

УДК 532.516.5.013 : 536.25

© 1997 г. О.А. БЕССОНОВ, В.А. БРАЙЛОВСКАЯ, В.И. ПОЛЕЖАЕВ

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ЭФФЕКТЫ КОНВЕКЦИИ В РАСПЛАВАХ: КОНЦЕНТРАЦИОННЫЕ НЕОДНОРОДНОСТИ, ВОЗНИКНОВЕНИЕ НЕСИММЕТРИИ И КОЛЕБАНИЯ

Дается определение пространственных характеристик и рассматривается распределение примеси, обусловленное конвекцией в удлиненном параллелепипеде с боковым подводом тепла. На основе численного решения трехмерных нестационарных уравнений Навье – Стокса в приближении Буссинеска исследуется пространственная структура течения и концентрационные неоднородности в области размером $1 \times 1 \times 4$ при различных числах Грасгофа. Определены значения числа Грасгофа, при которых нарушается симметрия в поперечном сечении, а также возникают колебания, обусловленные тепловой гравитационной конвекцией.

Наличие тепловой гравитационной конвекции в замкнутой области приводит к концентрационным неоднородностям, которые существенно зависят от режима конвекции [1]. Слабые конвективные течения, которые типичны для областей малого размера или условий микрогравитации, приводят к так называемым макронеоднородностям, имеющим глобальный характер. Интенсивная конвекция вызывает микронеоднородности, масштаб которых обусловлен масштабом локальной структуры конвекции. Оба этих вида неоднородностей в последние годы вызывают интерес в связи с их важной ролью в получении материалов высокого качества в земных условиях и в условиях микрогравитации [1].

В двумерном приближении показано [2], что тепловая конвекция приводит при определенном значении числа Рэлея к максимуму поперечной неоднородности распределения примеси. Этот результат, обобщенный в дальнейшем на случай с наличием фронта кристаллизации [3, 4], позволил качественно объяснить аномальный эффект увеличения макронеоднородности распределения примеси в экспериментах по кристаллизации полупроводников в ампуле на борту орбитальных станций [5, 6] и получил развитие в ряде других работ, обзор которых был дан в [7].

Однако роль пространственных эффектов и конвективной неустойчивости, в том числе их влияние на величину максимума поперечной неоднородности, до сих пор остается невыясненной, несмотря на появление в последние годы ряда работ, посвященных решению трехмерных задач тепловой гравитационной конвекции в замкнутых областях [8–11]. В частности, в работе [12] высказывается гипотеза о наличии "второго максимума" при увеличении числа Рэлея и даются качественные соображения о появлении колебаний, которые требуют проверки на основе решения соответствующих пространственных задач.

В настоящей работе вопросы влияния пространственных эффектов на распределение примеси в прямоугольном параллелепипеде рассматриваются в постановке, обобщающей соответствующую двумерную постановку в области с соотношением сторон $1 : 4$ в работе [2] для типичного случая расплава германия с примесью кремния (число Прандтля 0,016, число Шмидта 10). Уточняется понятие средней разности концентрации на верхней и нижней границах области, а также исследуются кон-

центрационные неоднородности поперек параллелепипеда для симметричного и несимметричного режимов конвективного течения.

Для решения пространственных задач разработан новый численный метод на основе нестационарных уравнений Навье – Стокса в приближении Буссинеска. Метод применялся ранее для моделирования течения в трехмерной полости с движущимися крышками [13], а также для решения задачи тепловой гравитационной конвекции в кубе.

1. Математическая модель. Рассматривается течение, вызванное градиентами температуры и концентрации в поле сил тяжести в прямоугольном параллелепипеде. Математическое моделирование основано на нестационарных уравнениях Навье – Стокса в приближении Буссинеска.

Исходные уравнения записываются в безразмерном виде в консервативной форме в переменных завихренность – векторный потенциал $\omega - \psi$, температура θ и концентрация C

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{V}\theta) = \frac{1}{\text{RePr}} \nabla^2 \theta \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{V}C) = \frac{1}{\text{RePr}_D} \nabla^2 C \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \nabla \times (\omega \times \mathbf{V}) + \frac{1}{\text{Re}} \nabla \times (\nabla \times \omega) = -\nabla \times (\mathbf{g}\theta) - \frac{\text{Ra}_D}{\text{Re}^2 \text{Pr}_D} \nabla \times (\mathbf{g}C) \quad (1.3)$$

$$\nabla^2 \psi = -\omega \quad (1.4)$$

$$\text{Re} = \sqrt{\frac{\text{Ra}}{\text{Pr}}}, \quad \text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha}, \quad \text{Ra} = \frac{g\beta_T H^3 (T_L - T_S)}{\nu\alpha}$$

$$\text{Pr}_D = \frac{\nu}{D}, \quad \text{Ra}_D = \frac{g\beta_C H^3 (C_L - C_S)}{\nu D}$$

Здесь Re , Pr , Ra – числа Рейнольдса, Прандтля и Рэлея; Pr_D – диффузионное число Прандтля (число Шмидта); Ra_D – диффузионное число Рэлея; g – ускорение свободного падения; ν – коэффициент кинематической вязкости; α – коэффициент температуропроводности; D – коэффициент диффузии; β_T – коэффициент температурного расширения; β_C – коэффициент концентрационного расширения; H , W , L – высота, ширина и длина рассматриваемой области (по осям X , Y и Z соответственно); T_L – температура на подогреваемой стенке; T_S – температура кристаллизации; C_L , C_S – концентрация примеси в жидкой и твердой фазах.

В качестве масштабов длины, скорости, времени, температуры и концентрации выбраны соответственно H , $\nu\text{Re}/H$, $H^2/\nu\text{Re}$, $T_L - T_S$ и $C_L - C_S$.

Завихренность ω и векторный потенциал ψ определяются через скорость \mathbf{V}

$$\omega = \nabla \times \mathbf{V}, \quad \mathbf{V} = \nabla \times \psi, \quad \nabla \cdot \psi = 0 \quad (1.5)$$

Использование определения векторного потенциала (1.5) и вычисление скорости через него позволяют тождественно удовлетворить уравнению неразрывности $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$.

На всех границах области заданы условия непротекания и прилипания. Граничные значения завихренности ω вычисляются из определения (1.5), а значения касательных и нормальной компонент векторного потенциала (ψ_s , ψ_t и ψ_n соответственно) задаются как

$$\psi_s = 0, \quad \psi_t = 0, \quad \frac{\partial \psi_n}{\partial n} = 0$$

На торцевых стенках области заданы следующие значения температуры и концентрации:

$$Z = 0: \theta = 0, C = 0; \quad Z = L/H: \theta = 1, C = 1$$

На остальных стенках заданы линейное распределение температуры вдоль области и условие Неймана для концентрации

$$\theta(Z) = ZH/L, \quad \partial C/\partial n = 0$$

В начальный момент времени во всей области выполняются условия

$$V = 0, \quad \theta(Z) = ZH/L, \quad C = 1$$

2. Метод решения. Используется отдельный принцип решения уравнений (1.1)–(1.4). Уравнения (1.1)–(1.3) записываются в дискретном виде в неявной форме для верхнего временного слоя $n + 1$ и связываются явным образом через экстраполированное (по времени) поле скорости. Затем решается уравнение Пуассона для векторного потенциала (1.4) и вычисляются новые значения поля скоростей. Метод обеспечивает 2-й порядок точности решения по времени.

Уравнения решаются в области, имеющей форму прямоугольного параллелепипеда, методом конечных разностей с использованием принципа контрольных объемов. Применены разнесенные сетки с размещением физических величин в различных местах вычислительной ячейки. Используется равномерная сетка в направлениях X, Y и неравномерная сетка в направлении Z . Применение разнесенных сеток позволяет обеспечить консервативность для завихренности $\nabla \cdot \omega = 0$ на дискретном уровне.

Для решения уравнений переноса скалярной величины (1.1), (1.2) применен метод переменных направлений с использованием трехслойной неявной схемы Эйлера 2-го порядка точности для интегрирования по времени.

Для решения векторного уравнения переноса завихренности (1.3) также применен неявный метод переменных направлений. Для обеспечения неявной трактовки перекрестных членов уравнения используется специальная векторная факторизация трехмерного конечно-разностного оператора.

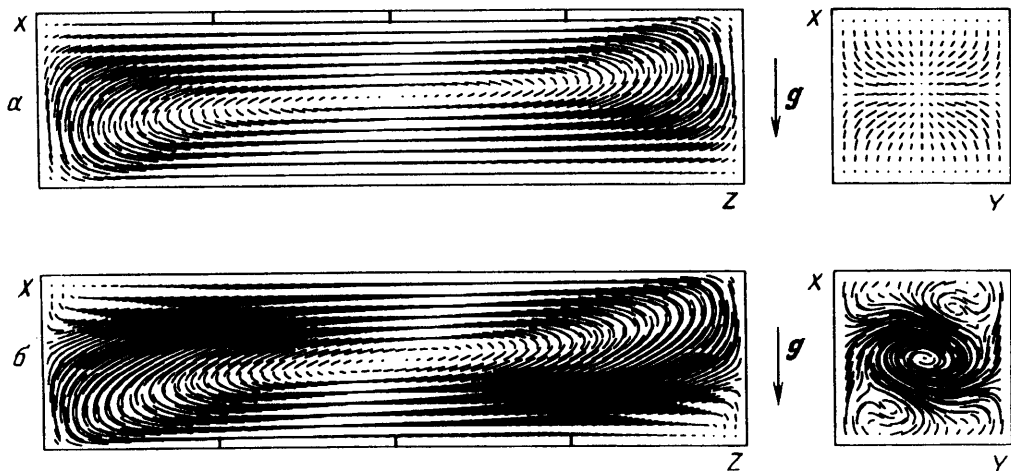
Уравнение Пуассона для векторного потенциала (1.4) решается методом разделения переменных с использованием быстрого преобразования Фурье, с разложением в двойной ряд по двум пространственным направлениям и прогонкой по третьему направлению. В зависимости от граничных условий для компонент векторного потенциала ψ используется разложение по синусам либо по косинусам.

Дискретизация конвективных и диффузионных членов уравнений переноса (1.1)–(1.3) производится с использованием принципа контрольных объемов. Трехмерный оператор пространственной дискретизации рассматривается как суперпозиция одномерных операторов по трем направлениям. Условие консервативности завихренности $\nabla \cdot \omega = 0$ обеспечивается на дискретном уровне за счет попарной компенсации членов, дающих вклад в дивергенцию завихренности.

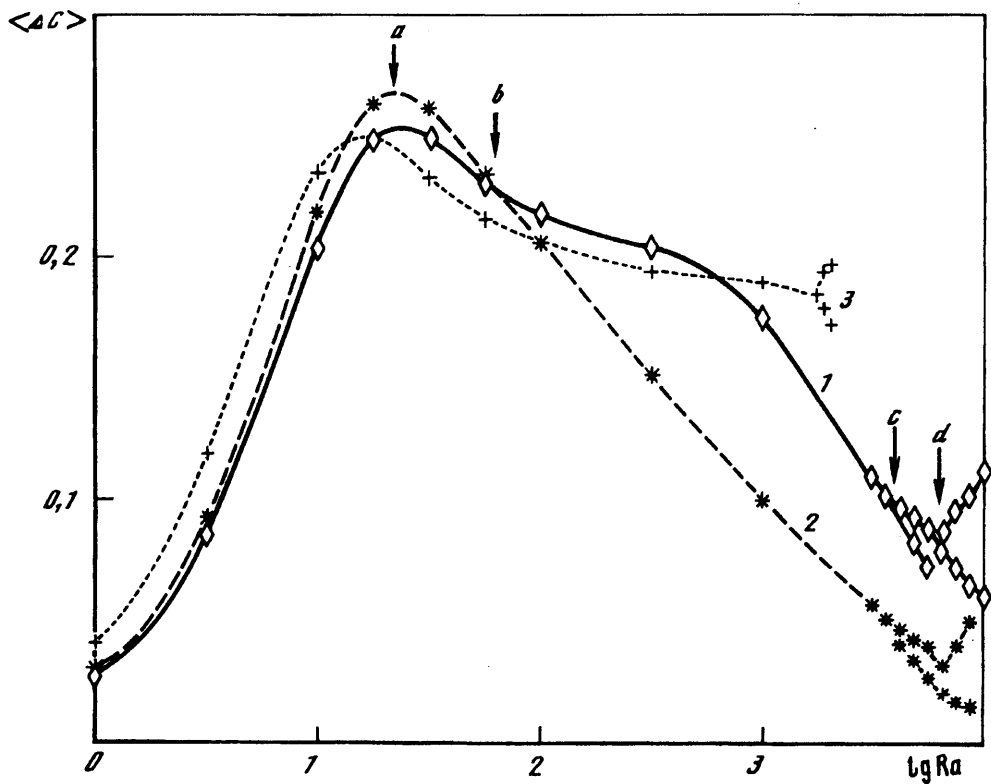
Для дискретизации конвективных членов применена невязкая схема с разностями против потока, являющаяся разновидностью известных схем QUICK и QUICKEST [14]. В основе схемы лежит аппроксимация переносимой величины на границе контрольного объема через квадратичную интерполяцию против течения. Схема обеспечивает формально 3-й порядок точности, улучшенную монотонность и минимальную численную дисперсию.

В целом пространственная дискретизация обеспечивает 2-й порядок точности, включая дискретизацию граничных условий.

3. Анализ пространственной структуры течения и распределения примеси. Исследовались характеристики течения жидкости с параметрами $Pr = 0,016$ и $Pr_D = 10$ в области размером $1 \times 1 \times 4$ ($W/H = 1, L/H = 4$) при различных значениях числа Ra . В расчетах полагалось $Ra_D = 0$, т.е. распределение примеси не оказывает влияния на динамику жидкости. Для сопоставления с результатами других работ, например ([8,



Фиг. 1. Картина течения для симметричного (a , $Ra = 10^3$) и несимметричного (b , $Ra = 10^{3.75}$) режимов: слева – центральное продольное сечение $Y = 0,5$; справа – центральное поперечное сечение $Z = 2$



Фиг. 2. Средняя разность концентрации на верхней и нижней границах. Зависимость от числа Рэлея: 1 – $\langle \Delta C \rangle$ (осреднение по площади грани), 2 – $\langle \Delta C_l \rangle$ (осреднение по центральной продольной линии), 3 – двумерный случай

11)) в качестве характеристики режима используется число Грасгофа Gr^* , вычисленное с обезразмериванием по среднему продольному градиенту температуры

$$Gr^* = \frac{g\beta_T H^4 (T_L - T_S)}{Lv^2} = \frac{Ra}{Pr} \frac{H}{L}$$

На фиг. 1 показана геометрия задачи (на примере картины течения в двух режимах в продольном и поперечном сечениях). Градиент температуры направлен вдоль оси Z , а единичный вектор силы тяжести – вниз по оси X .

В большей части расчетов использовались сетки $33 \times 33 \times 93$ со сгущениями у торцов полости. Минимальный шаг сетки в продольном направлении составлял 0,025.

Исследования проводились в диапазоне от $Ra = 1$ ($Gr^* = 1,56 \cdot 10^1$) до $Ra = 10^5$ ($Gr^* = 1,56 \cdot 10^6$). Значения $Ra > 10^{3,8}$ ($Gr^* > 10^5$), соответствующие развитым колебательным режимам, предполагается рассмотреть в отдельной работе. В настоящей работе рассматриваются преимущественно стационарные режимы симметричного и несимметричного течений вплоть до появления колебаний с целью определения пространственных эффектов макронеоднородности распределения примеси в сравнении с двумерным случаем [1, 2].

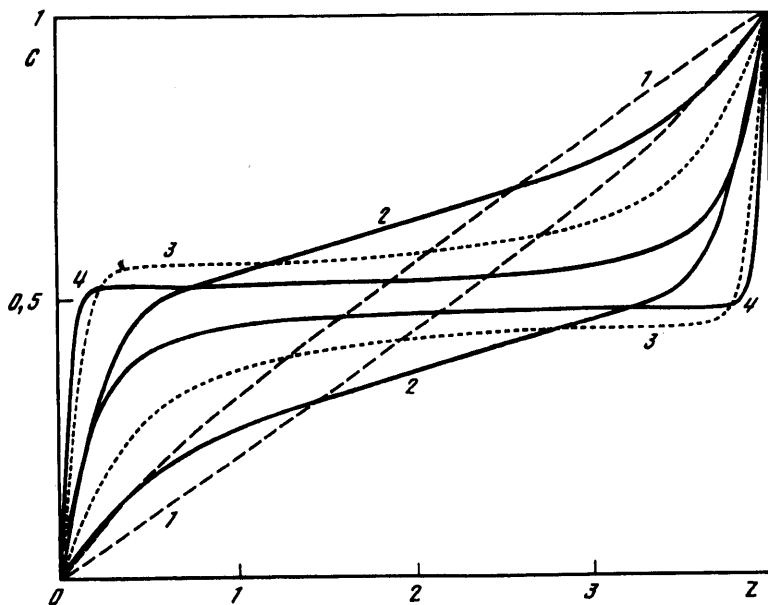
В качестве индикатора режима течения и основной характеристики концентрационного расслоения, следуя [2], удобно использовать среднюю разность концентрации на верхней и нижней гранях полости $\langle \Delta C \rangle$. Для выявления трехмерных эффектов в поперечном направлении важной характеристикой является также величина $\langle \Delta C_l \rangle$, вычисленная как средняя разность концентрации на центральной продольной линии $Y = 0,5$ верхней и нижней граней.

На фиг. 2 показана зависимость от числа Рэлея величин $\langle \Delta C \rangle$ и $\langle \Delta C_l \rangle$, а также, для сравнения, значения средней разности концентрации на верхней и нижней границах для двумерного случая.

На фиг. 2 можно выделить несколько областей, характеризующихся различными режимами конвекции. В точке a кривые $\langle \Delta C \rangle$ и $\langle \Delta C_l \rangle$ имеют резко выделяющийся максимум при $Ra = 10^{1,35}$ ($Gr^* = 3,5 \cdot 10^2$). В точке b кривые пересекаются при $Ra = 10^{1,8}$ ($Gr^* = 10^3$). Значение $Ra = 10^{3,6}$ ($Gr^* = 6,6 \cdot 10^4$) в точке c соответствует переходу в несимметричный режим течения относительно плоскости $Y = 0,5$. Начиная с точки d при $Ra = 10^{3,8}$ ($Gr^* = 10^5$) течение приобретает колебательный характер.

Отсюда следует важный вывод. Если в земных условиях значения числа Рэлея соответствуют на графике области справа от точки d , то при переходе в условия пониженной гравитации можно попасть в окрестность точки a , которая соответствует максимуму концентрационного расслоения. Физической причиной уменьшения величин $\langle \Delta C \rangle$ и $\langle \Delta C_l \rangle$ при увеличении числа Рэлея (от точки a к точке d) является переход от режима слабой конвекции, приводящей в основном к вертикальному расслоению концентрации, к режиму более интенсивной конвекции, которая перемешивает жидкость.

Рассмотрим различные режимы течения подробнее. Для малых и средних значений числа Рэлея $Ra \leq 10^3$ представляет интерес сравнение профилей концентрации на центральной продольной линии ($Y = 0,5$) верхней и нижней граней полости (фиг. 3). Площадь области на графике, ограниченная профилями для верхней и нижней граней, представляет из себя среднюю разность концентрации $\langle \Delta C_l \rangle$ (после нормировки на длину L). Для $Ra = 10^{1,25}$ профили далеко отстоят друг от друга, что соответствует максимуму концентрационного расслоения. При малом значении числа Рэлея $Ra = 10^{0,5}$ профили почти соответствуют диффузионному режиму массообмена. При больших значениях $Ra = 10^2$ и 10^3 происходит существенное перераспределение концентрации с резко выраженными пограничными слоями вблизи торцевых граней ($Z = 0$ и L/H) и ядром с постоянной концентрацией внутри области. Как для малых, так и для больших значений числа Рэлея площадь, ограниченная профилями, меньше, чем для промежуточного режима $Ra = 10^{1,25}$, что соответствует графику $\langle \Delta C_l \rangle$ на фиг. 2.



Фиг. 3. Профили концентрации $C(Z)$ на центральной продольной линии ($Y = 0,5$) верхней и нижней границ области: 1 - $Ra = 10^{0,5}$, 2 - $Ra = 10^{1,25}$, 3 - $Ra = 10^2$, 4 - $Ra = 10^3$

Рассмотрим теперь распределение концентрации примеси в поперечном направлении. На фиг. 4 представлены изолинии концентрации в поперечном сечении $Z \approx 2$ для различных значений числа Рэлея. Для $Ra = 10^{1,25}$ видно, что на верхней и нижней границах концентрация имеет максимум в центральной точке $Y = 0,5$ и снижается к краям. Это соответствует тому, что значение $\langle \Delta C \rangle$ превышает значение $\langle \Delta C \rangle$ на графике фиг. 2.

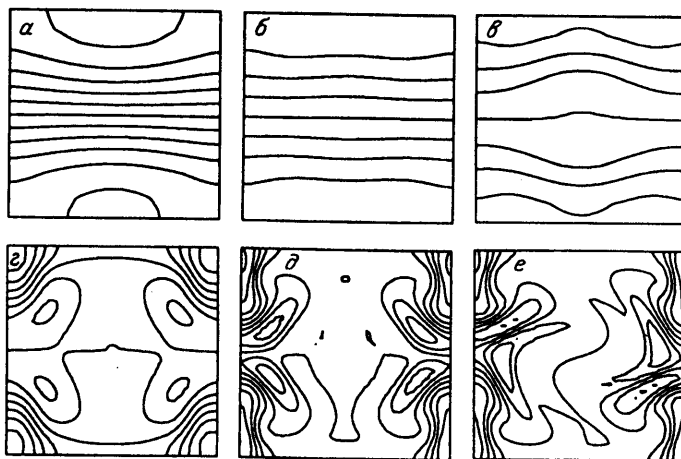
Значение $Ra = 10^{1,75}$ близко к точке пересечения графиков $\langle \Delta C \rangle$ и $\langle \Delta C \rangle$, что соответствует выравниванию концентрации в поперечном направлении (как на верхней и нижней границах, так и по всей высоте полости).

Для $Ra = 10^2$ концентрация на верхней и нижней границах увеличивается от центра к краям. Для $Ra = 10^3$ и выше концентрация сильно возрастает во всех четырех углах поперечного сечения, оставаясь практически постоянной в центральном ядре. И наконец, при $Ra = 10^{3,62}$ течение становится несимметричным.

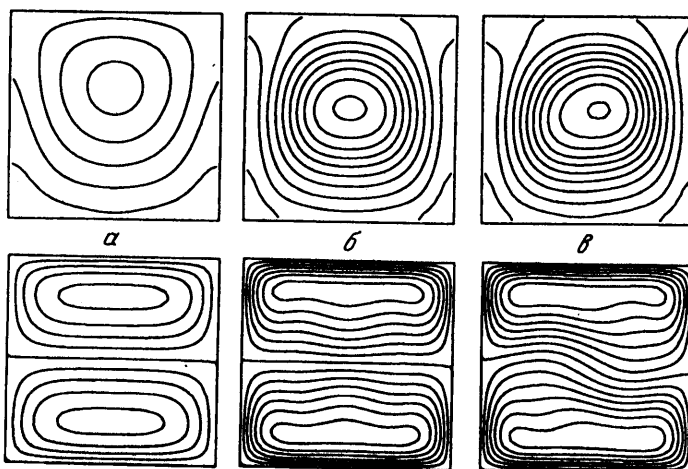
На фиг. 5 приведены изолинии градиента концентрации по нормали на холодной стенке ($Z = 0$) для различных значений Ra . Из рисунка видно, что при увеличении от $Ra = 10^3$ до $Ra = 10^{3,56}$ градиент концентрации резко возрастает, что связано с увеличением конвективного переноса массы к холодной стенке. Для $Ra = 10^{3,62}$ картина становится несимметричной. На фиг. 5 также представлены изолинии продольной компоненты скорости V_z в центральном поперечном сечении ($Z = 2$).

4. Переход к несимметричному и нестационарному режимам. Разница между симметричным и несимметричным режимами хорошо видна на фиг. 1. Картина симметричного течения в плоскости $Y = 0,5$ (фиг. 1, а) качественно совпадает с двумерным случаем. Для несимметричного течения (фиг. 1, б) плоскость рециркуляции основного вихря наклонена относительно плоскости $Y = 0,5$. Как видно из поперечного сечения $Z = 2$, картина течения приобрела симметричную форму по отношению к повороту на 180° вокруг точки $X = 0,5, Y = 0,5$.

Хотя в основе возникновения поперечной асимметрии лежит нарушение гидродинамического равновесия, можно использовать среднюю разность концентрации $\langle \Delta C \rangle$



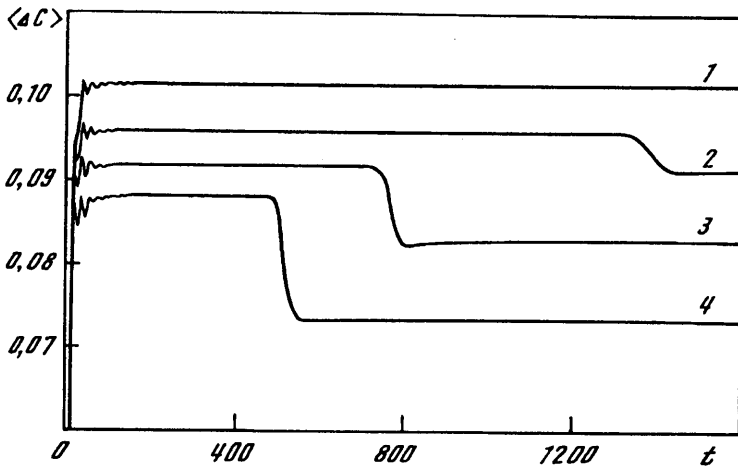
Фиг. 4. Изолинии концентрации в поперечном сечении $Z = 1,98$: $a - Ra = 10^{1,25}$, $б - Ra = 10^{1,75}$, $в - Ra = 10^2$, $г - Ra = 10^3$, $д - Ra = 10^{3,56}$, $е - Ra = 10^{3,62}$



Фиг. 5. Сверху – изолинии градиента концентрации по нормали $\partial C/\partial Z$ на фронте кристаллизации ($Z = 0$); снизу – изолинии продольной компоненты скорости V_z в центральном поперечном сечении ($Z = 2$): $a - Ra = 10^3$, $б - Ra = 10^{3,56}$, $в - Ra = 10^{3,62}$

как индикатор режима конвекции. Рассмотрим динамику $\langle \Delta C \rangle$ по времени для различных значений числа Рэлея от $10^{3,56}$ до $10^{3,75}$ (фиг. 6). Для $Ra = 10^{3,56}$ процесс быстро достигает стационарного состояния и соответствует симметричному режиму течения. Для значений $Ra \geq 10^{3,62}$ процесс сначала выходит на первое стационарное состояние, соответствующее симметричному режиму, а затем переходит на другое состояние, соответствующее несимметричному режиму, с меньшим значением $\langle \Delta C \rangle$. С ростом числа Ra этот переход происходит все раньше, а уменьшение величины $\langle \Delta C \rangle$ становится все больше, что связано с увеличением наклона плоскости рециркуляции основного вихря относительно вертикали.

При дальнейшем увеличении числа Рэлея до $Ra = 10^{3,81}$ ($Gr^* = 1,01 \cdot 10^5$) происходит переход к колебательному режиму, вызванный потерей устойчивости течения в поперечном направлении.



Фиг. 6. Средняя разность концентрации на верхней и нижней границах $\langle \Delta C \rangle$. Зависимость от времени: 1 – $Ra = 10^{3.56}$, 2 – $Ra = 10^{3.62}$, 3 – $Ra = 10^{3.69}$, 4 – $Ra = 10^{3.75}$

На фиг. 2 для несимметричных режимов нанесены по два стационарных значения $\langle \Delta C \rangle$ и $\langle \Delta C \rangle_i$, а для колебательных режимов показаны пределы изменения значений $\langle \Delta C \rangle$ и $\langle \Delta C \rangle_i$.

Переход к колебательным режимам для различных параметров течения жидкости с $Pr = 0$ исследовался в работе [8]. Авторы приводят следующие результаты: $G_r^* = 10^5$ – стационарный режим, $G_r^* = 1,25 \cdot 10^5$ – колебательный режим. Это несколько выше, чем результаты настоящей работы: $0,88 \cdot 10^5$ и $1,01 \cdot 10^5$ соответственно. Различия можно объяснить тем, что авторы работы [8] априори считают течение симметричным и производят расчеты в половине области, тем самым пренебрегая поперечными трехмерными эффектами, которые лежат в основе коротковолновых колебаний. Тем же объясняется и большее, чем в настоящей работе, значение периода колебаний (18 против 8,25). В указанной работе не рассматривались эффекты концентрационного расслоения.

Заключение. Решение пространственной задачи открывает следующие новые эффекты в режимах тепловой конвекции и вызываемом ею распределении примеси в параллелепипеде.

Величина максимума средней разности концентрации (фиг. 2, точка *a*) и число Рэлея в точке максимума Ra_m приблизительно соответствуют значениям, полученным ранее на основе двумерной модели. Влияние пространственных эффектов становится заметным при числах $Ra > Ra_m$ и проявляется прежде всего в том, что средняя вертикальная разность концентрации $\langle \Delta C \rangle$, вычисленная с осреднением по площади граней, становится больше величины $\langle \Delta C \rangle_i$, осредненной по центральной продольной линии.

Наиболее важными из пространственных эффектов являются картины распределения примеси в поперечных сечениях и определение числа Ra , при котором течение становится несимметричным. Стадия потери симметрии может иметь затяжной характер, а картины колебательных режимов не могут быть полными без детального рассмотрения несимметричной моды. Эти новые эффекты концентрационных неоднородностей важны для анализа реальной картины распределения легирующих примесей в кристаллах [6].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 94-01-01551).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Полежаев В.И., Белло М.С., Верезуб Н.А. и др. Конвективные процессы в невесомости. М.: Наука, 1991. 240 с.
2. Полежаев В.И., Федюшкин А.И. Гидродинамические эффекты концентрационного расслоения в замкнутых объемах // Изв. АН СССР. МЖГ. 1980. № 3. С. 11–18.
3. Никитин С.А., Полежаев В.И., Федюшкин А.И. Конвекция и распределение примеси в кристаллах при направленной кристаллизации в невесомости // Технологические эксперименты в невесомости. Свердловск.: УНЦ АН СССР, 1983. С. 140–150.
4. Chang C.J., Brown R.A. Radial segregation induced by natural convection and melt/solid interface shape in vertical Bridgman growth // J. Crystal Growth. 1983. V. 63. № 2. P. 343–364.
5. Иванов Л.И., Земсков В.С., Кубасов В.Н. и др. Плавление, кристаллизация и фазообразование в невесомости. М.: Наука, 1979. 255 с.
6. Белокурова И.Н., Земсков В.С., Хавжу Д.М. Анализ результатов исследования ликвации компонентов в легированных кристаллах германия, полученных методом направленной кристаллизации в невесомости и в земных условиях // Физика и химия обработки материалов. 1990. № 6. С. 71–75.
7. Polezhaev V.I. Convective processes in microgravity // Proc. 1st Intern. Symp. Hydrodynam. and Heat / Mass Transfer in Microgravity. Chippenham, Wiltshire: Gordon and Breach, 1992. P. 15–24.
8. Afriid M., Zebib A. Oscillatory three-dimensional convection in rectangular cavities and enclosures // Phys. Fluids A. 1990. V. 2. № 8. P. 1318–1327.
9. Arnold W.A., Jacgmin D.A., Gaug R.L., Chait A. Three-dimensional flow transport modes in directional solidification during space processing // J. Spacecraft and Rocets. 1991. V. 28. № 2. P. 238–243.
10. Fusegi T., Hyun J.M., Kuwahara K., Farouk B. A numerical study of three-dimensional natural convection in a differently heated cubical enclosure // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1991. V. 34. № 6. P. 1543–1557.
11. Никитин С.А., Павловский Д.С., Полежаев В.И. Устойчивость и пространственная структура конвекции в вытянутых горизонтальных слоях при боковом подводе тепла // Изв. РАН. МЖГ. 1996. № 4. С. 28–37.
12. Brown R.A. Theory of transport processes in single crystal growth from the melt // AIChE Journal. 1988. V. 34. № 6. P. 881–911.
13. Bessonov O., Brailovskaya V., Polezhaev V., Roux B. Parallelization of the solution of 3D Navier – Stokes equations for fluid flow in a cavity with moving covers // Lecture Notes in Computer Science. Berlin: Springer, 1995. V. 964. P. 385–399.
14. Perng C.-Y., Street R.L. Three-dimensional unsteady flow simulations: Alternative strategies for a volume-averaged calculation // Intern. J. Num. Meth. Fluids. 1988. V. 9. № 3. P. 341–362.

Москва
Нижний Новгород

Поступила в редакцию
31.XII.1996