МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 3 • 1997

УДК 533.7

© 1997 г. И.Н. ИВЧЕНКО, С.К. ЛОЯЛКА, Р.В. ТОМПСОН

О ВРАЩЕНИИ СФЕР И ЦИЛИНДРОВ В РАЗРЕЖЕННЫХ ГАЗАХ

На основе линеаризованного уравнения Больцмана достаточно точно описано вращение сфер и цилиндров в разреженных газах. Рассмотрено четыре частных случая, включающих вращение одной сферы и одного цилиндра в бесконечном газе, а также двух концентрических сфер и двух коаксиальных цилиндров, когда внутреннее вращающееся тело отделено от внешнего стационарного тела конечным пространством, заполненным разреженным газом. При построении моментных систем используется решение Чепмена – Энскога в качестве молекулярного признака, уменьшая некоторые из вычислительных трудностей, связанных с нахождением скобочных интегралов. Кроме того, описанная методика приводит в каждом случае к очень простым аналитическим выражениям для момента силы, которые применимы как для произвольного числа Кнудсена, так и для произвольных моделей межмолекулярного потенциала. В частном случае обсуждены результаты для молекул в виде жестких сфер.

Понимание переносного и вращательного движения отдельных маленьких частиц в газе (задачи о сопротивлении и о моменте силы соответственно) требуется в таких различных областях, как синтез однородных материалов, научное оборудование, астрофизика, физика облаков, безопасность ядерных реакторов. Вращающиеся сферы и цилиндры также используются в экспериментальных приборах для измерения различных параметров газов. Несмотря на важность точных знаний этих проблем, в литературе представлены либо предельные случаи этих явлений, либо аналитические результаты для частных моделей (максвелловские молекулы) межмолекулярных взаимодействий.

Газокинетическая формулировка задач о вращении цилиндров и сфер дана [1–3]. В [3] найдено удобным заменить задачу о вращающемся теле в газе задачей о стационарном теле, вокруг которого медленно вращается газ. В общем случае эти задачи не являются эквивалентными, так как во вращающейся системе координат должны учитываться фиктивные силы инерции. Этот вопрос обсужден в литературе [4]. Однако такими силами, являющимися силами второго порядка относительно вращательной скорости, можно пренебречь для малых скоростей вращения,что делает две задачи эквивалентными. В [3], несмотря на общность постановки задачи, получены лишь предельные результаты для режима, близкого к континуальному.

Теория для произвольных чисел Кнудсена развита в [1, 2]. Однако в этих работах анализ выполнен для максвелловских молекул, что не позволяет обобщить эти результаты на случай произвольного потенциала межмолекулярных взаимодействий.

В данной работе использована новая процедура построения моментной системы, основанная на интегральных свойствах решения Чепмена – Энскога и позволившая преодолеть трудности, связанные с вычислением скобочных интегралов. Полученные решения являются обобщением ранее известных результатов на случай произвольных моделей межмолекулярного потенциала.

Численное решение линеаризованной задачи для молекул в виде жестких сфер и для оператора столкновений в форме Больцмана получено в [5]. Этот численный анализ может быть использован для оценки точности аналитического метода, обсуждаемого ниже.

1. Задача о вращении двух концентрических сфер. Рассмотрим две концентрические сферы, где внутренняя сфера радиуса R_1 медленно вращается с угловой скоростью ω, такой, что $\omega R_1 \ll (2kT/m)^{1/2}$, и внешняя сфера радиуса R_2 является неподвижной. Задача обладает азимутальной симметрией, благодаря которой все величины зависят только от радиальной и полярной координат r и θ. Для этой симметрии моментное уравнение может быть написано в виде [6]

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 n\langle v_r\, Q(\mathbf{v})\rangle)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta n\langle v_\theta Q(\mathbf{v})\rangle)-$$

$$-\frac{1}{r}\int (v_\theta^2+v_\Phi^2)\frac{\partial Q(\mathbf{v})}{\partial v_r} fd\mathbf{v}-\frac{1}{r}\int (v_\Phi^2 \operatorname{ctg}\theta - v_r v_\theta)\frac{\partial Q(\mathbf{v})}{\partial v_\theta} fd\mathbf{v}+$$

$$+\frac{1}{r}\int (v_r v_\Phi + v_\theta v_\Phi \operatorname{ctg}\theta)\frac{\partial Q(\mathbf{v})}{\partial v_\Phi} fd\mathbf{v} = R_1 n\Delta\langle Q(\mathbf{v})\rangle, \qquad (1.1)$$

где $r = r'/R_1$ – безразмерная радиальная координата и $n\Delta\langle Q(\mathbf{v})\rangle$ – момент интеграла столкновений. Поскольку средняя скорость газа имеет только одну компоненту $u_\Phi = u_\Phi(r, \theta)$, двухсторонняя максвелловская функция распределения, использующаяся для построения моментной системы, может быть выбрана в виде

$$f_1 = f^{(0)}(1+2c_\Phi G_1(r,\ \theta)),\quad f_2 = f^{(0)}(1+2c_\Phi G_2(r,\ \theta))$$

где $\mathbf{c} = \{c_r, c_\theta, c_\Phi\}$ – декартовы координаты безразмерной молекулярной скорости, и предполагается, что полярная ось имеет направление вектора $\boldsymbol{\omega}$. Функция f_2 описывает молекулы, для которых вектор скорости лежит внутри конуса влияния [6], а f_1 описывает все другие молекулы. Так как необходимо определить только две характеристические средние скорости, можно пытаться использовать для этой проблемы двухмоментное приближение. Моментная система в этом приближении может быть получена из (1.1), если используется $Q(\mathbf{v}) = c_\Phi$ и $Q(\mathbf{v}) = B_{r\Phi} = c_r c_\Phi B(c^2)$, где $B_{r\Phi}$ – решение Чепмена – Энскога для вязкости. Хорошо известно [7], что функция $B(c^2)$ имеет вид

$$B(c^2) = b_1 \sum_{p=1}^{\infty} b_p^* S_{5/2}^{(p-1)}(c^2),\quad b_1 = \frac{\mu}{kT}$$

Этот выбор дает

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 n\langle c_r c_\Phi\rangle)+\frac{1}{r}n\langle c_r c_\Phi\rangle = 0 \qquad (1.2)$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 n\langle c_r^2 c_\Phi B(c^2)\rangle - \frac{1}{r}(n\langle c_\Phi c^2 B(c^2)\rangle)+\frac{2}{r}(n\langle c_r^2 c_\Phi B(c^2)\rangle) = -\left(\frac{m}{2kT}\right)^{1/2} n^2 R_1[\Phi,\ B_{r\Phi}]$$

где Φ – поправка к функции распределения. Член, включающий частную производную по θ, исчезает, поскольку $n\langle v_\theta Q(\mathbf{v})\rangle = 0$. Момент интеграла столкновений, связанный с этой системой, может быть легко вычислен для произвольного межмолекулярного потенциала, если принять во внимание особенность решения Чепмена – Энскога, выражаемую в виде

$$[\Phi(\mathbf{c}),\ B_{ik}] = \frac{1}{n}\int f^{(0)}\ \Phi(\mathbf{c})\left(c_i c_k - \frac{1}{3}\delta_{ik} c^2\right) d\mathbf{v}$$

Для отраженной функции распределения может быть использована обычная максвелловская граничная модель с интегральной формой граничного условия, которая построена на интегральном определении коэффициента аккомодации тангенциального импульса. Интегральные граничные условия выражаются в виде

$$r=1:\ P_{r\Phi}=\alpha_\tau[P_{r\Phi}^{-}+(P_{r\Phi}^{+})_{\text{eq}}] \tag{1.3}$$

$$r=z:\ P_{r\Phi}=\alpha_\tau[P_{r\Phi}^{+}+(P_{r\Phi}^{-})_{\text{eq}}]$$

где $z=R_2/R_1$, знаки $\pm$ относятся к молекулам, для которых $c_r>0$ и $c_r<0$ соответственно, $(P_{r\Phi}^{\pm})_{\text{eq}}$ – тангенциальный импульс, который уносили бы отраженные молекулы, если коэффициент аккомодации тангенциального импульса был бы равен единице. Заметим, что для неподвижной внешней поверхности $(P_{r\Phi}^{-})_{\text{eq}}=0$.

Функцию распределения удобно представить в форме

$$f_i=f^{(0)}(1+2c_\Phi G_i(r)\sin\theta) \tag{1.4}$$

которая позволяет разделить радиальную и полярную переменные. Используя (1.4) и применяя стандартную технику [6], можно получить

$$n\langle c_r c_\Phi\rangle=n\sin\theta\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi}r^4}G^-(r)\right] \tag{1.5}$$

$$n\langle c_r^2 c_\Phi B(c^2)\rangle=n\sin\theta\left[\frac{1}{4}G^+(r)+\frac{1}{8}(3x^5-5x^3)G^-(r)\right]b_1$$

$$n\langle c^2 c_\Phi B(c^2)\rangle=n\sin\theta\left[\frac{5}{4}G^+(r)+\frac{5}{8}(x^3-3x)G^-(r)\right]b_1$$

$$x=(1-r^{-2})^{1/2},\quad G^\pm(r)=G_2(r)\pm G_1(r)$$

2. Аналитическое решение моментной системы. После подстановки (1.5) в (1.2) моментная система принимает форму

$$\frac{d}{dr}G^-(r)-\frac{1}{r}G^-(r)=0,\quad \frac{d\Psi}{dr}-\frac{1}{r}\Psi=\left(\frac{4\zeta}{r^3}-6\sqrt{\pi}\frac{x}{r^2}\right)\frac{1}{2\sqrt{\pi}r}G^-(r)$$

$$\zeta=\frac{R_1 n}{b_1}\left(\frac{m}{2kT}\right)^{1/2},\quad \Psi=G^+(r)-x^3G^-(r)$$

Найдено, что общим аналитическим решением этой системы является

$$G^-(r)=2\sqrt{\pi}rA_1,\quad G^+(r)=r\left[A_2+A_1\frac{4}{3}\zeta(1-r^{-3})\right]$$

где A_1 и A_2 – произвольные константы интегрирования, которые могут быть найдены из граничных условий (1.3).

3. Момент силы, действующий на сферу. Момент силы, действующий на элемент поверхности сферы $dS=R^2\sin\theta d\theta d\beta$, дается посредством

$$dK_i=\varepsilon_{ikl}Rr_k dF_l,\quad dF_l=-dS\sum_{\pm}\int_{\pm} mv_r v_l f^{\pm}(\mathbf{v},\ 1,\ \theta)d\mathbf{v}$$

Здесь ε_{ikl} – абсолютно антисимметричный единичный тензор

$$\varepsilon_{ikl}=\begin{cases}1;\ ikl=123,\ 231,\ 312\\ -1;\ ikl=321,\ 132,\ 213\\ 0;\ i=k,\ i=l,\ k=l\end{cases}$$

Для частных условий, сформулированных выше, можно получить

$$dK_2 = \varepsilon_{213} R dF_\Phi = RdS \sum_{\pm} \int m v_r v_\Phi f^\pm(\mathbf{v},\ 1,\ \theta) d\mathbf{v}$$

$$dK_x = -dK_2 \sin\theta$$

где x обозначает полярную ось в направлении $\boldsymbol{\omega}$. Полный момент силы, действующий на сферу

$$K_x = -2\pi R^3 \int_0^\pi \sin^2\theta [\sum_{\pm} \int m v_r v_\Phi f^\pm(\mathbf{v},\ 1,\ \theta) d\mathbf{v}] d\theta = -\frac{8}{3}\sqrt{\pi} R^3 nkTG^-(1) \tag{3.1}$$

Из (3.1) можно получить, что момент силы, действующий на внутреннюю сферу, выражается в виде

$$K_x = K_x^* \left[1 + \alpha_\tau \frac{8\,\mathrm{Kn}^{-1}}{15\pi} \frac{(z^3 - 1)z}{z^4 + (1 - \alpha_\tau)}\right]^{-1} \tag{3.2}$$

$$K_x^* = -\frac{2}{3}\alpha_\tau \pi\rho\langle v\rangle R_1^4 \omega \frac{z^4}{z^4 + (1 - \alpha_\tau)}$$

Здесь $\langle v\rangle = (8kT/\pi m)^{1/2}$ – средняя скорость газовых молекул, которые предположительно являются жесткими сферами и $kn^{-1} = R_1/\lambda$ и $z = R_2/R_1$. Соотношение (3.2) дает точные выражения для момента силы как в свободномолекулярном, так и в континуальном режимах. Представляет некоторый интерес предельный случай, когда $n = R_2 - R_1 \ll R_1$. В этом случае

$$K_x = K_{1x}^* \left[1 + \frac{\alpha_\tau}{2 - \alpha_\tau} \frac{8}{5\pi} \frac{h}{\lambda}\right]^{-1},\quad K_{1x}^* = -\frac{\alpha_\tau}{2 - \alpha_\tau} \frac{2\pi}{3} \rho\langle v\rangle R_1^4 \omega$$

Из (3.2) при $z \to \infty$ можно получить момент силы для единичной сферы

$$K_x = K_x^* \left(1 + \alpha_\tau \mathrm{Kn}^{-1} \frac{8}{15\pi}\right)^{-1},\quad K_x^* = -\frac{2}{3}\alpha_\tau \pi\rho\langle v\rangle R^4 \omega,\quad \mathrm{Kn}^{-1} = \frac{R}{\lambda} \tag{3.3}$$

4. Задача о вращении двух коаксиальных цилиндров. Рассмотрим два коаксиальных цилиндра, где внутренний цилиндр радиуса R_1 медленно вращается с угловой скоростью ω, такой, что $\omega R_1 \ll (2kT/m)^{1/2}$, и внешний цилиндр радиуса R_2 неподвижен. Предположим, что цилиндры разделены разреженным газом, в котором молекулы являются жесткими сферами.

Для цилиндрической геометрии общее моментное уравнение может быть записано в виде [6]

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\int f v_r Q(\mathbf{v}) d\mathbf{v}) - \frac{1}{r}\int f \left\{v_\theta^2 \frac{\partial Q(\mathbf{v})}{\partial v_r} - v_r v_\theta \frac{\partial Q(\mathbf{v})}{\partial v_\theta}\right\} d\mathbf{v} = R_1 n\langle\Delta Q(\mathbf{v})\rangle \tag{4.1}$$

где для условий симметрии данной задачи функция распределения зависит только от радиальной координаты и $\mathbf{v} = \{v_r,\ v_\theta,\ v_x\}$. Теперь, используя $Q(\mathbf{v}) = c_\theta$ и $Q(\mathbf{v}) = B_{r\theta} = c_r c_\theta B(c^2)$ как молекулярные признаки в (4.1), можно получить

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rn\langle c_r c_\theta\rangle) + \frac{1}{r}(n\langle c_r c_\theta\rangle) = 0$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rn\langle c_r^2 c_\theta B(c^2)\rangle) + \frac{1}{r}(n\langle c_\theta^3 B(c^2)\rangle) + \frac{1}{r}(n\langle c_r^2 c_\theta B(c^2)\rangle) = -\left(\frac{m}{2kT}\right)^{1/2} n^2 R_1 [\Phi,\ B_{r\theta}]$$

Для замыкания моментной системы может быть использована двухсторонняя максвелловская функция распределения в виде

$$f_i = f^{(0)}(1+2c_\theta G_i(r))$$

Тогда решение моментной системы имеет вид

$$G^-(r) = 2\sqrt{\pi}A_1 r, \quad G^+(r) = A_2 r + A_1 r[2\zeta(1-r^{-2})]$$

$$\zeta = -\frac{R_1 n}{b_1}\left(\frac{m}{2kT}\right)^{1/2}$$

Константы A_1 и A_2 могут быть определены из граничных условий (1.3), в которых $P_{r\Phi}$ следует заменить на $P_{r\theta}$. Момент силы, действующий на единицу длины внутреннего цилиндра, выражается в виде

$$K_x = K_x^*\left[1+\alpha_\tau\frac{4\,\mathrm{Kn}^{-1}}{5\pi}\frac{(z^2-1)z}{z^3+(1-\alpha_\tau)}\right]^{-1}, \quad K_x^* = -\frac{1}{2}\alpha_\tau\pi\rho\langle v\rangle R_1^3\omega\frac{z^3}{z^3+(1-\alpha_\tau)} \tag{4.2}$$

$$\mathrm{Kn}^{-1} = R_1/\lambda, \quad z = R_2/R_1$$

Интересен предельный случай, когда $h = R_2 - R_1 \ll R_1$, для которого момент силы

$$K_x = K_{1x}^*\left[1+\frac{\alpha_\tau}{2-\alpha_\tau}\frac{8}{5\pi}\frac{h}{\lambda}\right]^{-1}, \quad K_{1x}^* = -\frac{\alpha_\tau}{2-\alpha_\tau}\frac{\pi}{2}\rho\langle v\rangle R_1^3\omega$$

Из (4.2) при $z \to \infty$ можно получить момент силы для одного цилиндра

$$K_x = K_x^*\left[1+\alpha_\tau\frac{4\,\mathrm{Kn}^{-1}}{5\pi}\right]^{-1}, \quad K_x^* = -\frac{1}{2}\alpha_\tau\pi\rho\langle v\rangle R^3\omega, \quad \mathrm{Kn}^{-1} = \frac{R}{\lambda}$$

Заключение. Все полученные формулы предсказывают правильное поведение момента силы для двух предельных случаев, когда $\mathrm{Kn} \to 0$ и $\mathrm{Kn} \to \infty$. Выражение (4.2) для вращающихся цилиндров в частном случае, когда $\alpha_\tau = 1$, совпадает с соответствующей формулой в [1, 8]. Таким образом, полученный результат является обобщением ранее известного решения на случай произвольной модели межмолекулярного потенциала и произвольной аккомодации тангенциального импульса. Хотя описанные здесь частные результаты применимы только для жестких сферических молекул, они могут быть легко обобщены для произвольных моделей межмолекулярного потенциала посредством стандартной техники [7], если использовать значение коэффициента Чепмена – Энскога b_1 для соответствующего потенциала.

Для исследования точности используемого приближения аналитические значения момента силы (3.3) сравниваются в таблице с соответствующими численными значениями из [5]. Заметим, что с целью этого сравнения аналитические значения были пересчитаны с использованием обозначения [5], где длина свободного пробега $\lambda_p = \frac{5}{8}\sqrt{\pi}\lambda$.

Kn^{-1}	K_x/K_x^*							
	$\alpha_\tau = 1$		$\alpha_\tau = 0{,}75$		$\alpha_\tau = 0{,}5$		$\alpha_\tau = 0{,}25$	
	[5]	(3.6)	[5]	(3.6)	[5]	(3.6)	[5]	(3.6)
0,00	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
0,10	0,9901	0,9815	0,9928	0,9861	0,9952	0,9907	0,9976	0,9953
0,25	0,9803	0,9551	0,9856	0,9659	0,9902	0,9770	0,9948	0,9884
0,50	0,9601	0,9140	0,9697	0,9341	0,9802	0,9551	0,9896	0,9770
0,75	0,9427	0,8764	0,9549	0,9043	0,9694	0,9341	0,9844	0,9659
1,00	0,9206	0,8417	0,9391	0,8764	0,9584	0,9141	0,9788	0,9551
5,00	0,6080	0,5154	0,6739	0,5864	0,7558	0,6802	0,8600	0,8097

Сравнение аналитических и численных результатов показывает, что полученное аналитическое решение обеспечивает разумную точность вблизи свободномолекулярного режима ($0 < Kn^{-1} \leqslant 0{,}25$). В переходном режиме ($Kn^{-1} \sim 1$) данные различаются до 8,6%, когда $\alpha_\tau = 1$, и до 2,4%, когда $\alpha_\tau = 0{,}25$. В режиме со скольжением результаты различаются на 15,2 и 5,8% соответственно. Это увеличение разногласия при аппроксимации режима со скольжением принципиально имеет место вследствие недостаточной точности, связанной с использованием относительно низкого порядка моментного приближения.

Эта работа была поддержана грантом (NAG-3-1420) от Национальной авиационной и космической администрации США (U.S. NASA).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Галкин В.С.* Цилиндрическое течение Куэтта разреженного газа // Инж. ж., 1965. Т. 5. № 3. С. 553–555.
2. *Смирнов Л.П., Чекалов В.В.* Медленное вращение сферы в ограниченном объеме разреженного тока // Изв. АН СССР. МЖГ. 1978. № 4. С. 117–124.
3. *Beijeren H.V., Dorfman J.R.* Kinetic theory of hydrodynamic flows. III. The torque on a rotating sphere or cylinder // J. Stat. Phys. 1982. V. 29. N 1. P. 139–153.
4. *Landau L.D., Lifshitz E.M.* Mechanics. N.Y.: Pergamon Press, 1960. 165 p.
5. *Loyalka S.K.* Motion of a sphere in a gas: Numerical solution of the linearized Boltzmann equation // Phys. Fluids. A. 1992. V. 4. N 5. P. 1049–1056.
6. *Lees L.* Kinetic theory description of rarefied gas flow // J. Soc. Indust. Appl. Math. 1965. V. 13. N 1. P. 278–311.
7. *Hirschfelder J.O., Curtiss C.F., Bird R.B.* Molecular Theory of Gases and Liquids. N.Y.: Wiley, 1964. 1249 p.
8. *Кошмаров Ю.А., Рыжов Ю.А.* Прикладная динамика разреженного газа. М.: Машиностроение, 1977. 184 с.

Коламбия

Поступила в редакцию
3.X.1995