наклона касательной в начале координат к соответствующим кривым на плоскости (ω, k) : $\beta_n = \text{tg } \alpha_n$. На фиг. 1,в представлены зависимости групповой скорости от длины волны для случая I. Сравнение полученных результатов со случаем II показало отсутствие качественного различия и незначительность количественных.

На фиг. 2,а представлены первые три внутренние моды для случая I при $\omega = 0,375$. Установлено, что при $h = 1$ и $\omega = 0,375$ внутренние волны будут возникать в области



Фиг. 1. Дисперсионные кривые для случая I (линии I), для случая II (линии II): а – $\omega(k)$; б – $c(\lambda)$; в – $c_g(k)$; г – $z - c_g(\lambda)$



Фиг. 2. Первые три внутренние волновые моды при $\omega = 0,375$, $h = 1$, $b = 1$, $\beta = 1$, а – случай I; б – случай II. Стрелками указаны точки перегиба

$1 < z < 2,667$. При $z > 2,667$ профиль вертикальной составляющей скорости монотонно приближается к нулю. В однородном верхнем слое $0 < z < 1$ осцилляция отсутствует, причем вблизи поверхности отклонения малы, что подтверждает возможность применения приближения "твердой крышки". На фиг. 2,б построены первые три внутренние моды для случая II при тех же значениях параметров. Сравнение абсолютных значений трех экстремумов третьей моды в случае I показывает, что их величины возрастают с увеличением глубины, в то же время в случае II все три значения равны между собой.

Решение дисперсионного уравнения в случае I требует значительно больших затрат вычислительного времени, чем в случае II, потому более простая модель случая II может довольно успешно применяться для решения практических задач.

Заключение. Получены дисперсные уравнения для внутренних волн в случаях однородного слоя над непрерывно стратифицированным полупространством ($N = b/z$) и случае однородного слоя, слоя с экспоненциальной стратификацией и однородного полупространства. Для приведенных численных примеров установлено, что фазовые и групповые скорости в обоих случаях различаются незначительно. Для I случая в однородном верхнем слое осцилляции отсутствуют, причем вблизи поверхности значения вертикальной составляющей скорости малы, что подтверждает возможность приближения "твердой крышки".

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ле Блон П., Майсек Л.* Волны в океане. Ч. 1. М.: Мир, 1981. 480 с.
2. *Госсард Э.Э., Хук У.Х.* Волны в атмосфере. М.: Мир, 1978. 532 с.
3. *Гилл А.* Динамика атмосферы и океана. Т. 1. М.: Мир, 1986. 397 с.
4. *Филлипс О.М.* Динамика верхнего слоя океана. Л.: Гидрометеоиздат, 1980. 319 с.
5. *Макаров С.А., Неклюдов В.И., Чашечкин Ю.Д.* Масштабные эффекты в задаче о генерации монохроматических внутренних волн // Лабораторное моделирование динамических процессов в океане. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО АН СССР, 1990. С. 110–115.
6. *Watson K.M.* The coupling of surface and internal gravity waves: revisited // *J. Phys. Oceanogr.* 1990. V. 20. № 9. P. 1233–1248.
7. *Kranenburg C., Pietrzak J.D., Abraham G.* Trapped internal waves over undular topography // *J. Fluid. Mech.* 1991. V. 226. P. 205–217.
8. *Selezov I.T., Huq P.* Interfacial solitary waves in a three-fluid medium with a source // *Book of Abstract. 2nd Europ. Fluid Mech. Conf., Warsaw, 1994.* P. 250.
9. *Selezov I.T.* Some nonlinear wave evolution equations derived by asymptotic heuristic approach // *Book of Abstract. Intern. Conf. "Nonlinear Differential Equations". Kiev, August 21–27, 1995.* Ukraine, Kiev, 1995. P. 151.
10. *Бреховских Л.М., Гончаров В.В.* Введение в механику сплошных сред. М.: Наука, 1982. 335 с.

Киев

Поступила в редакцию
26.XII.1995