

УДК 532.22:537.84

© 1997 г. В.К. ПОЛЕВИКОВ

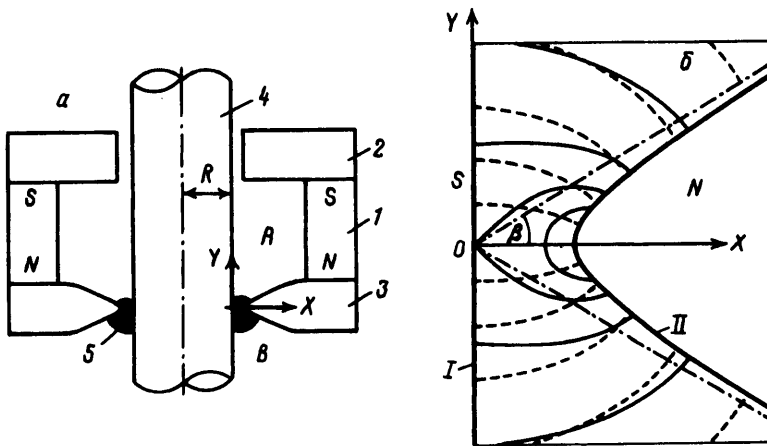
ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТАТИЧЕСКОГО МАГНИТОЖИДКОСТНОГО УПЛОТНЕНИЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНЕШНЕГО ПЕРЕПАДА ДАВЛЕНИЯ

Численно решена задача капиллярной гидростатики с существенно несвязной свободной поверхностью – об осесимметричных равновесных формах статического магнитожидкостного уплотнения под воздействием внешнего перепада давления. Исследовано влияние формы концентратора магнитного потока в классе гиперболических профилей на критический перепад давления, найдена его зависимость от объема магнитожидкостной пробки, напряженности магнитного поля, намагнитченности жидкости, ширины зазора. В приближении больших значений магнитного числа Бонда получено точное решение задачи.

В магнитожидкостных уплотнениях вращающихся валов магнитожидкостная пробка удерживается высокоградиентным магнитным полем, которое создается кольцевым концентратором магнитного потока. Важнейшей характеристикой уплотнения является критическая величина внешнего перепада давления, при превышении которой герметизирующий слой разрушается. Она существенно зависит от деформации свободной поверхности, обусловленной разностью давлений по разные стороны магнитожидкостной пробки. Свободная поверхность магнитожидкостного уплотнения, являясь несвязной, состоит в этом случае из двух связанных асимметричных фрагментов, не имеющих точек контакта. Для численного моделирования это крайне неблагоприятно, так как методы расчета несвязных поверхностей до настоящего времени не разработаны. В предыдущих работах форма магнитожидкостной пробки либо задавалась [1, 2], либо определялась в отсутствие внешнего перепада давления [3]. В [3] обе части свободной поверхности предполагались симметричными, позволив свести задачу к отысканию формы только одной из них, являющейся связной.

Анализ имеющихся публикаций (отметим, в частности, обзор литературы, приведенный в [4]) дает основания полагать, что в настоящей работе впервые осуществлено численное моделирование равновесных форм несвязной свободной поверхности капиллярной жидкости.

1. Постановка задачи. Рассматривается магнитожидкостная пробка в узком зазоре между двумя коаксиальными неподвижными цилиндрами, внешний из которых является кольцевым постоянным магнитом с гиперболообразным концентратором магнитного потока. Предполагается, что цилиндры обладают значительно более высокой магнитной проницаемостью, чем жидкость. Пусть p_0 – внешнее давление по одну сторону пробки, а $p_0 + \Delta p$ – по другую сторону; H – напряженность магнитного поля в зазоре, а H_c – ее значение в вершине концентратора. Свободная поверхность на стороне повышенного давления $p_0 + \Delta p$ обозначается цифрой 1, на стороне пониженного давления p_0 – цифрой 2, а переменные, к ним относящиеся, – нижними индексами 1 и 2 соответственно. Минимальная ширина зазора a предполагается много меньшей радиуса внутреннего цилиндра–вала R , поэтому осесимметричная поверхность описывается в локальной декартовой системе координат X, Y , ось X которой проходит через вершину концентратора в радиальном направлении, а ось Y лежит на поверхности



Фиг. 1. Схема магнитожидкостного уплотнения (а) и магнитного поля в его рабочем зазоре (б): 1 – магнит; 2 – магнитопровод; 3 – магнитопровод с гиперболообразным полюсным наконечником – концентратором магнитного потока; 4 – вал из магнитного материала; 5 – магнитожидкостная пробка. А – область повышенного давления; В – область пониженного давления. I – поверхность вала; II – поверхность концентратора. Сплошные линии в зазоре – линии постоянного значения напряженности магнитного поля; штриховые – линии магнитной индукции; штрихпунктирные – асимптоты гиперболы II

вала и направлена в сторону повышенного давления. Меридианная линия поверхности концентратора считается гиперболой $Y^2 = \operatorname{tg}^2 \beta (X^2 - a^2)$ с центром в начале координат и вершиной в точке $(a, 0)$, где β – полуугол между асимптотами гиперболы, который называется углом заточки концентратора [5]. Такая форма концентратора позволяет найти аналитическое решение для магнитного поля [3], отражающее основные особенности распределения поля в зазорах реальных уплотнений. Схема магнитожидкостного уплотнения и структура магнитного поля показаны на фиг. 1.

Вводятся безразмерные переменные $x = X/a$, $y = Y/a$, $h = H/H_c$, в которых равновесная форма свободной поверхности описывается параметрическими функциями $x_1(s)$, $y_1(s)$ и $x_2(s)$, $y_2(s)$, где s – безразмерная длина дуги искомых равновесных линий I и 2, изменяющаяся от $s = 0$ на стенке вала до $s = l_1$ и $s = l_2$ – на концентраторе. Согласно [3], безразмерная величина напряженности магнитного поля в зазоре определяется формулой

$$h = h(x, y) = \frac{\sin \beta}{\left[((x^2 + y^2) \cos^2 \beta + 1)^2 - 4x^2 \cos^2 \beta \right]^{1/4}} \quad (1.1)$$

Магнитная напряженность в зазорах реальных уплотнений достигает порядка 10^6 А/м [5], так что жидкость в них близка к состоянию магнитного насыщения. Эффектами силы тяжести и магнитного скачка давления можно пренебречь на том основании, что они подавляются высокоградиентным магнитным полем кольцевого магнита. При этих предположениях из уравнений статики магнитной жидкости и условия Лапласа для капиллярного скачка давления получим систему безразмерных дифференциальных уравнений равновесной свободной поверхности магнитожидкостного уплотнения

$$\operatorname{Bo}_m^{-1} y_i'' = (-1)^i x_i'(h_i - C_i), \quad \operatorname{Bo}_m^{-1} x_i'' = (-1)^{i+1} y_i'(h_i - C_i) \quad (1.2)$$

$$\operatorname{Bo}_m = \mu_0 M_s H_c a / \sigma, \quad 0 < s < l_i, \quad i = 1, 2$$

где Bo_m – магнитное число Бонда, μ_0 – магнитная постоянная, M_s – намагниченность насыщения жидкости, σ – коэффициент поверхностного натяжения; $h_i = h(x_i, y_i)$, $x_i = x_i(s)$, $y_i = y_i(s)$; C_1 и C_2 – константы, связанные соотношением

$$C_1 - C_2 = Pm \quad (1.3)$$

Здесь $Pm = \Delta p / (\mu_0 M_s H_c)$ – параметр, характеризующий отношение сил внешнего давления к магнитным силам.

Граничные условия для уравнений (1.2) определяются формой твердых стенок и заданным углом смачивания α

$$x_i(0) = 0, \quad y_i'(0) = (-1)^i \cos \alpha, \quad \eta_i = (-1)^{i+1} \operatorname{tg} \beta \sqrt{\xi_i^2 - 1} \quad (1.4)$$

$$x_i'(l_i) = \cos(\alpha - \varphi_i), \quad y_i'(l_i) = (-1)^i \sin(\alpha - \varphi_i)$$

$$\varphi_i = \arccos \frac{|\eta_i|}{\sqrt{\xi_i^2 \operatorname{tg}^4 \beta + \eta_i^2}}, \quad \xi_i = x_i(l_i), \quad \eta_i = y_i(l_i), \quad i = 1, 2$$

Интегрируя первое из уравнений (1.2), определяем константы C_i через условия (1.4)

$$C_i = \frac{1}{\xi_i} \left[(-1)^{i+1} Bo_m^{-1} (y_i'(l_i) - y_i'(0)) + \int_0^{l_i} x_i' h_i ds \right] \quad (1.5)$$

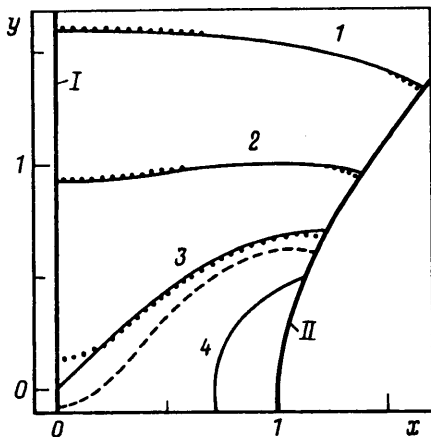
Математическая модель замыкается условием сохранения объема

$$U = U_1 + U_2, \quad U_i = (-1)^{i+1} \left[\int_0^{l_i} y_i x_i' ds - \frac{1}{2} \xi_i \eta_i + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \beta \ln \left(\xi_i + \frac{\eta_i}{\operatorname{tg} \beta} \right) \right], \quad i = 1, 2 \quad (1.6)$$

где $U = \Omega/a^2 \approx V/(2\pi a^2 R)$, V – объем магнитожидкостной пробки, Ω – площадь ее меридианного сечения; U_1 и U_2 – безразмерный объем в областях $y > 0$ и $y < 0$ соответственно.

Таким образом, равновесная форма свободной поверхности статического магнитожидкостного уплотнения определяется параметрами Bo_m , Pm , U , α , β и ищется как решение задачи (1.1)–(1.6).

2. Вычислительный алгоритм. Задача (1.1)–(1.6) решалась с использованием итераций. На каждой итерации равновесные линии 1, 2 вычислялись независимо друг от друга путем решения задачи (1.1), (1.2), (1.4), (1.5) при $i = 1$ и 2 для заданных длин l_1 и l_2 , полученных на предыдущей итерации. Решение этой задачи, являющейся в каждом случае задачей о равновесной форме односвязной поверхности, осуществлялось итерационно-разностным методом, аналогичным описанному в [6, 7]. Значения l_1 и l_2 корректировались затем с помощью интегральных условий (1.3) (с учетом (1.5)) и (1.6), которые связывают искомое решение с безразмерным объемом U и безразмерным перепадом давления Pm . Расчеты выполнялись на сетках, содержащих по 101 узлу на каждой линии, в диапазонах параметров: $200 \leq Bo_m \leq 1000$; $1 \leq U \leq 20$; $\alpha = 45, 90$ и 135° ; $20^\circ \leq \beta \leq 70^\circ$. Область изменения Bo_m здесь соответствует типичным характеристикам реальных магнитожидкостных уплотнений [5]: $M_s = (4-6) \cdot 10^4$ А/м, $H_c = (1-2) \cdot 10^6$ А/м, $a = 0,1-0,5$ мм, $\sigma = (2-3) \cdot 10^{-2}$ Н/м. Вычислительная неустойчивость успешно подавлялась как с помощью введения релаксационных параметров, так и применением адаптивной сетки, узлы которой генерировались в процессе итераций согласованно с деформацией поверхности. Факт разрушения герметизирующего слоя устанавливался по признаку возникновения неустойчивости в итерационном алгоритме. Этот подход был применен в [6, 8] при исследовании равновесия капли под действием силы тяжести и центробежных сил и апробирован на примерах, допускающих аналитическое решение. В [4] он представлен как один из возможных методов исследования устойчивости равновесных форм.



Фиг. 2. Характерные формы поверхности I в зависимости от параметра Pm при $U = 4$, $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 45^\circ$: I – поверхность вала; II – поверхность концентратора. Сплошные линии – точное решение: $1 - Pm = 0$ ($h_1 = 0,4672$); $2 - 0,2$ ($h_1 = 0,5915$); $3 - Pm = Pm^* = 0,3539$ ($h_1 = \sqrt{2/2}$); $4 - h_1 = \sqrt{2/3}$. Пунктирные линии – численное решение при $Bo_m = 500$: $1 - Pm = 0$; $2 - 0,2$; $3 - 0,358 = Pm^* - \epsilon$ ($\epsilon < 0,002$). Штриховая линия – численное решение при $Bo_m = 200$, $Pm = 0,38 = Pm^* - \epsilon$ ($\epsilon < 0,005$)

3. Точное решение при $Bo_m \rightarrow \infty$. Так как для магнитоожидкостных уплотнений характерно значительное преобладание магнитоэстатического давления над капиллярным ($Bo_m \gg 1$), целесообразно рассмотреть упрощенную математическую модель задачи, пренебрегающую капиллярным скачком давления на свободной поверхности. Дифференциальные уравнения (1.2) в этом приближении сводятся к алгебраическим $h(x_i, y_i) = C_i$, $i = 1, 2$; $C_2 = C_1 = Pm$, т.е. равновесные линии I и 2 являются линиями постоянной напряженности магнитного поля. Уравнения этих линий допускают представление в явном виде

$$y = f_i(x, C_i) = \frac{(-1)^{i+1}}{\cos \beta} \sqrt{\gamma_i^4 + 4x^2 \cos^2 \beta - 1 - x^2 \cos^2 \beta}$$

$$0 \leq x \leq \xi_i = \sqrt{\gamma_i^2 + \cos^2 \beta}; \quad \gamma_i = \frac{\sin \beta}{C_i}; \quad i = 1, 2; \quad C_2 = C_1 - Pm$$

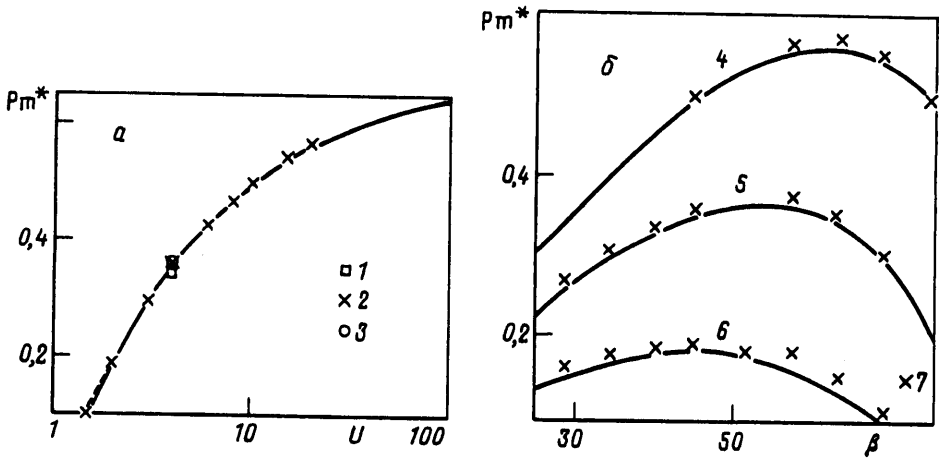
и описывают известное семейство кривых – овалы Кассини, имеющие те же центр, ось и фокус, что и гипербола концентратора. При заданных Pm и β они определяются константой C_1 , которая выбирается из условия на объем (1.6). Овалы Кассини (изолинии напряженности) пересекают ось y лишь при $C_i \leq \sin \beta$ (фиг. 2). Поэтому лемнискату Бернулли $y = f_1^*(x) = f_1(x, \sin \beta)$ считаем предельным (критическим) положением свободной поверхности I . Она соответствует значению $C_1 = C_1^* = \sin \beta$ и не зависит от объема U . Тогда критическое положение поверхности 2 описывается уравнением $y = f_2^*(x) = f_2(x, C_2^*)$, где $C_2^* = \sin \beta - Pm^* > 0$. Отсюда, в частности, следует, что $Pm^* < \sin \beta$ при любом "объеме" U .

Условие сохранения объема

$$U = U_1^* + U_2^*, \quad U_i^* = (-1)^{i+1} \left[\int_0^{\xi_i^*} f_i^* dx + \frac{1}{2} \xi_i^* \eta_i^* + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \beta \ln \left(\xi_i^* + \frac{\eta_i^*}{\operatorname{tg} \beta} \right) \right] \quad (3.1)$$

$$\xi_i^* = \sqrt{(\sin \beta / C_i^*)^2 + \cos^2 \beta}, \quad \eta_i^* = f_i^*(\xi_i^*), \quad i = 1, 2$$

служит уравнением для вычисления критического параметра Pm^* , соответствующего безразмерному объему U . Уравнение (3.1) решалось методом дихотомии с точностью 0,001%. При этом интегралы аппроксимировались формулой трапеций на равномерной сетке из 1001 узла.



Фиг. 3. Влияние "объема" магнитожидкостной пробки U при $\beta = 45^\circ$ (а) и угла заточки β (б) на критическое значение параметра Pm : 1 - $\alpha = 45^\circ$; 2, 7 - 90° ; 3 - 135° ; 4 - $U = 10$; 5 - 4; 6 - 2. 1, 2, 3, 7 - численные результаты для $Bo_m = 500$. Сплошные линии - точное решение. Штриховая линия построена по формуле (4.1)

4. Результаты. При $Bo_m > 400$ численное решение существенно не отличалось от точного, полученного без учета капиллярных сил, а влияние угла смачивания α сказывалось лишь на форме мениска. Это подтверждают графики, представленные на фиг. 2, 3. Расчеты показали, что критическое положение поверхности 1, примыкающей к зоне повышенного давления, практически не зависит от "объема" U , а при $Bo_m > 400$ - также и от магнитного числа Бонда. В зависимости от угла заточки β критический "объем" U_1^* , соответствующий $Bo_m \rightarrow \infty$, изменяется на промежутке $0,45 < U_1^* < 0,5$. Для каждого U существует оптимальное значение $\beta = \beta_{opt}(U)$, при котором Pm^* достигает максимума. При небольших объемах жидкости β_{opt} лежит на интервале $40-50^\circ$, а с ростом U смещается в сторону верхнего предела 90° .

Обнаружено, что при $Bo_m \geq 400$, $\beta = 45^\circ$ зависимость критического параметра Pm^* от безразмерного объема магнитожидкостной пробки U хорошо описывается формулой

$$Pm^* = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2 + k(U_2^*)^n}} \quad (4.1)$$

$$U_2^* = U - 0,45, \quad k = \frac{8U_2^*}{\pi(U_2^* + 2,5)}, \quad n = \frac{U_2^*}{U_2^* - 0,3}$$

погрешность которой при $2 \leq U \leq 100$ не превышает 2%. Она позволяет, в частности, оценить предельный критический перепад давления при $U \rightarrow \infty$: $\Delta p^* = \mu_0 M_s H_c / \sqrt{2}$. В типичном случае $M_s = 5 \cdot 10^4$ А/м, $H_c = 1,5 \cdot 10^6$ А/м предельное значение $\Delta p^* \approx 7 \cdot 10^4$ Н/м² хорошо согласуется с экспериментальными данными для статических магнитожидкостных уплотнений [5].

Заключение. Сравнение численного и аналитического решений показывает, что получение критических значений параметра Pm по признаку вычислительной неустойчивости дает вполне адекватное представление о наступлении физического разрушения статического магнитожидкостного уплотнения с ростом внешнего перепада дав-

ления. Благодаря найденному алгоритму появилась реальная возможность численного моделирования более полной задачи, представляющей значительный теоретический и прикладной интерес, – о совместном влиянии перепада давления и центробежных сил на динамику и разрушение магнитоожидкостного уплотнения вращающегося вала.

Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда фундаментальных исследований Республики Беларусь.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баитовой В.Г., Краков М.С., Погирницкая С.Г. Численные исследования мощности тепловыделения в магнитоожидкостном уплотнении с учетом геометрических факторов // Магнит. гидродинамика. 1991. № 2. С. 116–121.
2. Berkovsky B.M., Krakov M.S., Pogirnitskaya S.G. Influence of axisymmetric flow structure on energy dissipation in a ring-shaped layer of magnetic fluid // J. Magnetism and Magnetic Materials. 1995. V. 149. № 1–2. P. 101–103.
3. Вислович А.Н., Полевиков В.К. Влияние центробежных и капиллярных сил на форму свободной поверхности магнитоожидкостного уплотнения // Магнит. гидродинамика. 1994. № 1. С. 77–86.
4. Мышкис А.Д., Бабский В.Г., Жуков М.Ю. и др. Методы решения задач гидромеханики для условий невесомости / Под ред. А.Д. Мышкиса. Киев: Наук. думка, 1992. 592 с.
5. Берковский Б.М., Медведев В.Ф., Краков М.С. Магнитные жидкости. М.: Химия, 1989. 240 с.
6. Берковский Б.М., Полевиков В.К. О численном моделировании разрушения односвязных осесимметричных форм магнитной жидкости // Магнит. гидродинамика. 1983. № 4. С. 60–66.
7. Полевиков В.К. О применении адаптивных сеток при расчете свободной поверхности в задачах статики магнитной жидкости // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. № 12. С. 2146–2152.
8. Полевиков В.К., Денисенко В.М. Численное исследование равновесных форм капли, вращающейся в гравитационном поле // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. Физика, математика, механика. 1985. № 2. С. 37–41.

Минск

Поступила в редакцию
25.1.1996