МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 4 • 1997

УДК 532.783

© 1997 г. Э.Л. АЭРО, Н.М. БЕССОНОВ, А.Н. БУЛЫГИН

НОРМАЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ И ДИССИПАЦИЯ В АНИЗОТРОПНЫХ ЖИДКОСТЯХ С ОРИЕНТИРОВАННЫМИ ЧАСТИЦАМИ

Рассмотрено влияние анизотропии пристенных слоев жидкости на процессы диссипации и граничного трения. Показано, что в случае неортогонального (и непараллельного) расположения осей анизотропии к поверхности в сдвиговом потоке возникают нормальные напряжения, обнаруженные ранее в жидкостях неньютоновской реологии. Они вносят вклад в выражение для силы трения жидкости о стенку. Наряду с обычным ньютоновским слагаемым (внутреннее трение) появляется псевдокулоновское слагаемое, пропорциональное нормальным силам, как в законе сухого трения. Для жидкостей, содержащих ориентированные частицы (суспензии, жидкие кристаллы), рассмотрены эффекты релаксации сил трения в связи с переориентацией частиц в сдвиговом потоке.

В настоящее время установлено, что взаимодействие жидкости с твердой поверхностью не является универсальным, как предполагается в гидродинамике, основанной на уравнениях Навье – Стокса, а зависит от ряда факторов. Наиболее общим считается уровень активности молекулярных сил твердой подложки, проявляющийся в хорошо известных процессах смачивания жидкостью поверхности тела. В последние годы получена более детальная информация о межмолекулярном взаимодействии на границе раздела жидкости с твердым телом (см. обзоры [1, 2]), в результате которого происходит образование структурированных межфазных пристенных слоев жидкости с иными, чем в объеме, свойствами. Достаточно толстые (порядка 1 мкм) межфазные слои связаны с пристенной ориентацией молекул жидкости. Совсем тонкие полимолекулярные слои (с числом слоев $\leqslant$ 10) обладают не только ориентационным, но и трансляционным порядком и твердоподобными свойствами, в то время как "толстые" ориентированные слои остаются жидкоподобными, но с иной, чаще всего значительно большей вязкостью.

В классической гидродинамике изотропной жидкости, описываемой уравнениями Навье – Стокса, не делается различия между внутренним (когезионным) трением слоев жидкости между собой и внешним (адгезионным) трением жидкости о твердую стенку. Мерой трения здесь является универсальная величина – сдвиговая вязкость.

В настоящей работе обращается внимание на вполне очевидное, но ускользающее от внимания исследователей общее свойство любых пристенных слоев – их анизотропию. Оно может быть связано с ориентационной или трансляционной их структурой, так и с иными факторами. Таковы, например, пристенные градиенты вязкости, плотности, концентрации и других параметров, которые появляются из-за температурного граничного слоя. Последний может возникать в принципе в любой жидкости. В растворах и расплавах полимеров эта анизотропия появляется, когда макромолекулярные клубки приобретают вытянутую форму вблизи поверхности, к которой они химически пришиты. В суспензиях играет роль известный эффект обеднения частицами пристенного слоя. В жидких кристаллах анизотропные поверхностные слои весьма велики (десятки микрон) и обусловлены ориентационной упорядоченностью вытянутых (сплюснутых) молекул, особенно сильной вблизи поверхности.

Учитывая пристенную анизотропию свойств, отнесем ее в самом первом приближении только к вязкости жидкости, считая последнюю ньютоновской. Покажем, что анизотропия вязкости приводит к включению в эффекты пристенного сдвигового течения объемной диссипации, которая в изотропной жидкости проявляется в волновых процессах, сопровождающихся локальными изменениями объема. Это приводит к существенному изменению вида закона трения жидкости о стенку.

1. Эффекты нормальных напряжений в анизотропных жидкостях при сдвиге. Рассматриваем одномерное установившееся сдвиговое движение несжимаемой ньютоновской анизотропной жидкости вдоль оси y в плоскости yz (ось z направлена ортогонально твердой границе, $v = v(z)$ – скорость жидкости). При этом имеем в виду лишь одноосную анизотропию с осью **l**, направленной ортогонально, параллельно или наклонно к границе. Ограничимся квазистационарным движением в отсутствие внешних сил. Тогда общие уравнения механики имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_{(i,k)}}{\partial x_k} = 0, \quad x_k \to x, y, z \tag{1.1}$$

$$\sigma_{(ik)} = -p\delta_{ik} + \eta_{(ik)(nm)}e_{(nm)}, \quad e_{(nm)} = \frac{1}{2}(v_{n,m} + v_{m,n}) \tag{1.2}$$

$$v_{n,m} = \frac{\partial v_n}{\partial x_m}$$

Здесь p – гидростатическое давление, $\sigma_{(ik)}$ – симметричный тензор вязких напряжений, $e_{(nm)}$ – симметричный тензор градиентов скоростей, $\eta_{(ik)(nm)}$ – симметричный тензор коэффициентов вязкости (в изотропном случае представляет собой сумму произведений единичных тензоров вида $\delta_{ik}\delta_{nm}$, а в анизотропном появляются и слагаемые вида $\delta_{ik}l_n l_m$, $l_i l_k l_n l_m$). Заключение тензорных индексов в круглые скобки означает симметризацию по этим индексам.

В нашем случае все величины зависят лишь от поперечной координаты z, поэтому уравнение (1.1) имеет вид

$$\frac{\partial \sigma_{(i,z)}}{\partial z} = 0, \quad \sigma_{(i,z)} = \text{const}$$

Справа выписано его решение.

Интерес представляют только две компоненты тензора $\sigma_{(y,z)}$ и $\sigma_{(z,z)}$. Первая $\sigma_{(y,z)}$ определяет сдвиговую силу в плоскости параллельной оси y, направленную вдоль нее, а вторая $\sigma_{(z,z)}$ – нормальную силу, ортогональную этой же плоскости.

В изотропной жидкости сдвиговые напряжения зависят лишь от сдвиговых компонент тензора $e_{(nm)}$ (от $v_{y,z}$), а нормальные от них не зависят, т.е. $\sigma_{(yz)} \sim v_{y,z}$, $\sigma_{(zz)} \sim v_{z,z}$. В анизотропной жидкости возникают перекрестные эффекты. Формально это связано с зависимостью тензора вязкостей $\eta_{(ik)(nm)}$ от угла ориентации оси анизотропии Ω, т.е. от величин $l_y = \cos\Omega$, $l_z = \sin\Omega$.

Опуская детали вывода, которые можно найти в [3], запишем соотношения для анизотропной жидкости

$$\sigma_{(yz)} = \eta_{(yz)(yz)}e_{(yz)} = \frac{1}{2}\eta_{(yz)(yz)}v_{y,z} \tag{1.3}$$

$$\sigma_{zz} = -p + \eta_{zz(yz)}e_{(yz)}l_y l_z = -p + \frac{1}{2}\eta_{zz(yz)}v_{y,z}l_y l_z \tag{1.4}$$

$$\frac{1}{3}\sigma_{nn} = -p + \eta_v e_{nn} + \frac{1}{2}\eta_{vs}e_{(nm)}l_n l_m = -p + \eta_v v_{n,n} + \frac{1}{4}\eta_{vs}v_{y,z}l_y l_z \tag{1.5}$$

Последнее соотношение выражает зависимость полного давления $-\frac{1}{3}\sigma_{nn} = -\frac{1}{3}\sigma_{zz}(v_{yy} = v_{xx} = 0)$ от скорости изменения объема $v_{n,n}$ и скорости сдвига $v_{y,z}$. Смысл последнего слагаемого в (1.5) в том, что в анизотропной среде при всестороннем сжатии сфера превращается в эллипсоид. Аналогичный перекрестный эффект прослеживается и в (1.4) – нормальные напряжения порождаются сдвиговыми деформациями, пропорциональными $v_{y,z}$. Что касается соотношения (1.3), то в нем мог бы фигурировать перекрестный член, пропорциональный $v_{z,z}$ или $v_{y,y}$, если бы эти величины были отличны от нуля.

Таким образом в анизотропной жидкости возникают перекрестные (объемно-сдвиговые) эффекты, которые будем называть эффектами нормальных напряжений в сдвиговом потоке. Заметим, что аналогичные явления обнаруживаются и в изотропных жидкостях, но неньютоновских, где они могут быть связаны, например, в полимерных растворах с их релаксационными свойствами.

Существенна величина перекрестного коэффициента диссипации (вязкости) в (1.4) $\eta_{zz(yz)}$. Его можно было бы назвать поперечно- или объемно-сдвиговым коэффициентом.

В отличие от коэффициента сдвиговой вязкости $\eta_{(yz)(yz)}$ в (1.3) он значительно больше и может превосходить последний на порядок и более. Аналогичный коэффициент η_{vs} в (1.5) имеет тот же порядок. Оба значительно уступают по величине коэффициенту объемной вязкости η_v в (1.5).

2. Нормальные напряжения при сдвиге в анизотропных жидкостях с вращательными степенями свободы. Весьма интересно проявляют себя эффекты нормальных напряжений в анизотропных жидкостях с внутренним вращением, когда скорость поворота $\dot{\mathbf{\Omega}}$ оси анизотропии $\mathbf{l}$ может не совпадать с локальной ротацией, т.е.

$$\dot{\mathbf{\Omega}} = \mathbf{l}\times\dot{\mathbf{l}} \neq \tfrac{1}{2}\operatorname{rot}\mathbf{v} \tag{2.1}$$

Точкой сверху отмечены скорости соответствующих величин.

К таким жидкостям относятся в первую очередь жидкие кристаллы, магнитные жидкости, а также суспензии. Для анализа пристенного одномерного течения выпишем законы баланса импульса и внутренних моментов в том же одномерном случае

$$\frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} = 0 \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial\mu_{xz}}{\partial z} + \sigma_{zy} - \sigma_{yz} = 0 \tag{2.3}$$

Кроме фигурирующих здесь тензорных компонент σ_{yz}, σ_{zy}, σ_{zz} и μ_{xz} остальные равны нулю. Это компоненты несимметричных тензоров силовых σ_{ik} и моментных μ_{ik} напряжений.

Выпишем обобщенные соотношения для несимметричного тензора напряжений

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \eta_{iknm}\varepsilon_{nm} \tag{2.4}$$

$$\varepsilon_{nm} = e_{(nm)} + (\dot{\mathbf{\Omega}} - \tfrac{1}{2}\operatorname{rot}\mathbf{v})_s\,\varepsilon_{snm}$$

Величины $e_{(nm)}$ и $\dot{\mathbf{\Omega}}$ определены в (1.2) и (2.1), ε_{snm} – единичный тензор Леви – Чивиты. Здесь в отличие от (1.1) тензор вязкостей η_{iknm} также зависит от орта анизотропии $\mathbf{l}$, но не обладает симметрией относительно пар индексов (т.е. имеет большее число компонент). Кроме того, теперь тензор напряжений зависит от угловых скоростей $\dot{\mathbf{\Omega}}$. Материальные соотношения для моментальных напряжений μ_{ik} не понадобятся.

Проинтегрируем (2.2), учитывая, что все величины, как и в предыдущем разделе, могут зависеть лишь от поперечной координаты z. Получим

$$\sigma_{yz} = F = \text{const}, \quad \sigma_{zz} = N = \text{const}, \quad \sigma_{zy} = \varphi_1(z), \quad \sigma_{yy} = \varphi_2(z) \tag{2.5}$$

Здесь F и N – константы, определяемые из граничных условий, F – это сдвиговая, а N – нормальная поверхностные силы. Напротив, напряжения σ_{zy}, σ_{yy}, действующие на внутренних площадках, ортогональных оси y, зависят от соответствующей координаты z.

Выпишем выражения для компонент тензора напряжений σ_{yz} и σ_{zz} через скорость сдвига $v_{y,z}$ и угловую скорость $\dot{\Omega}_x$ (остальные компоненты обращаются в нуль). Из (2.4) получим

$$\sigma_{yz} = \frac{1}{4}\left[2\eta_1 + \eta_2 - \eta_r - 2\eta_6(l_y^2 - l_z^2) + 4\eta_3 l_y^2 l_z^2\right]v_{y,z} + \frac{1}{2}\eta_6\left(l_y^2 - l_z^2 + \frac{\eta_r}{\eta_6}\right)\dot{\Omega} \tag{2.6}$$

$$\sigma_{zz} = -p + \frac{1}{2}\left[\left(\eta_{vs} - \eta_6 + 2\eta_3 l_z^2\right)v_{y,z} + 2\eta_6\dot{\Omega}\right] l_y l_z, \quad \dot{\Omega} = \dot{\Omega}_x \tag{2.7}$$

Здесь η_1, η_2, η_3, и η_6, η_r – коэффициенты сдвиговой и вращательной вязкости.

Второе соотношение выражает эффект нормальных напряжений в сдвиговом потоке анизотропной жидкости. Он исчезает, если $l_z = 0$ или $l_y = 0$, т.е. при продольной или поперечной ориентации оси анизотропии $\mathbf{l}$ к направлению потока. Следует отметить, что эта специальная ориентация может нарушаться самим потоком даже в непосредственной близости к твердой поверхности.

3. Межслоевое и граничное трение. Рассмотрим теперь вопрос о межслоевом и граничном трении. Перепишем соотношения (2.6) и (2.7) в новых обозначениях (2.5), составив из них линейную комбинацию вида

$$F = \frac{1}{2}\eta_b(\Omega)v_{y,z} - f(\Omega)\,(N + p), \quad \Omega = \Omega_x \tag{3.1}$$

Здесь введены обозначения для комбинаций коэффициентов вязкости и угловых функций l_y, l_z

$$\eta_b(\Omega) = 2\eta_1 + \eta_2 - \eta_6\left(l_y^2 - l_z^2\right) + 4\eta_3 l_y^2 l_z^2 + \left(\tfrac{1}{2}\eta_{vs} + \eta_3 l_z^2\right) f l_y l_z \tag{3.2}$$

$$f(\Omega) = \frac{\tfrac{1}{2}(l_z^2 - l_y^2 - \eta_r/\eta_6)}{l_y l_z}, \quad l_y = \cos\Omega, \quad l_z = \sin\Omega \tag{3.3}$$

Соотношение (1.3) выражает сдвиговую силу вязкого трения на границе с твердым телом через скорость сдвига $v_{y,z}$ и нормальную силу – внешнюю нагрузку N на слой. Первый член в (3.1) представляет ньютоновское сдвиговое (вязкое) трение. Соответствующий коэффициент η_b, который уместно назвать граничной вязкостью, зависит, согласно (3.2), от угла ориентации Ω^s у границы и от коэффициента объемно-сдвиговой вязкости η_{vs}. Последний, как уже отмечалось, значительно больше коэффициентов истинно сдвиговой вязкости η_1, η_2 и η_3.

Далее второй член в (3.1) выражает силу трения по закону Кулона, который применяется для описания внешнего трения. Величина f соответствует коэффициенту внешнего трения. Он зависит, согласно (3.3), только от отношения коэффициентов вязкостей и угла Ω^s наклона оси анизотропии $\mathbf{l}$ к поверхности. Отношение коэффициентов η_r/η_6, входящих в формулу (3.3), равно -1 для некоторых жидких кристаллов нематического класса (локально упорядоченных). Тогда $f = \text{tg}\,\Omega$ и при $\Omega = \pi/2$ имеем $f \to \infty$. Однако при этом $(N + p) \to 0$ и соответствующий член в (3.1) остается конечным. При наклонной ориентации ($\Omega \neq 0, \pi/2$) эти особенности не возникают.

Вблизи поверхности в отсутствие потока может создаваться устойчивая ортогональная или параллельная ей ориентация частиц, которая, вообще говоря, нарушается потоком. В зависимости от угла наклона Ω изменяется соотношение слагаемых в законе межслоевого трения (3.1) при сохранении общей силы трения F, которая, по определению, не зависит от z, но может зависеть от времени t. Не решая моментного уравнения (2.3), нельзя найти угловой профиль $\Omega(z)$ и получить закон трения в окончательном виде. Для этого нужно было бы раскрыть моментные материальные соотношения $\mu_{ik} = \mu_{ik}(\Omega_{i,k}, \dot{\Omega}_{i,k})$, что требует конкретизации класса жидкости. Это возможно для жидких кристаллов, магнитных суспензий, но связано с обширным анализом вопроса. Ограничимся уточнением углов наклона Ω^s лишь на самой поверхности, что можно сделать хотя и приближенно, но в достаточно общей форме.

4. Вязкоупругая релаксация углов наклона частиц на поверхности и силы граничного трения. Для решения указанной задачи обратимся к анализу уравнения моментов (2.3). Первый член в нем связан с поверхностными микромоментами μ_{xz}, которые ориентируют частицы за счет поверхностных (молекулярных) взаимодействий. Второй же член $(\sigma_{yz} - \sigma_{zy})$ представляет собой объемный момент, порожденный сдвиговыми напряжениями. Вычисляя с помощью (2.4) соответствующие компоненты, находим

$$\sigma_{yz} - \sigma_{zy} = -\tfrac{1}{2}\eta_6 f l_y l_z v_{y,z} + \eta_r \dot{\Omega} = \eta_R(\Omega)\dot{\Omega} - g(\Omega)F \tag{4.1}$$

Здесь $\eta_R(\Omega)$ и $g(\Omega)$ – новые функции угла Ω и коэффициентов вязкости

$$\eta_R(\Omega) = \eta_r - \frac{4\eta_6^2 f^2 l_y^2 l_z^2}{\eta'}, \quad g(\Omega) = \frac{4\eta_6 f l_y l_z}{\eta'}$$

$$\eta' = 2\eta_1 + \eta_2 - \eta_r - 2\eta_6\left(l_y^2 - l_z^2\right) + 4\eta_3 l_y^2 l_z^2$$

Второе равенство в (4.1) получилось в результате исключения $v_{y,z}$ с помощью (2.5) и (2.6). Используя это выражение в (2.3) и производя его символическое интегрирование, получим

$$\mu_{xz}^h - \mu_{xz}^0 + F\int_0^h g(\Omega)\,dz - \int_0^h \eta_R(\Omega)\,\dot{\Omega}dz = 0 \tag{4.2}$$

Здесь μ_{xz}^h и μ_{xz}^0 – константы интегрирования.

При сдвиговом течении изотропной жидкости $v_{y,z}$ = const. Однако в нашем случае наряду с профилем скорости $v_y(z)$ существенны и профили $\Omega(z)$, $\dot{\Omega}(z)$ и $v_{y,z} = v_{y,z}(z)$. При этом угловые профили меняются по толщине в конечных пределах: $\Delta\Omega < \pi/2$, $\Delta\dot{\Omega} < (\mathrm{rot}\,\mathbf{v}/2)_x$. Величины $\Delta\Omega$ и $\Delta\dot{\Omega}$ становятся малыми для тонких слоев, а сами профили оказываются монотонными функциями z. Сказывается тормозящее и фиксирующее действие стенок. При одинаковых углах на обеих границах $\Omega = \Omega^s$ и скоростях $\dot{\Omega} = \dot{\Omega}^s$, $v_y = v_y^s$ имеем просто

$$\int_0^h g(\Omega)\,dz \simeq g(\Omega^s)h, \quad \int_0^h \eta_R(\Omega)\,\dot{\Omega}dz \simeq \eta_R(\Omega^s)\,\dot{\Omega}^s h \tag{4.3}$$

Будем считать, что и поверхностные моменты на обеих границах равны (но противоположны по знаку), т.е. $\mu_{xz}^h = -\mu_{xz}^0 = \mu_{xz}^s$. Тогда уравнение (4.2) с учетом (4.3) примет вид

$$2\mu_{xz}^s + g(\Omega^s)hF - \eta_R(\Omega^s)h\dot{\Omega}^s = 0 \tag{4.4}$$

Существенно, что в ряде случаев величина μ^s_{xz} может быть задана как функция угла Ω^s. Этот вопрос детально исследовался в физике жидких кристаллов [2, 4–7]. В [2] показано, что для любых молекулярных систем

$$\mu^s_{xz} = \left(\mathbf{l}\times\frac{\partial W}{\partial \mathbf{l}}\right)_x = \frac{\partial W(\Omega^s)}{\partial \Omega^s}, \quad W = W_0 + W_p + W_d$$

Здесь W – поверхностная энергия взаимодействия жидкость – твердое тело, W_0 – ее изотропная часть (энергия сцепления), W_p, W_d – ее ориентационные слагаемые для полярных (W_p) и неполярных (W_d) взаимодействий. Предложены [5, 6] простые приближенные формулы, подтверждаемые опытом

$$W_p \simeq -W_1 L_z^{os} = -W_1 \sin\Omega^{os}, \quad W_d \simeq W_2 l_z^{os} l_z^{os} = W_2 \sin^2 \Omega^{os}$$

Здесь l^{os} – направление легкого ориентирования на поверхности, реализуемое в отсутствие всех внешних факторов.

Отметим, что в уравнении (4.4) первый член определяется упругой (поверхностной) энергией, в то время как два других связаны с вязкой диссипацией. Напомним также, что F – константа, которая может зависеть от времени. Ясно, что (4.4) представляет собой кинетическое ориентационное уравнение, которое описывает вязкоупругий релаксационный процесс установления в сдвиговом потоке стационарной ориентации, если она возможна. Это выясняется из условия $\dot{\Omega}^s = 0$, вследствие которого (4.4) принимает вид

$$\mu^s_{xz}(\Omega^s_\infty) + g(\Omega^s_\infty) h F_\infty = 0 \tag{4.5}$$

Здесь индексом ∞ отмечен установившийся режим течения. Очевидно, равновесие статических моментов возможно не всегда, поскольку поверхностные моменты ограничены, а сдвиговая сила F и толщина слоя h могут оказаться слишком велики. Условием установившегося режима является неравенство

$$F \leqslant \max \frac{\mu^s(\Omega^s_\infty)}{hg(\Omega^s_\infty)} = -\max \frac{W_d(\Omega^s_\infty) + W_p(\Omega^s_\infty)}{hg(\Omega^s_\infty)} \tag{4.6}$$

Имеется в виду максимальное значение по углу Ω^s_∞. В противном случае направление $\mathbf{l}$ будет непрерывно вращаться: $\dot{\Omega}^s \neq 0$. Такого рода нестационарные режимы не рассматриваются.

Заметим, что установившаяся ориентация в потоке требует также, чтобы были отличны от нуля упругие поверхностные моменты μ^s в (4.5) и (4.6). Иначе нет уравновешенного состояния. Поэтому следует говорить о том, что (4.3) описывает вязкоупругую релаксацию осей анизотропии $\mathbf{l}$. Характерные времена релаксации имеют порядок η_r/W. Релаксирует и сила граничного трения (3.1). Таким образом, располагая граничными значениями угла ориентации оси анизотропии Ω^s или Ω^s_∞ и, используя их в (3.1) – (3.3) на самой поверхности, приходим к граничному закону внешнего трения анизотропной жидкости с внутренними вращениями, которые реализуются в тонких слоях толщиной $h \simeq \mu^s / F \simeq W / F$.

Заключение. Предпринята попытка учета индуцированных поверхностью структурированных слоев жидкости в пределах весьма простого подхода. В реологическую модель жидкости вводятся анизотропия вязкости вблизи поверхности и моментные взаимодействия ориентированных частиц жидкости лишь с самой поверхностью. В пределах тонкого слоя, где реализуются простое сдвиговое течение, можно получить достаточно простые, но принципиально иные, чем в классической гидродинамике, законы пристенного трения. Сила трения (сдвига) зависит от нормальных напряжений (как в законе внешнего трения Кулона), поверхностной энергии и направления оси анизотропии в потоке. В пределе отношение поверхностной энергии взаимодействия к толщине бесконечно тонкого анизотропного слоя есть конечная величина – поверхностное (межфазное) натяжение. Тогда определяется выражение для силы трения через угол предельной ориентации в потоке и величину межфазного натяжения (здесь – его анизотропную часть). Таким образом граничное трение приобретает зависимость от природы жидкости и материала твердой границы. Этот результат теории не требует уточнения реологической модели моментной жидкости, которая в глубине потока сводится к классической. Поэтому трактовка граничных эффектов претендует на некоторую универсальность.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-01150).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аэро Э.Л., Бессонов Н.М.* Микромеханика межконтактных структурированных слоев жидкости // Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа. М.: ВИНИТИ, 1989. Т. 23. С. 237–315.
2. *Аэро Э.Л., Захаров А.В.* Упругие деформации жидких кристаллов, их устойчивость и применение в технике // Итоги науки и техники. Сер. Комплексные и специальные разделы механики. М.: ВИНИТИ, 1988. Т. 3. С. 163–237.
3. *Аэро Э.Л.* Новые эффекты при сжатии и сдвиге нематических жидких кристаллов в слоях с наклонной граничной ориентацией // Кристаллография. 1996. Т. 41. № 1. С. 9–16.
4. *Блинов Л.М., Кац Е.И., Сонин А.А.* Физика поверхности термотропных жидких кристаллов // Успехи физ. наук. 1987. Т. 152. № 3. С. 449–477.
5. *Rapini A., Papoular M.J.* Distortion d'une lamelle nematique sous champ magnetique conditions d'ancrage aux parois // J. Phys. 1969. V. 30. Colloq № 4. P. 54–56.
6. *Parsons J.D.* Structural critical point at the free surface of a nematic liquid crystal // Phys. Rev. Lett. 1978. V. 41. № 13. P. 877–878.
7. *Блинов Л.М., Кабаенков А.Ю.* Температурная зависимость и "размерный" эффект для энергии сцепления планарно ориентированного нематика на твердой подложке // ЖЭТФ. 1987. Т. 937. № 5. С. 1757–1764.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
22.I.1996