

УДК 532.517.4

© 1997 г. Е.Н. АМБАРЦУМЯН, Г.С. ГЛУШКО, И.А. КРЮКОВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ТУРБУЛЕНТНОГО ПЕРЕНОСА В ПЛОСКИХ ТЕЧЕНИЯХ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

С использованием математической модели турбулентных процессов переноса, включающей в себя уравнения Ланжевена для описания движения турбулентных молекул и процедуру осреднения пульсации параметров течения, аналогичную применяемой в молекулярной физике, найдены выражения для компонент тензора четвертого ранга турбулентной вязкости и тензора рейнольдсовых напряжений. Входящие в математическую модель эмпирические коэффициенты определены путем анализа экспериментальных данных, известных из литературы.

После опубликования статьи [1] началось бурное развитие математических моделей турбулентности на основе системы уравнений, предложенной А.Н. Колмогоровым [2]. В эту систему уравнений и в системы, предложенные позднее другими авторами, кроме уравнений Рейнольдса входят дифференциальные уравнения в частных производных для двух параметров турбулентности – ее кинетической энергии e и содержащего масштаб турбулентности L параметра $S(m, n) = e^m L^n$ (m и n – константы). Такие модели турбулентности были названы двухпараметрическими моделями.

По существу вся совокупность рассматриваемых моделей, различающихся значениями m и n , представляет собой одну модель, так как путем несложных преобразований из системы уравнений для e и $S(m_1, n_1)$, предложенной одним автором, можно получить новую систему для e и $S(m_2, n_2)$, аналогичную предложенной другим автором. Такие системы – преобразованная и оригинальная – будут отличаться друг от друга только аппроксимацией членов, выражающих в уравнении для $S(m_2, n_2)$ процессы, связанные с диффузией энергии турбулентности и взаимодействием с твердой обтекаемой поверхностью.

Кроме систем дифференциальных уравнений в двухпараметрические модели турбулентности входят полуэмпирические недифференциальные выражения, зависящие от определяющих параметров e и S (для компонент тензора рейнольдсовых напряжений, векторов теплового потока и др.).

В турбулентных течениях с высоким уровнем пульсаций турбулентность находится в состоянии, близком к равновесию, и ее параметры e и S определяются в основном балансом двух процессов: процесса порождения турбулентности (работой рейнольдсовых напряжений) и процесса ее вязкой диссипации. Поэтому точность и универсальность математической модели турбулентности зависят в основном от точности и универсальности выражений для компонент тензора рейнольдсовых напряжений, вязкой диссипации параметров e и S и др.

В двухпараметрических моделях турбулентности предполагается, что компоненты тензора рейнольдсовых напряжений линейно зависят от компонент тензора деформаций осредненного движения. В свою очередь коэффициенты этой зависимости выражаются через среднюю скорость хаотического движения турбулентных молекул $e^{1/2}$ и масштаб турбулентности $L = (S(m, n) / e^m)^{1/n}$ (аналогов средней скорости хаотического

движения молекул и пути их свободного пробега в теории процессов молекулярного переноса). Вследствие того что масштаб турбулентности L соизмерим с характерным размером области течения, коэффициенты пропорциональности в этих выражениях не являются универсальными константами. Они зависят от ряда параметров, одни из которых отражают распределение параметров турбулентного потока в окрестности точки наблюдения, а другие – геометрические особенности области течения. В [3, 4] для плоских течений типа пограничного слоя из простых соображений и анализа экспериментальных данных было найдено, что коэффициенты пропорциональности для $\langle u'v' \rangle$ и $\langle v'r' \rangle$ зависят от $z = L(\partial U / \partial y) / e^{1/2}$ – безразмерного градиента средней скорости, $\zeta = L(\partial e / \partial y) / e$ – безразмерного градиента энергии турбулентности и $r = e^{1/2}y / \nu$ – безразмерного расстояния от обтекаемой поверхности до точки наблюдения. При этом оказалось, что сильное влияние параметра r сказывается только в области вязкого подслоя (где он становится малым), параметра ζ – вблизи внешней границы слоя (где он становится большим), а параметр z существенен для всей области течения.

Однако попытки применить найденную зависимость к течениям другого вида (осесимметричным незакрученным и закрученным относительно оси симметрии, отрывным и др.) показали, что решения системы уравнений в ряде случаев значительно отличаются от экспериментальных данных. На наш взгляд, эти отличия вызваны тем, что "свободный пробег" турбулентного моля сравним с характерным размером области течения. Вследствие этого и коэффициенты турбулентного переноса могут зависеть от геометрических характеристик области течения. Поэтому становится актуальной задача построения такой математической модели турбулентных процессов переноса, которая позволяла бы определять зависимости коэффициентов переноса от определяющих параметров для более широкого класса течений.

В [5–13] предпринята попытка построения такой модели турбулентных процессов переноса и изложены некоторые результаты. В частности, в [6, 8, 10] удалось получить зависимости двух компонент тензора турбулентной вязкости от определяющих параметров для продольной и окружной компонент вектора средней скорости в закрученных струях, а в [7, 9–11] определить влияние сил плавучести на турбулентную вязкость в устойчиво стратифицированных турбулентных течениях типа пограничного слоя. В [12, 13] получены формулы для компонент тензора турбулентной вязкости для общего случая плоских турбулентных течений несжимаемой жидкости без учета влияния твердой поверхности и сильных градиентов энергии и масштаба турбулентности. В [13] проведено сравнение полученных формул с экспериментальными данными.

Развиваемая в [5–13] модель турбулентного переноса основывается на идее осреднения пульсаций, создаваемых в точке наблюдения порожденными в различных точках окружающего ее пространства турбулентными молями. Эту методику, по-видимому, впервые начал применять в своих трудах Н.И. Булеев для вычисления распределений коэффициентов турбулентного переноса в каналах с различной формой поперечного сечения (наиболее полно эта методика изложена в [14]).

Для вычисления траекторий турбулентных молей [5–13] применяется идея использования уравнений Ланжевена, по-видимому, впервые осуществленная Чангом [15].

Процедура осреднения создаваемых в точке наблюдения пульсаций параметров полностью аналогична применяемой в молекулярной физике для вычисления молекулярных коэффициентов переноса: т.е. производится осреднение по "начальным" скоростям молей в точках порождения (в точках предыдущих столкновений молекул) и по времени "свободного пробега" моля (аналога определения длины "свободного пробега" молекулы).

1. Основы модели и вычисление тензора турбулентных напряжений. Предполагается, что "турбулентная жидкость" состоит из частиц – молей размером L . Турбулентные моли порождаются в некоторых точках области течения случайной силой, которая возникает из-за случайного характера распределения пульсации дав-

ления в окрестности точек порождения молей. Случайная сила действует импульсно, порождая моль размером L с произвольно направленной пульсацией скорости \mathbf{u}'_0 . Распределение плотности вероятности \mathbf{u}'_0 является нормальным с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ^2 .

Далее считается, что после порождения в течение некоторого случайного промежутка времени моли передвигаются в окружающей среде подобно твердым частицам в броуновском движении. Распределение плотности вероятности времени "свободного" пробега моля предполагается пуассоновским с характерной частотой p .

Если в окрестности некоторой точки – точки наблюдения – величины p и σ постоянны и если обозначить $u'_i = u'_i(\mathbf{u}_0, t)$ ($i = 1, 2, 3$) зависимости пульсаций скорости, порождаемых передвигающимся молем, от вектора начальной скорости моля \mathbf{u}_0 (в точке его порождения) и времени t , то компоненты тензора рейнольдсовых напряжений будут иметь вид

$$\langle u'_i u'_j \rangle = k \iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)/2} \left(p \int_0^{\infty} e^{-pt} u'_i(\mathbf{u}_0, t) u'_j(\mathbf{u}_0, t) dt \right) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \quad (1.1)$$

$$k = \pi^{-3/2}, \quad \xi_i = u'_{0i} / \sigma$$

где u'_{0i} – компоненты \mathbf{u}'_0 .

Уравнения для компонент средней скорости турбулентного движения несжимаемой жидкости плотностью ρ относительно системы координат x_1, x_2, x_3 в эйлеровом описании можно записать следующим образом:

$$\rho \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} + \sum_k U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right) = G_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.2)$$

$$\sum_i \frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0$$

где U_i – компоненты вектора средней скорости, G_i – совокупность членов, выражающих действие сил на бесконечно малую частицу жидкости. В G_i включаются градиенты статического и турбулентного давлений, вязкие и рейнольдсовы напряжения.

Скорость турбулентного моля в точке его нахождения в общем случае отличается от средней скорости жидкости в той же точке на величину u'_i . Таким образом, полную скорость моля можно представить в виде $u_i = U_i(\mathbf{x}_m, t) + u'_i(t)$, где \mathbf{x}_m – координаты моля в момент времени t , которые определяются из решения системы уравнений

$$\frac{dx_{mi}}{dt} = U_i(\mathbf{x}_m, t) + u'_i(t) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.3)$$

Поскольку скорость моля отличается от средней скорости жидкости, то силы, действующие на моль, можно представить в виде $G_i + g'_i$ ($i = 1, 2, 3$) (G_i вычисляются в точке нахождения моля $x_{mi}(t)$; $x_{mi}(t)$ – решение системы (1.3)). С учетом этих предположений уравнения для пульсаций скоростей u'_i имеют вид

$$\rho \frac{d(U_i(\mathbf{x}_m, t) + u'_i(t))}{dt} = G_i(\mathbf{x}_m, t) + g'_i(\mathbf{x}_m, t) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.4)$$

Уравнения (1.4) являются уравнениями в лагранжевом представлении. С учетом (1.3) выражения для произвольных dU_i/dt можно записать следующим образом:

$$\frac{dU_i}{dt} = \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} + \sum_k (U_k + u'_k) \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_m(t)} \quad (i=1,2,3) \quad (1.5)$$

Предполагается, что g'_i/ρ можно трактовать как компоненты силы сопротивления движению моля со стороны "окружающей жидкости" и эта сила пропорциональна величине разности между полной скоростью моля и средней скоростью жидкости и направлена против вектора \mathbf{u}' : $g'_i/\rho = -fu'_i$, где f – множитель пропорциональности, имеющий размерность частоты. Выражение для f определяется ниже.

Если подставить (1.5) в (1.4), заменить g'_i/ρ на $-fu'_i$ и учесть, что уравнения (1.2) выполняются в каждой пространственно-временной точке, то уравнения (1.4) приведутся к виду

$$\frac{du'_i}{dt} = -\sum_k u'_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - fu'_i \quad (i=1,2,3) \quad (1.6)$$

Системы (1.6) и (1.3) полностью описывают изменения во времени пульсаций компонент скорости и координат турбулентного моля в промежутках между моментами действия случайной силы.

Далее будем рассматривать случай двумерного в среднем турбулентного течения несжимаемой жидкости, когда относительно декартовой системы координат x, y, z вектор средней скорости записывается в виде $(U, V, 0)$ и производные компонент вектора средней скорости по z тождественно равны нулю. Компоненты тензора деформаций и вектора вихря обозначаются $\delta = \partial U / \partial x = -\partial V / \partial y$, $\theta = (\partial U / \partial y + \partial V / \partial x) / 2$, $\Omega = (\partial V / \partial x - \partial U / \partial y) / 2$.

Рассматривается случай, когда коэффициенты уравнений (1.6) в окрестности точки наблюдения постоянны, т.е. не зависят от координат и времени. Тогда решение системы уравнений (1.6) при начальных данных u_0, v_0, w_0 имеет вид

$$u' = [u_0(Cn - \delta Sn) - v_0(\theta - \Omega)Sn]e^{-ft} \quad (1.7)$$

$$v' = [-u_0(\theta + \Omega)Sn + v_0(Cn + \delta Sn)]e^{-ft}, \quad w' = w_0e^{-ft}$$

где Cn и Sn в зависимости от знака $k = \delta^2 + \theta^2 - \Omega^2$ для $k > 0$, $k = 0$ и $k < 0$ равны соответственно $Cn = \{\text{ch}(\omega t), 1, \cos(\omega t)\}$ и $Sn = \{\omega^{-1} \text{sh}(\omega t), t, \omega^{-1} \sin(\omega t)\}$, $\omega = (|k^2|)^{1/2}$.

Если, используя (1.7), написать выражения для u'^2, v'^2, w'^2 и $u'v'$, подставить их в (1.1) и вычислить интегралы, то получим следующие выражения для компонент тензора рейнольдсовых напряжений:

$$\begin{aligned} \langle u'^2 \rangle &= \sigma^2 [A - 2B\delta + H(\delta^2 + (\theta - \Omega)^2)], \\ \langle v'^2 \rangle &= \sigma^2 [A + 2B\delta + H(\delta^2 + (\theta + \Omega)^2)] \\ \langle w'^2 \rangle &= \sigma^2 D \\ \langle u'v' \rangle &= -\sigma^2 [(B - \delta H)(\theta + \Omega) + (B + \delta H)(\delta - \Omega)] \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$A = Q(2,0), \quad B = Q(1,1), \quad H = Q(0,2), \quad D = Q(0,0), \quad Q(m,n) = p \int_0^\infty e^{-(p+2f)t} Cn^m Sn^n dt$$

Если обозначить $X = 2(\Omega^2 - \delta^2 - \theta^2) / (p + 2f)^2$, $\Phi(X) = (1 + X)^{-1}$, $\Psi(X) = 1 + X/2$, то выражения для коэффициентов в (1.8) запишутся

$$D = p / (p + 2f), \quad A = D\Phi(X)\Psi(X) \\ B = p\Phi(X) / (p + 2f)^2, \quad H = 2p\Phi(X) / (p + 2f)^3 \quad (1.9)$$

Используя соотношения (1.8) и определение энергии турбулентности $e = (\langle u'^2 \rangle + \langle v'^2 \rangle + \langle w'^2 \rangle) / 2$, выразим величину квадрата дисперсии σ^2 через e

$$\sigma^2 = \frac{2e}{2A + D} \left[1 + \frac{H}{2A + D} (2\delta^2 + 2\theta^2 + 2\Omega^2) \right]^{-1} \quad (1.10)$$

Если (1.9) и (1.10) подставить в (1.8), то выражения для компонент тензора Рейнольдсовых напряжений окажутся зависящими от комплекса $P = p + 2f$, имеющего размерность частоты. Эту же размерность имеют $e^{1/2} / L$, δ , θ и Ω . Предполагается, что

$$P^{-1} = \frac{3}{2} \alpha_0 \frac{L}{\sqrt{eF}}, \quad F = 1 + \alpha_0^2 h_0^2 Z^2, \quad Z^2 = 2 \frac{L^2}{e} (\delta^2 + \theta^2 + \Omega^2) \quad (1.11)$$

$$Z = L \left((\text{grad } U)^2 + (\text{grad } V)^2 \right)^{1/2} / \sqrt{e}$$

где Z – обобщенный безразмерный градиент средней скорости, α_0 и h_0 – безразмерные эмпирические коэффициенты. В общем случае α_0 и h_0 могут зависеть от некоторых безразмерных параметров, в частности от числа Рейнольдса $r = e^{1/2} L / \nu$.

После подстановки (1.9), (1.10), (1.11) в (1.8) выражения для компонент тензора Рейнольдсовых напряжений примут вид

$$\langle u'^2 \rangle = \frac{2}{3} e G_x - 2\nu \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \langle v'^2 \rangle = \frac{2}{3} e G_y - 2\nu \frac{\partial V}{\partial y} \\ \langle w'^2 \rangle = \frac{2}{3} e G_z, \quad \langle u'v' \rangle = - \left(\nu_{12} \frac{\partial U}{\partial y} + \nu_{21} \frac{\partial V}{\partial x} \right) \quad (1.12)$$

В эти выражения входят компоненты анизотропного турбулентного давления

$$G_x = \Phi \left(\Psi + \frac{9}{2} \alpha_0^2 (u_x^2 + u_y^2) \right) \Gamma^{-1}, \quad G_y = \Phi \left(\Psi + \frac{9}{2} \alpha_0^2 (v_x^2 + v_y^2) \right) \Gamma^{-1}, \\ G_z = \Phi(\Phi\Gamma)^{-1} \quad (1.13)$$

$$u_i = L \frac{\partial U}{\partial x_i} (Fe)^{-1/2}, \quad v_i = L \frac{\partial V}{\partial x_i} (Fe)^{-1/2}$$

$$\Phi = \left(1 + \frac{2}{3} X \right)^{-1}, \quad \Gamma = 1 + \frac{3}{2} \alpha_0^2 \Phi Z^2 F^{-1}$$

Компоненты турбулентной вязкости ν , ν_{12} и ν_{21} запишутся следующим образом:

$$\nu = \alpha_0 \Phi (\sqrt{F}\Gamma)^{-1} \sqrt{e} L, \quad \nu_{12} = \nu(1 + 3\alpha_0 u_x), \quad \nu_{21} = \nu(1 + 3\alpha_0 v_y) \quad (1.14)$$

Последнее выражение (1.12) можно представить в виде $\langle u'v' \rangle = -2\nu_1\theta - 2\nu_2\Omega$, $\nu_1 = (\nu_{12} + \nu_{21}) / 2$ и $\nu_2 = (\nu_{12} - \nu_{21}) / 2$. Отсюда и из выражений (1.13) и (1.14) следует, что анизотропия турбулентного давления и турбулентной вязкости имеет место в тех точках течения, где $\Omega \neq 0$. Параметр X , от которого зависят функции Φ , Ψ и ϕ , после

подстановки в него выражения для $P = p + 2f$ (1.11) принимает вид

$$X = -9\alpha_0^2 \left[Z^2 / F - (v_x - u_y)^2 \right] / 4 \quad (1.15)$$

Параметр $X = 2kP^{-2}$ (k из обозначений в (1.7)) отражает режимы эволюции во времени компонент вектора скорости моля: монотонное движение при $k \geq 0$ ($X \leq 0$) или режим затухающих колебаний при $k < 0$ ($X > 0$). Влияние параметра X на турбулентную вязкость выражается в ее уменьшении при режиме затухающих колебаний ($X < 0$) или в ее увеличении при $X \geq 0$. Из (1.15) и определения P (1.11) следует, что при $Z^2 \rightarrow \infty$ модуль параметра X ограничен

$$|X| \leq 9 / (4h_0^2) \quad (1.16)$$

По физическому смыслу $\langle u'^2 \rangle$, $\langle v'^2 \rangle$ и $\langle w'^2 \rangle$ должны быть неотрицательными. Выражения (1.12) после несложных преобразований можно привести к

$$\begin{aligned} \langle u'^2 \rangle &= \frac{2}{3} e\Phi \left[\frac{1+2X}{4} + \frac{3}{2} \alpha_0^2 (u_x^2 + 3u_y^2) + \frac{3}{4} (1-2\alpha_0 u_x)^2 \right] \\ \langle v'^2 \rangle &= \frac{2}{3} e\Phi \left[\frac{1+2X}{4} + \frac{3}{2} \alpha_0^2 (3v_x^2 + v_y^2) + \frac{3}{4} (1-2\alpha_0 v_y)^2 \right] \\ \langle w'^2 \rangle &= \frac{2}{3} e\Phi (1+X) \end{aligned} \quad (1.17)$$

Из (1.17) и выражения для Φ из (1.13) следует, что диагональные компоненты тензора рейнольдсовых напряжений будут всегда неотрицательными, если $X > -1/2$. Отсюда с учетом выражений (1.13) и (1.14) при использовании уравнения неразрывности (1.2) и определения вихря следует, что необходимо выполнение неравенства $h_0^2 > 9/2$. При таком ограничении на h_0 входящие в выражения (1.13), (1.14) и зависящие от X комплексы меняются в пределах $3/4 \leq \Phi \leq 3/2$, $9/8 \leq \Phi\psi \leq 15/16$, $3/4 \leq \Phi\varphi^{-1} \leq 9/8$. Предельные значения могут достигаться при $Z^2 \rightarrow \infty$.

Для $k \geq 0$ могут существовать три режима движения турбулентных молей, зависящие от знака определителя системы уравнений (1.6) $\Delta = f^2 + \Omega^2 - \delta^2 - \theta^2 = f^2 - k$. При $\Delta > 0$ осуществляется режим монотонно затухающих скоростей ($u_i' \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$). Для $\Delta = 0$ осуществляется режим, при котором скорость моля при $t \rightarrow \infty$ стремится к конечному пределу. Наконец, для $\Delta < 0$ $u_i' \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$.

Если предположить, что $p \approx f$, то из (1.11) можно получить выражение для Δ

$$\Delta = \frac{1}{9} \left(\frac{2}{3\alpha_0} \right)^2 \frac{e}{L^2} + \left(\frac{2}{9} h_0^2 - 1 \right) \delta^2 + \left(\frac{2}{9} h_0^2 - 1 \right) \theta^2 + \left(\frac{2}{9} h_0^2 + 1 \right) \Omega^2$$

Это выражение будет всегда положительным, если $h_0^2 > 9/2$. Следовательно, условие положительности диагональных компонент тензора рейнольдсовых напряжений соответствует условию режима монотонно затухающей скорости молей.

Коэффициенты турбулентной вязкости $\nu_1, \nu_{12}, \nu_{21}$ и турбулентного давления G_x, G_y и G_z при полученном ограничении на h_0^2 всегда будут неотрицательными. Численные значения выражений в соотношениях (1.14) для ν_{12} и ν_{21} в зависимости от величины и знака $u_x = -v_y$ могут при $h_0^2 = 9/2$ изменяться от 0 до 2. При этом если $\nu_{12} = 0$, то $\nu_{21} = 2\nu$ (и наоборот).

В [12, 13] даны несколько иные формулы для компонент тензора рейнольдсовых напряжений, в которых были раскрыты комплексы $(\theta - \Omega)^2$ и $(\theta + \Omega)^2$ (см. (1.8)).

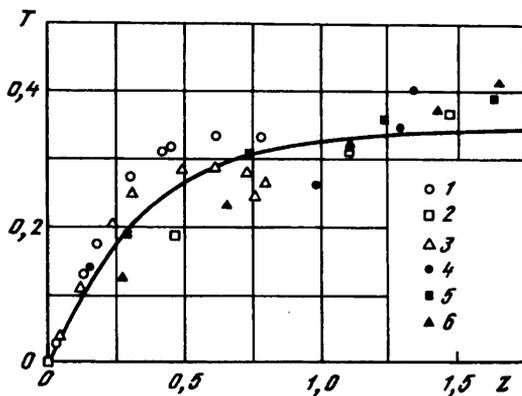
При этом в выражениях для $\langle u'^2 \rangle$ и $\langle v'^2 \rangle$ кроме членов с изотропным турбулентным давлением $p_t = (\langle u'^2 \rangle + \langle v'^2 \rangle) / 2$ и $2\nu\partial U_i / \partial x_i$ появлялись члены вида $\pm \varepsilon(\partial U / \partial y + \partial V / \partial x)$, где $\varepsilon = 3 / 2 \alpha_0 \nu (v_x - u_y)$. Аналогично в выражении для напряжения сдвига $\langle u'v' \rangle$ кроме члена $2\nu\theta$ появлялись члены вида $\pm \varepsilon \partial U_i / \partial x_i$. Знак второй вязкости ε зависит от направления вектора вихря Ω , т.е. ε может быть как положительной, так и отрицательной величиной. Поскольку выражения компонент тензора рейнольдсовых напряжений здесь и в [12, 13] получены из (1.8), то они эквивалентны. Однако для решения уравнений Рейнольдса методами конечных разностей появление в системе уравнений членов с отрицательной вязкостью нежелательно. Поэтому представление рейнольдсовых напряжений в форме с положительными значениями компонент турбулентного давления и коэффициентов вязкости, как это сделано в настоящей работе (1.12) – (1.14), кажется более предпочтительным. Это представление рейнольдсовых напряжений несколько отличается от общепринятого: $\langle u'_i u'_j \rangle = -\delta_{ij} p_t + \nu_{ijmn} d_{mn}$ (δ_{ij} – компоненты единичного тензора, p_t – изотропное турбулентное давление, ν_{ijmn} – компоненты тензора турбулентной вязкости, d_{mn} – компоненты тензора средних скоростей деформации). Отличие обусловлено тем, что в выражениях (1.8) учитываются члены, не только линейные относительно компонент тензора скоростей деформаций и вихря, но и квадратичные.

2. Определение эмпирических коэффициентов. При выводе формул турбулентного давления (1.3) и коэффициентов турбулентной вязкости (1.14) предполагалось, что коэффициент сопротивления турбулентного моля f и частота столкновений молей p постоянны в окрестности точки наблюдения. Кроме того, предполагалось, что там же постоянны δ , θ и Ω . Отсюда следует, что полученные формулы справедливы в тех подобластях течения, где в окрестности точки наблюдения, размер которой пропорционален L , величины $\partial(\sqrt{e}/L) / \partial x_i$ малы по сравнению с \sqrt{e}/L . Иными словами, формулы (1.13) и (1.14) справедливы в тех подобластях турбулентных течений, где параметры $\zeta_i = L(\partial \ln \sqrt{e} / \partial x_i) - (\partial \ln L / \partial x_i)$ малы. Аналогичный параметр $\zeta = L \partial(\ln e) / \partial y$ введен в формулы для турбулентных коэффициентов переноса в [3, 4] и найдено, что влияние переменной энергии турбулентности существенно вблизи свободных границ течений типа пограничного слоя.

В течениях типа пограничного слоя ($\partial U / \partial y \neq 0$, $\partial U / \partial x = -\partial V / \partial y = \partial V / \partial x = 0$) формулы (1.13) и (1.14) значительно упрощаются

$$\begin{aligned} \frac{\langle u'^2 \rangle}{e} &= \frac{2}{3} \frac{1}{\Gamma} \left(1 + \frac{9}{2} \alpha_0^2 \frac{Z^2}{F} \right) \\ \frac{\langle v'^2 \rangle}{e} &= \frac{\langle w'^2 \rangle}{e} = \frac{2}{3} \frac{1}{\Gamma} \\ T &= -\frac{\langle u'v' \rangle}{e} = \alpha_0 \frac{Z}{\sqrt{F}\Gamma} \\ F &= 1 + \alpha_0^2 h_0^2 Z^2, \quad \Gamma = 1 + \frac{3}{2} \alpha_0^2 \frac{Z^2}{F}, \quad Z = \frac{L}{\sqrt{e}} \frac{\partial U}{\partial y} \end{aligned} \tag{2.1}$$

Из (2.1) следует, что $\langle v'^2 \rangle = \langle w'^2 \rangle$. Однако последнее справедливо только в струйных течениях (струи, следы за телами). В пограничных слоях вблизи обтекаемой твердой поверхности измерения дают $\langle v'^2 \rangle < \langle w'^2 \rangle$ (см., например, [16]). По-видимому, вблизи обтекаемых твердых поверхностей, когда расстояние от точки наблюдения до поверхности сравнимо с масштабом турбулентности, не выполняется предположение об изотропности распределения плотности вероятности начальных скоростей турбулентных молей.



Сравнение теоретической зависимости безразмерного трения T от безразмерного сдвига z с экспериментальными данными. Сплошная кривая — зависимость (2.1) при $\alpha_0 = 0,8$ и $h_0 = 2,13$. Координаты точек вычислены по экспериментальным данным работ: 1 — [19], 2 — [18], 3 — [20], 4, 5, 6 — [17] при $x/d = 500, 650$ и 800 соответственно

Из этих рассуждений следует, что определять эмпирические коэффициенты α_0 и h_0 , входящие в формулы (1.13) и (1.14) и в их упрощенные варианты (2.1), необходимо исходя из результатов измерений в струйных течениях. При этом для обработки следует принимать во внимание только ту часть области течения, где параметр ζ мал. В [3, 4] было найдено, что этот параметр входит в выражение для турбулентной вязкости в виде множителя $(1 + \zeta^2/4)$. Если предположить, что влияние параметра ζ не должно превышать 2–3%, то в обработке должна участвовать лишь та часть области течения, где $|\zeta| < 0,3$.

Эмпирические коэффициенты α_0 и h_0 определены по результатам экспериментов [17–20], где измерены распределения средней скорости, пульсаций компонент вектора скорости ($\langle u'^2 \rangle$, $\langle v'^2 \rangle$, $\langle w'^2 \rangle$), напряжения трения $\langle u'v' \rangle$ и масштаба турбулентности L .

Распределения параметров течения в струях и следах аппроксимировались в виде $f = P_n(\eta) \exp(-P_m(\eta))$, где $P_n(\eta)$ и $P_m(\eta)$ — полиномы, $\eta = y/\delta(x)$, δ — толщина следа или струи. Полиномы $P_m(\eta)$ включают в себя только четные степени переменной η , а полиномы $P_n(\eta)$ — либо только четные, либо только нечетные степени η в зависимости от аппроксимируемой функции. Коэффициенты полиномов $P_n(\eta)$ и $P_m(\eta)$ определялись для каждого поперечного сечения течения нелинейным методом наименьших квадратов. Описанные аппроксимации использовались для вычисления производных $\partial U/\partial y$, $\partial e/\partial y$ и значений параметров в произвольных точках.

Таким способом в ряде точек пространства были вычислены пары значений: $T = -\langle u'v' \rangle / e$, и $Z = (L \partial U / \partial y) / \sqrt{e}$. На фигуре точками изображена зависимость $T = T(Z)$, полученная в результате вычисления пар значений T и Z по экспериментальным данным. Точки 1 соответствуют парам значений T и Z , полученным по данным [19], 2 — [18], 3 — [20], 4, 5, 6 — [17]. Далее нелинейным методом наименьших квадратов подбирались значения α_0 и h_0 , причем для величины h_0 указывалось предельное нижнее значение $h_0 \geq 3/\sqrt{2}$. Значения коэффициентов, соответствующие наилучшему приближению к экспериментальным данным при заданном ограничении для h_0 , оказались равны $\alpha_0 = 0,8$, $h_0 = 2,13$. Кривая на фигуре соответствует последней формуле (2.1) при найденных значениях α_0 и h_0 .

Полученное здесь значение α_0 оказалось примерно в 2,5 раза больше значения этого коэффициента в [3]. Это различие объясняется тем, что в [3] использовались экспериментальные данные не только струйных течений, но и данные, относящиеся к плоским течениям в пограничном слое на пластине и в канале. Выше уже отмечалось различия распределений характеристик турбулентности в этих двух классах пограничных течений. Кроме того, отметим еще одно различие: вблизи обтекаемой твердой поверхности производная $\partial L/\partial y = O(1)$, т.е. значительно отличается от нуля. Поэтому расхождения в значениях коэффициента α_0 с точки зрения изложенной выше модели турбулентного перемешивания представляются вполне естественными.

Заключение. В работе получены выражения для компонент тензора рейнольдсовых напряжений от определяющих параметров для двумерных турбулентных течений. Определяющие параметры выражаются через производные компонент средней скорости по координатам и два параметра турбулентности – ее энергию и масштаб.

Компоненты нормальных рейнольдсовых напряжений вдоль направлений x и y имеют вид суммы анизотропного давления, пропорционального энергии турбулентности, и произведения турбулентной вязкости на скорости удлинения вдоль тех же направлений. Напряжения сдвига имеют вид суммы произведений анизотропных турбулентных вязкостей на производные компонент средней скорости $\partial U/\partial y$ и $\partial U/\partial x$.

Анизотропия турбулентного давления и турбулентной вязкости имеет место в тех точках течения, где средняя завихренность отлична от нуля.

Вид полученных формул для компонент тензора рейнольдсовых напряжений отличается от общепринятого. Отличия связаны с учетом нелинейных относительно скоростей деформаций слагаемых.

В полученных выражениях присутствуют два эмпирических коэффициента, значения которых были определены по результатам измерений характеристик турбулентных течений в следах за цилиндром и струях. Значительный разброс экспериментальных точек около теоретической кривой пока не позволяет выявить какую-либо определенную зависимость эмпирических коэффициентов от числа Рейнольдса турбулентности, хотя для рассмотренных экспериментальных данных оно изменялось в широких пределах: от 20 до 1800.

Предложенный в настоящей работе метод получения выражений для компонент тензора рейнольдсовых напряжений (а также компонент тензора турбулентной вязкости) дает явные формулы, что значительно облегчает как обработку экспериментальных данных для определения значений эмпирических коэффициентов, так и их применение в последующих расчетах. Для тех приложений теории турбулентных течений, в которых требуется знание распределений турбулентных пульсаций всех компонент вектора скорости, будут полезны выражения (1.17), которые связывают $\langle u_i'^2 \rangle$ с энергией турбулентности.

Полученные здесь выражения компонент тензора рейнольдсовых напряжений можно применять в любых двухпараметрических моделях турбулентности. Для широко распространенной модели энергия – диссипация ($k - \epsilon$) значение L при больших числах Рейнольдса можно вычислять исходя из выражения для диссипации энергии турбулентности, в котором в качестве масштаба турбулентности принят поперечный интегральный масштаб $L = \int_0^\infty R_{11}(0, r, 0) dr$, $R_{11}(0, r, 0) = \langle u'(y+r/2)u'(y-r/2) \rangle / \sqrt{\langle u'^2(y+r/2) \rangle \langle u'^2(y-r/2) \rangle}$. Для такого определения масштаба турбулентности ее диссипация равна $\epsilon = 0,4e^{3/2}/L$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 95-01-00149а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Глушко Г.С. Турбулентный пограничный слой на плоской пластине в несжимаемой жидкости // Изв. АН СССР. Механика. 1965. № 4. С. 13–23.
2. Колмогоров А.Н. Уравнения турбулентного движения несжимаемой жидкости // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1942. Т. 6. № 1/2. С. 56–58.
3. Глушко Г.С. Некоторые особенности турбулентных течений несжимаемой жидкости с поперечным сдвигом // Изв. АН СССР. МЖГ. 1971. № 4. С. 128–136.
4. Глушко Г.С., Солопов В.А. Процесс переноса тепла в турбулентных течениях // Изв. АН СССР. МЖГ. 1972. № 4. С. 18–24.
5. Глушко Г.С. Модель турбулентного смешения в потоках со сдвигом // Турбулентные течения. М.: Наука, 1974. С. 56–61.
6. Glushko G.S., Gumilevskii A.G. Application of a turbulent mixing model to the computation of swirling turbulent flows // Proc. 17th Session BSHC. Varna: Bulg. Ship Hydrodyn. Centre, 1988. P. 11/1–11/5.
7. Ambartsumian E.N., Glushko G.S., Gumilevskii A.G. Experimental study of influence of buoyancy forces on turbulent momentum transfer // Proc. 17th Session BSHC. Varna: Bulg. Ship Hydrodyn. Centre, 1988. P. 12/1–12/4.
8. Gumilevskii A.G., Glushko G.S. Mathematical model for calculating viscosity tensor components in swirling flows // Proc. 5th EPS Liquid State Conf.: "On turbulence". Moscow: Europ. Phys. Soc., 1989. P. 65–68.
9. Ambartsumian E.N., Glushko G.S., Gumilevskii A.G. et al. Model of turbulent transport in stratified fluid // Proc. 5th EPS Liquid State Conf. "On turbulence". Moscow: Europ. Phys. Soc., 1989. P. 204–207.
10. Глушко Г.С., Амбарцумян Е.Н., Гумилевский А.Г. и др. Математическая модель турбулентных процессов переноса: Препринт № 461. М.: ИПМ АН СССР, 1990. 51 с.
11. Глушко Г.С., Крюков И.А. Математическая теория турбулентных процессов переноса. Ч. 2.: Препринт № 533. М.: ИПМ РАН. 1994. 23 с.
12. Глушко Г.С., Крюков И.А. Модель турбулентного переноса // Тр. 1-й Рос. нац. конф. по теплообмену. М.: Изд-во МЭИ, 1994. Т. 1. С. 91–96.
13. Амбарцумян Е.Н., Глушко Г.С., Крюков И.А. Вычисление тензора турбулентной вязкости в плоских течениях несжимаемой жидкости: Препринт № 547. М.: ИПМ РАН, 1995. 23 с.
14. Булеев Н.И. Пространственная модель турбулентного обмена. М.: Наука, 1989, 343 с.
15. Chung P.M. A simplified statistical model of turbulent, chemically reacting shear flows // AIAA Journal. 1969. V. 7. № 10. P. 1982–1991.
16. Хинце И.О. Турбулентность. Ее механизм и теория. М.: Физматгиз, 1963. 680 с.
17. Townsend A.A. The fully developed turbulent wake of a circular cylinder // Austral. J. Sci. Res. 1949. Ser. A. V. 2. № 4. P. 451–468.
18. Fabris G. Conditional sampling study of the turbulent wake of cylinder. Pt 1 // J. Fluid Mech. 1979. V. 94. Pt. 4. P. 673–709.
19. Bradbury L.J.S. The structure of a self-preserving turbulent plane jet // J. Fluid. Mech. 1965. V. 23. Pt 1. P. 31–64.
20. Gutmark E., Wygnanski I. The planar turbulent jet // J. Fluid. Mech. 1976. V. 73. Pt 3. P. 465–495.

Москва

Поступила в редакцию
23.1.1996