

УДК 532.516.5.013.2

© 1997 г. В.С. ГАСИЛОВ, Д.Н. ГРИШИН, С.И. ПОНИКАРОВ

ВЛИЯНИЕ ДВУХСЛОЙНОСТИ ЖИДКОСТИ НА РАЗВИТИЕ ТЕЧЕНИЯ ВБЛИЗИ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ПЛОСКОСТИ ПРИ РАЗГОНЕ

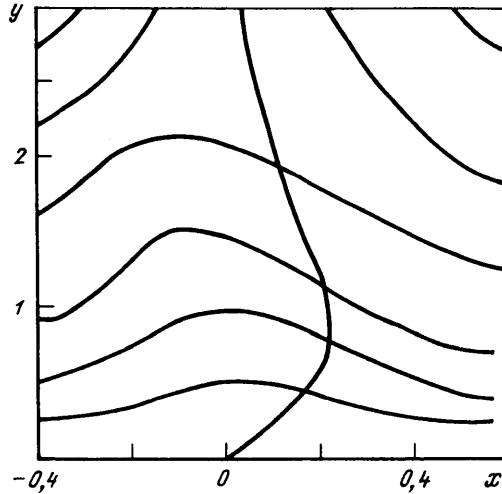
Представлены результаты численного расчета разгона двухслойной жидкости, расположенной над плоскостью, которая внезапно приведена во вращение. Первоначальная граница раздела жидкостей вертикальна. Описана методика проведения физического эксперимента. Проведено сравнение расчетных и экспериментальных результатов.

Развитие течения однородной жидкости вблизи вращающейся плоскости при разгоне подробно рассмотрено в литературе [1–3]. Отмечается, что основным в процессе разгона является развитие течения на твердой стенке, не параллельной оси вращения системы, в пограничном слое которой возникают вторичные течения. Аналогичная структура потока наблюдается в изогнутых трубопроводах и в кольцевых полостях вращающихся сосудов при постоянной и переменной скорости течения [4, 5]. Очевидно, что наличие двух несмешивающихся жидкостей с различными плотностями окажет существенное влияние на поле скоростей. Течения такого типа возникают в массообменных аппаратах химической технологии, использующих как интенсифицирующий фактор вращение жидкости, а также в трубопроводах, транспортирующих бинарные жидкие системы, например водонефтяные эмульсии. Наиболее существенна динамика разгона двухслойной жидкости при работе центробежного экстрактора, работающего с изменяющейся во времени угловой скоростью вращения [6].

Эксперименты [6] показали, что при изменении угловой скорости диска происходит искривление границы раздела жидкостей (фиг. 1). Так, при увеличении скорости часть легкой жидкости проникает в слой тяжелой, т.е. как бы "тонет". При торможении, наоборот, тяжелая жидкость "всплывает" в легкой. Этот процесс сопровождается существенным (в 8–10 раз) увеличением интенсивности массообмена.

1. Математическая модель. Пусть плоскость, над которой расположены две несмешивающиеся жидкости (фиг. 1), вращается вокруг оси z с угловой скоростью Ω_0 . Обозначим ρ_1, ρ_2 – плотности, ν_1, ν_2 – кинематические вязкости каждой из них, причем $\rho_1 < \rho_2$, $r = f(z, t)$ – уравнение границы раздела. При длительном равномерном вращении граница раздела становится вертикальной, т.е. $r = f(z, t) = r^*$, а все компоненты вектора скорости в цилиндрической системе координат r, z, θ , связанной с вращающимся диском, равны нулю: $V_r = V_\theta = V_z = 0$.

При мгновенном увеличении скорости вращения диска до $\Omega = \Omega_0 + \omega$ частицы жидкости, находящиеся непосредственно у горизонтальной стенки, приобретают дополнительную угловую скорость за счет силы трения и под действием возросшей центробежной силы вызывают радиальное течение, которое деформирует границу раздела жидкостей. Появление части одной жидкости в объеме, которую занимает другая жидкость, приводит к возникновению выталкивающей силы, стремящейся восстановить первоначальное положение границы.



Фиг. 1. Линии тока и форма границы раздела жидкостей, $A = 0,5$, $K_V = 1$, $t = 1,5$

Пусть цилиндрическая система координат r, z, θ вращается с угловой скоростью Ω_0 , тогда уравнения сохранения импульса и массы с учетом осесимметричности течения запишутся в виде

$$\frac{\partial V_\theta}{\partial \tau} + V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_\theta}{\partial z} + \frac{V_r V_\theta}{r} = -2\Omega_0 V_r + v_i \left[\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial z^2} - \frac{V_\theta}{r^2} \right] \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial V_r}{\partial \tau} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} + \frac{V_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho_i} \frac{\partial P}{\partial r} + 2\Omega_0 V_\theta + v_i \left[\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} - \frac{V_r}{r^2} \right] -$$

$$-\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1} \Omega_0^2 r H + \Omega_0^2 r$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial \tau} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_i} \frac{\partial P}{\partial z} + v_i \left[\frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right]$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_r) + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0; \quad i = 1, 2$$

Здесь слагаемое $(\rho_2 - \rho_1 / \rho_1) \Omega_0^2 H$ учитывает выталкивающую силу. Величина H принимает значение $+1$, когда легкая жидкость заходит в тяжелую, и -1 – когда тяжелая в легкую.

Рассмотрим, как в [3], задачу в предположении справедливости теории пограничного слоя. Введем безразмерные переменные

$$x = \frac{r - r^*}{R_0}, \quad y = \frac{z}{z_0}, \quad t = \frac{\tau}{\tau_0}, \quad F = \frac{f - r^*}{R_0}, \quad p = \frac{P}{P_0}, \quad U = \frac{V_r}{V_{r0}}$$

$$V = \frac{V_\theta}{V_{\theta 0}}, \quad W = \frac{V_z}{V_{z0}}, \quad R_0 = \frac{\omega r^*}{\Omega_0}, \quad z_0 = \sqrt{\frac{v_1}{\Omega_0}}, \quad \tau_0 = \frac{1}{\Omega_0}$$

$$V_{r0} = V_{\theta 0} = \omega r^*, \quad V_{z0} = \sqrt{v_1 \Omega_0}, \quad P_0 = 2\omega^2 \rho_1 r^{*2}$$

В безразмерных переменных система (1.1) запишется в виде

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + W \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\varepsilon UV}{1 + \varepsilon x} = -2U + K_v \left[\delta^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\varepsilon \delta^2}{1 + \varepsilon x} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\varepsilon^2 \delta^2}{(1 + \varepsilon x)^2} V \right] \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + W \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\varepsilon V^2}{1 + \varepsilon x} = -2K_p \frac{\partial p}{\partial x} + 2V + K_v \left[\delta^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\varepsilon \delta^2}{1 + \varepsilon x} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\varepsilon^2 \delta^2}{(1 + \varepsilon x)^2} U \right] - \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 \varepsilon} (1 + \varepsilon x) H$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + U \frac{\partial W}{\partial x} + W \frac{\partial W}{\partial y} = -\frac{2K_p}{\delta^2} \frac{\partial p}{\partial y} + K_v \left[\delta^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\varepsilon \delta^2}{1 + \varepsilon x} \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right]$$

$$\frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon x} \frac{\partial}{\partial x} [(1 + \varepsilon x)U] + \frac{\partial W}{\partial y} = 0$$

Дифференцируя по времени уравнение границы раздела фаз $R = f(z, t)$, получим, что изменение границы удовлетворяет кинематическому условию

$$\frac{\partial F}{\partial t} = U - W \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \varepsilon = \frac{\omega}{\Omega_0}, \quad \delta = \frac{v_1 \Omega_0}{\omega^2 r^{*2}}$$

Здесь ε – число Россби, δ – число Экмана, K_v – отношение вязкости i -той жидкости к вязкости первой жидкости, K_p – отношение плотности первой жидкости к плотности i -той.

Значения безразмерных комплексов для большинства режимных параметров $\varepsilon = 0,05-0,2$, $\delta = 0,005-0,01$, $K_v = 0,3-3$, $K_p = 0,8-1,6$.

С учетом этих значений третье уравнение системы в приближении пограничного слоя дает $\partial p / \partial y = o(\delta^2)$, т.е. давление поперек пограничного слоя постоянно, а член $\partial p / \partial x$ следует заменить его значением на границе пограничного слоя. При $y \rightarrow \infty$ жидкость покоится, поэтому можно положить $p = 0$. Пренебрегая в других уравнениях слагаемыми порядка $o(\varepsilon + \delta^2)$, из (1.2) получим систему

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + W \frac{\partial V}{\partial y} = -2U + K_v \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + W \frac{\partial U}{\partial y} = 2V + K_v \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1} K_p H \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial y} = 0 \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = U - W \frac{\partial F}{\partial y} \quad (1.6)$$

Начальные и граничные условия примут вид

$$F(0, t) = F(y, 0) = 0$$

$$z = 0: V = 1, U = W = 0 \quad (1.7)$$

$$y \rightarrow \infty: U = V = 0$$

$$t = 0: U = V = W = 0$$

Так как вдали от границы раздела ее влияние пренебрежимо мало, то условие по x будет

$$x \rightarrow \infty: \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial x} = W = 0 \quad (1.8)$$

При $\rho_1 = \rho_2$ и $v_1 = v_2$ полученная система совпадает с известной математической моделью разгона однородной жидкости [3].

Задача (1.3) – (1.8), содержащая четыре искомые функции U , V , W и F и слагаемое $\varepsilon^{-1}(\rho_2/\rho_1 - 1) K_p H$, терпящее разрыв на границе раздела жидкостей, решалась численно методом "сквозного счета". Для этого потребуем непрерывности напряжений на межфазной границе, тогда получим систему, справедливую для любого x

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + W \frac{\partial V}{\partial y} = -2U + \frac{\partial}{\partial y} \left[K_v \frac{\partial V}{\partial y} \right] \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + W \frac{\partial U}{\partial y} = 2V + \frac{\partial}{\partial y} \left[K_v \frac{\partial U}{\partial y} \right] + AK_p H \quad (1.10)$$

$$A = \varepsilon^{-1} (\rho_2/\rho_1 - 1)$$

Для численного решения от условий на бесконечности перейдем к конечной области. При этом условия на бесконечности по оси y заменяются на конечные, взятые из решения задачи для однородной жидкости, а по оси x условия выбираются из численного эксперимента. В результате получаем граничные условия

$$y = 4: U = V = 0; \quad x = -1, \quad x = 1: \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial x} = W = 0$$

2. Численное моделирование. Уравнения (1.9), (1.10) не содержат вторых производных по координате x , что может приводить к неустойчивости счета. В связи с этим введем в уравнение (1.10) слагаемое с искусственной вязкостью $\eta_1 \partial/\partial x [K_v \partial U/\partial x]$, а в уравнение (1.5) $\eta_2 \partial/\partial x [K_v \partial W/\partial x]$.

Так как задача имеет подвижную границу, использовалась следующая итерационная процедура.

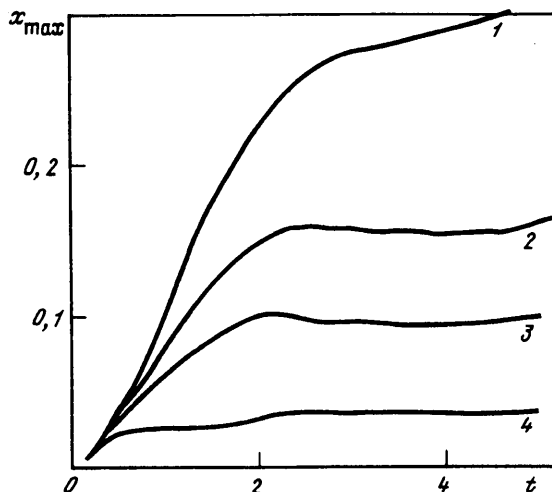
1. Начальное приближение для U , V , W , F бралось с предыдущего временного слоя.
2. Из уравнения (1.9) находилось новое приближение V .
3. С использованием вновь полученного V по уравнению (1.10) находилось новое приближение U .
4. С использованием полученного U по (1.5) находилось W .
5. Определялись U и W на границе F . Из решения уравнения (1.6) получалось очередное приближение границы F .
6. По найденным значениям F пересчитывались коэффициенты K_v , K_p , H .

Итерации выполнялись до удовлетворения условия $\sum |F_i - F_{i-1}| < \mu$, где i – номер итерации, $\mu > 0$ – малое число.

Использовались разностные схемы первого порядка аппроксимации, для каждого x разностные уравнения решались прогонкой по y . Уравнение неразрывности аппроксимировалось разностным аналогом типа Кранка – Никольсона. Для решения уравнения переноса границы раздела фаз использовалась явная разностная схема.

Вычислительный алгоритм тестировался методом сгущающихся сеток. Приемлемая точность расчетов ($\pm 5\%$) обеспечивалась при шаге по x , равном 0,024, по y – 0,1, по t – 0,005 и значениях псевдовязкостей $\eta_1 = 1,2 \cdot 10^{-3}$, $\eta_2 = 6 \cdot 10^{-3}$.

При сравнении результатов расчета развития течения для однородной жидкости с точным решением [3] установлено, что максимальное отклонение не превышает 5%.



Фиг. 2. Зависимость наибольшей глубины проникновения жидкости от времени для различных значений параметра A : 1 - $A = 0$, 2 - $A = 0,5$, 3 - $A = 1$, 4 - $A = 2$

При этом численное решение отражает все качественные особенности аналитического: характерный вид эпюр скорости, наличие возвратных течений.

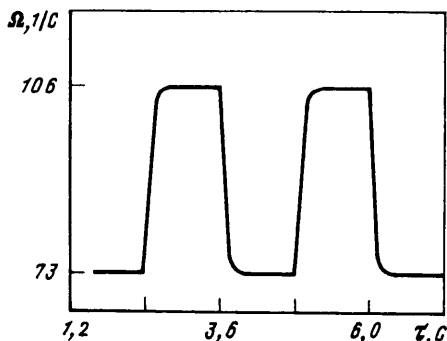
Как видно из задачи (1.5) - (1.8), процесс разгона двухслойной жидкости определяется двумя безразмерными комплексами: $A = \varepsilon^{-1}(\rho_2/\rho_1 - 1)$, характеризующим действие архимедовой силы, и отношением вязкостей K_v . Расчеты проведены для $A = 0, 0,5, 1, 2$ и $K_v = 0,5, 1, 2$.

Типичная картина линий тока в плоскости x, y и характерная форма изменения границы раздела жидкостей представлены на фиг. 1. Величина K_v практически не влияет на глубину взаимного проникновения фаз, а увеличение этого параметра приводит к некоторому расширению зоны проникновения по оси y .

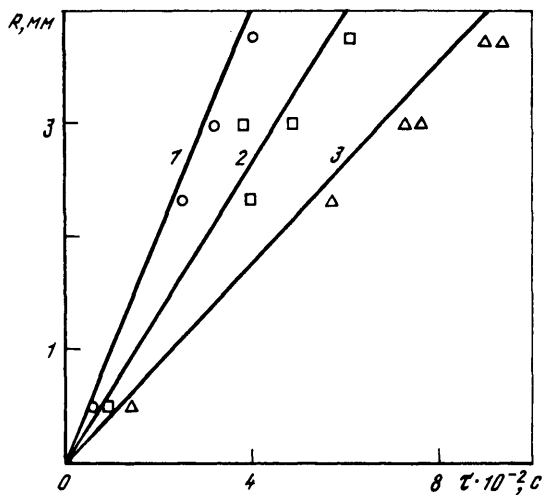
Наибольший интерес представляет изучение влияния архимедовой силы на процесс разгона. На фиг. 2 представлена зависимость наибольшей глубины проникновения x_{max} от t для различных значений параметра A . При $t = 2$ ($A > 0$) происходит фактическая остановка проникновения одной фазы в другую. Одновременно наблюдаются резкое искривление линий тока и формирование восходящего потока вдоль границы раздела жидкостей (фиг. 1). При $A = 2$ взаимное проникновение пренебрежимо мало. Это хорошо согласуется с визуальными наблюдениями [6], где при $A > 2$ не обнаружено искривление границы раздела фаз.

3. Эксперимент. Экспериментальная проверка соответствия математической модели физическому процессу затруднена тем, что толщина пограничного слоя Экмана мала. Для рассматриваемых режимных параметров она не превышает 0,5 мм, что делает невозможным замеры локальных составляющих скорости во вращающейся системе. Однако можно измерить деформацию границы раздела двух жидкостей, что имеет самостоятельное значение, особенно для процессов, связанных с переносом через границу раздела фаз тепла или массы. Кроме того, следует отметить, что физический эксперимент можно проводить в замкнутом сосуде, так как время разгона всей жидкости в сосуде на несколько порядков больше времени разгона жидкости в пограничном слое [7] и влиянием внутренней жидкости можно пренебречь.

Физический эксперимент проводился на установке, содержащей экспериментальный сосуд, заполненный двумя жидкостями, и привод, состоящий из двух двигателей и клиноремных передач, рамы, электронных систем контроля, слежения и записи сигналов.



Фиг. 3. Изменение во времени угловой скорости вращения диска в эксперименте



Фиг. 4. Сравнение расчетных значений (кривые) максимальной глубины проникновения с данными эксперимента (точки) при $K_V = 1,79$: 1 — $A = 1,06$, 2 — $A = 0,65$, 3 — $A = 0,41$

Разгон и торможение сосуда обеспечивались применением двух одинаковых двигателей с различным передаточным отношением клиноременной передачи. Сосуд приводился во вращение одним двигателем и в заданный момент времени устройство слежения отключало первый двигатель и включало второй, что приводило к изменению угловой скорости. Одновременно устройство контроля и записи сигналов фиксировало значение угловой скорости вращения сосуда. График этого процесса представлен на фиг. 3.

Сосуд представлял собой прямой круговой цилиндр диаметром 0,32 м, ограниченный двумя днищами так, что высота его составляла 0,02 м, причем ось симметрии являлась осью вращения системы. Сосуд заполнялся двумя несмешивающимися жидкостями, одна из которых электропроводная, а другая нет. На нижнем днище располагались датчики, представляющие собой отрезки платиновой проволоки диаметром 0,2 мм, выступающие на 1,5 мм в слой жидкости. Эти датчики были установлены на различном расстоянии от оси вращения сосуда (№ 1 — 0,091; № 2 — 0,0955; № 3 — 0,0973; № 4 — 0,098; № 5 — 0,099 м). Датчики работали следующим образом. При разгоне сосуда легкая жидкость втекала в тяжелую, поэтому легкая жидкость бралась электропроводной, а тяжелая диэлектриком (например, подсоленная вода — четыреххлористый углерод). Датчик с наименьшим радиусом (№ 1) был отрицательным электродом, а остальные — положительными. При этом по замыканию датчика № 2 фиксировалась граница раздела фаз. Устройство записи сигналов отмечало время начала разгона и времена замыкания датчиков № 3–5. По моменту замыкания последних определялось время прохождения слоя электропроводной жидкости соответствующего радиуса.

Как следует из фиг. 3, в эксперименте процесс разгона или торможения занимает отрезок времени 0,25–0,3 с ($t = 200$ –300), что значительно больше времени установления пограничного слоя ($t = 2$). Поэтому процесс можно рассматривать как квазистационарный, а для расчета заменить гладкую кривую увеличения угловой скорости на ступенчатую с шагом $t = 2$. Для такой схемы на фиг. 4 приведены результаты сравнения физического и математического эксперимента.

Как видно из фиг. 4, согласование результатов находится в пределах 15%, однако наблюдается систематическое отклонение экспериментальных точек от кривой, соответствующей численному решению. Такое отклонение не связано с тем, что в математической модели не учитывается межфазное натяжение, так как оно существенно

только в самой удаленной точке проникающего слоя, где радиус кривизны достаточно мал (более чем на порядок меньше масштаба по оси z).

Заключение. Сформулирована математическая модель процесса разгона двухслойной жидкости вблизи вращающейся плоскости. Процесс разгона жидкости (с точностью $\epsilon + \delta^2$) характеризуется двумя параметрами: K_v и A , причем величина K_v существенно не влияет на проникающий внутрь слой. Влияние на этот процесс аналога архимедовой силы A существенно при $A < 2$. При $A \geq 2$ проникновение жидкости в жидкость не существенно. При $t = 2$ происходит фактическая остановка проникновения и процесс становится стационарным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лойцянский Л.Г. Ламинарный пограничный слой. М.: Физматгиз, 1962. 479 с.
2. Van de Vooren A.I., Botta E.F.F., Stout J. The boundary layer on a disk at rest in a rotating fluid // Quart. J. Mech. and Appl. Math. 1987. V. 40. № 1. P. 15–32.
3. Гринспен Х.П. Теория вращающихся жидкостей. Л.: Гидрометеиздат, 1975. 304 с.
4. Yao L.-S., Berger S.A. Eutry flow in f curved pipe // J. Fluid Mech. 1975. V. 67. Pt 1. P. 177–196.
5. Тарунин Е.Л., Якимов А.А. Осесимметричное движение вязкой жидкости в конечной кольцевой полости вращающегося цилиндрического сосуда // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 2. С. 37–42.
6. Поникаров С.И., Гасилов В.С., Нестеров А.Н. Массопередача при нестационарном вращении ротора центробежного электрона // Тез. докл. Всесоюз. конф. "Современные машины и аппараты химических производств" – "Химтехника-88". Чимкент, 1988. С. 89–92.
7. Venezian G. Spir-un of a contained fluid // Topics in Ocean Engineering. Houston: Gulf Publ. Co., 1969. V. 1. P. 212–223.

Казань

Поступила в редакцию
18.XII.1995