

УДК 532.516.013.4 : 532.68 : 536.25

© 1997 г. Д.С. ПАВЛОВСКИЙ

ВЛИЯНИЕ ТЕРМОКАПИЛЛЯРНЫХ ЭФФЕКТОВ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ТЕЧЕНИЯ В ГОРИЗОНТАЛЬНОМ СЛОЕ

Рассматривается конвекция жидкости в бесконечном горизонтальном слое со свободной поверхностью, вызванная приложенным продольным градиентом температуры. Границы слоя теплоизолированы, а на свободной верхней поверхности действует сила поверхностного натяжения, зависящая от температуры. Эта задача моделирует гидродинамические процессы при направленной кристаллизации в открытой лодочке, когда важен учет как гравитационных, так и термокапиллярных сил. Из анализа спектра линеаризованных уравнений Навье – Стокса находятся критические значения параметров, при которых теряет устойчивость плоскопараллельное течение. На основе анализа нелинейных уравнений определены пространственно-временные характеристики вторичных течений.

Жидкая фаза присутствует во многих технологических процессах. На жидкость действуют различные силы и их интенсивность и взаимодействие определяют режим конвекции, а следовательно, и качество получаемого материала, например, в технологиях выращивания кристаллов из расплава. Поэтому важно иметь ясное представление о режимах конвекции в различных условиях. В космических технологиях гравитационная конвекция достаточно мала и неоднородность течения в реальных условиях может быть описана начальными бифуркациями. Появление нестационарных режимов течения в тонких слоях может быть изучено с использованием линейной или слабонелинейной теории устойчивости.

Комбинированная тепловая и термокапиллярная конвекция возникает в различных ситуациях, когда температурный градиент приложен вдоль поверхности раздела газ – жидкость. Например, такая конвекция наблюдается в процессе роста кристаллов из расплава в горизонтальной открытой лодочке (горизонтальный метод Бриджмена). Хорошо известно, что когда температурный градиент достигает некоторого критического значения, возникает нестационарный режим конвекции. Возникновение температурных осцилляций в длинной полости связано с потерей устойчивости одноячейковой циркуляции.

Для исследования этой потери устойчивости используется приближение бесконечного слоя и критические значения параметров находятся из анализа спектра линеаризованных уравнений конвекции. Для определения пространственных и временных характеристик возникающих вторичных течений недостаточно анализа лишь линейных уравнений, а необходим нелинейный анализ.

В настоящей работе предполагается, что верхняя и нижняя границы слоя теплоизолированы. Полный анализ (линейный и нелинейный) этой задачи только для гравитационной конвекции проведен в [1]. Второй частный случай, только термокапиллярной конвекции, исследован в линейной постановке в [2] и в нелинейном случае – в [3]. Заметим, что линейный анализ совместной тепловой и термокапиллярной конвекции проведен в [4] для случая проводящих, а не теплоизолированных границ. В этом случае термокапиллярные силы не зависят от структуры течения.

Изучение полной задачи с теплоизолированными границами проведено в [5, 6]. При нелинейном анализе вторичных течений используется метод работы [1]. Настоящая

работа продолжает изучение совместного влияния обоих механизмов потери устойчивости.

1. Математическая модель и методы. Исходные уравнения. Рассмотрим конвекцию несжимаемой вязкой жидкости в бесконечном слое толщины H . В слое создан градиент температуры с постоянной продольной компонентой A . Характер гидродинамических процессов зависит от различных размерных параметров жидкости: кинематической вязкости ν , динамической вязкости μ , коэффициента температуропроводности χ , коэффициента температурного расширения β , поверхностного натяжения σ и ускорения силы тяжести g . Будем считать, что конвекция описывается трехмерными уравнениями Навье – Стокса в приближении Буссинеска и уравнением переноса тепла. Для обезразмеривания этих уравнений используем следующие масштабы: $H/2$, $2g\beta AH^3/\nu$, $8AH$ и $H^2/4\nu$ – для длины, скорости, температуры и времени соответственно. Систему координат выберем так, что ось x направлена вдоль температурного градиента, а ось z – вертикально вверх, начало расположим в середине слоя. В области $-1 \leq z \leq 1$ конвекция описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \text{Gr}(\mathbf{V} \cdot \Delta) \mathbf{V} &= -\nabla P + \Delta \mathbf{V} + \mathbf{T}e \\ \text{div} \mathbf{V} &= 0 \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \text{Gr}(\mathbf{V} \cdot \nabla T) &= \frac{1}{\text{Pr}} \Delta T \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь использованы обычные обозначения, а единичный вектор $e = (0, 0, 1)$ направлен против силы тяжести.

Нижняя поверхность слоя ($z = -1$) – твердая и теплоизолированная

$$U = V = W = \partial T / \partial z = 0$$

Верхняя поверхность ($z = 1$) – свободная и теплоизолированная. В качестве граничных условий для скорости на ней рассматриваются условия баланса вязких и термокапиллярных сил

$$W = \frac{\partial T}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = -4M \frac{\partial T}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = -4M \frac{\partial T}{\partial y}$$

Задача определяется тремя безразмерными параметрами: числом Прандтля $\text{Pr} = \nu/\chi$, числом Грасгофа $\text{Gr} = g\beta AH^4/\nu^2$ и числом $M = -\partial\sigma / \partial T (\rho g \beta H^2)^{-1}$.

Интенсивность сил плавучести характеризуется числом Грасгофа Gr , в то время как число M описывает отношение сил плавучести и термокапиллярных. Число M является отношением числа Марангони $\text{Ma} = -\partial\sigma / \partial T (AH^2 / \rho\nu\chi)$ к числу Рэлея $M = \text{Ma}/(\text{GrPr})$.

Система (1.1) всегда имеет одномерное решение (зависящее только от z -координаты). Это решение называется "основным течением" и представляет плоскопараллельное течение жидкости в слое. Основная задача исследования заключается в нахождении критических значений определяющих параметров, где основное течение теряет устойчивость.

2. Линейный анализ. Для этой цели используется обычная теория малых возмущений. При таком подходе зависимость возмущений от времени и горизонтальных координат предполагается в виде $\exp(i(kx + hy) + \lambda t)$, где λ – характеристический декремент, а (k, h) – волновой вектор в xy -плоскости. Подставляя такие возмущения в систему (1.1) и линеаризуя ее, получаем краевую задачу на собственные значения

$$\lambda u = -\text{Gr}(ikU_0u + U_0'w) - \rho^2 u + u'' - ikp \quad (2.1)$$

$$\lambda v = -\text{Gr}(ikU_0 v) - \rho^2 v + v'' - ihp$$

$$\lambda w = -\text{Gr}(ikU_0 w) - \rho^2 w + w'' - p' + \theta$$

$$\lambda \theta = -\text{Gr}\left(ikU_0 \theta + \frac{u}{16} + \text{GrPr} \tau'_0 w\right) + \frac{1}{\text{Pr}}(\theta'' - \rho^2 \theta)$$

$$iku + ihv + w' = 0$$

с граничными условиями

$$z = -1: u = v = w = \theta' = 0$$

$$z = 1: w = \theta' = 0, u' = -4ikM\theta, v' = -4ihM\theta$$

Здесь u, v, w, p – амплитудные функции возмущений скорости и давления, зависящие только от координаты z , $U_0(z)$ – скорость основного течения, $\tau_0(z)$ – z -компонента температурного поля основного течения.

Действительная часть собственного числа λ описывает скорость затухания соответствующей моды. Для фиксированных параметров критическое число Грасгофа вычисляется как

$$\text{Gr}(\text{Pr}, M) = \inf_{k, h} \text{Gr}_0(\text{Pr}, M, k, h)$$

где Gr_0 – такое значение числа Грасгофа, при котором собственное число λ задачи (2.1) с наибольшей действительной частью чисто мнимое.

В процессе анализа получают три семейства собственных мод. Первое соответствует решениям с волновым вектором вида $(k, 0)$ – это плоские моды ($2D$ -моды). Второе соответствует решениям с волновым вектором вида $(0, h)$ – это спиральные моды (LR -моды). Для решений из третьего семейства обе компоненты волнового вектора ненулевые – это трехмерные моды ($3D$ -моды). Каждая из этих мод может быть стационарной ($\omega = \text{Im}\lambda = 0$) и колебательной ($\omega = \text{Im}\lambda \neq 0$).

3. Анализ вторичного течения. Когда наступает бифуркация, основное течение становится неустойчивым, в результате возникает вторичное течение. Линейная теория ничего не может сказать об устойчивости вторичного течения, а также о его параметрах. Для такого исследования необходимо рассматривать нелинейные уравнения.

Ищем вторичные течения в классе периодических функций с периодами $2\pi/k$ и $2\pi/h$ по x и y соответственно. Здесь (k, h) – волновой вектор, соответствующий критическому возмущению. В [6] найдены первые два члена разложения вторичного течения по степеням закритичности $\mu = \text{Gr} - \text{Gr}_c$. Пусть Q – критическая собственная функция задачи (2.1), а ω_0 – критическая частота ($\lambda = i\omega_0$). Для плоской $2D$ -моды основная часть возмущения представляется в виде

$$2\epsilon \text{Re}\{Q \exp\{i(kx + \omega t)\}\} \quad (3.1)$$

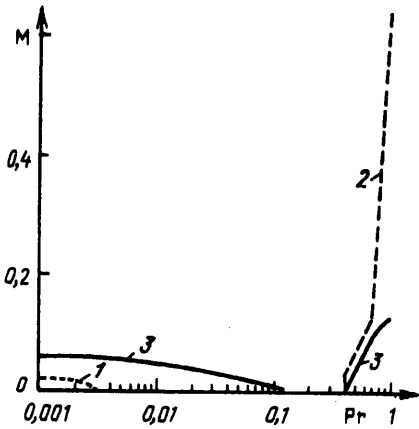
$$\epsilon^2 = A\mu, \quad \omega = \omega_0 + B\epsilon^2$$

Коэффициенты A и B находятся при анализе нелинейных уравнений конвекции.

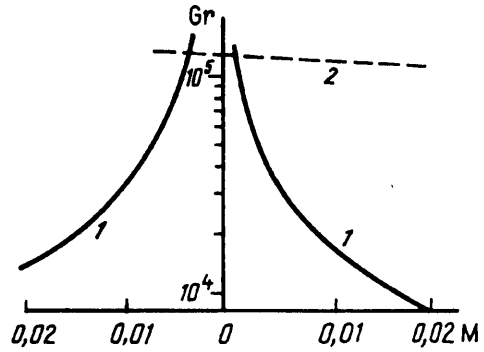
Если критическая мода оказывается трехмерной, то в результате бифуркации может реализоваться один из двух возможных вторичных режимов. Первый из них – плоская волна, распространяющаяся под некоторым углом к температурному градиенту. Основная часть такой моды представляется в виде

$$2\epsilon \text{Re}\{Q \exp\{i(kx + hy + \omega t)\}\} \quad (3.2)$$

$$\epsilon^2 = A\mu, \quad \omega = \omega_0 + B\epsilon^2$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Фиг. 1. Карта вторичных течений при положительных M . Кривая 1 – граница между областями появления двумерной и трехмерной мод. Кривая 2 – граница между областями появления плоской трехмерной моды, распространяющейся под углом к градиенту температуры, и модулированной моды. Кривая 3 – граница между областями, где вторичные волны распространяются по или против температурного градиента

Фиг. 2. Зависимость критического числа Грасгофа от числа M для значения $Pr = 0,56$. Кривая 1 – нейтральная кривая трехмерной плоской моды, кривая 2 – нейтральная кривая спиральной моды

Второй тип 3D-моды представляет собой модулированную волну, распространяющуюся вдоль температурного градиента. Ее вид

$$2\epsilon \cos(hy) \operatorname{Re}\{Q \exp\{i(kx + hy + \omega t)\}\}$$

$$\epsilon^2 = A\mu, \quad \omega = \omega_0 + B\epsilon^2$$

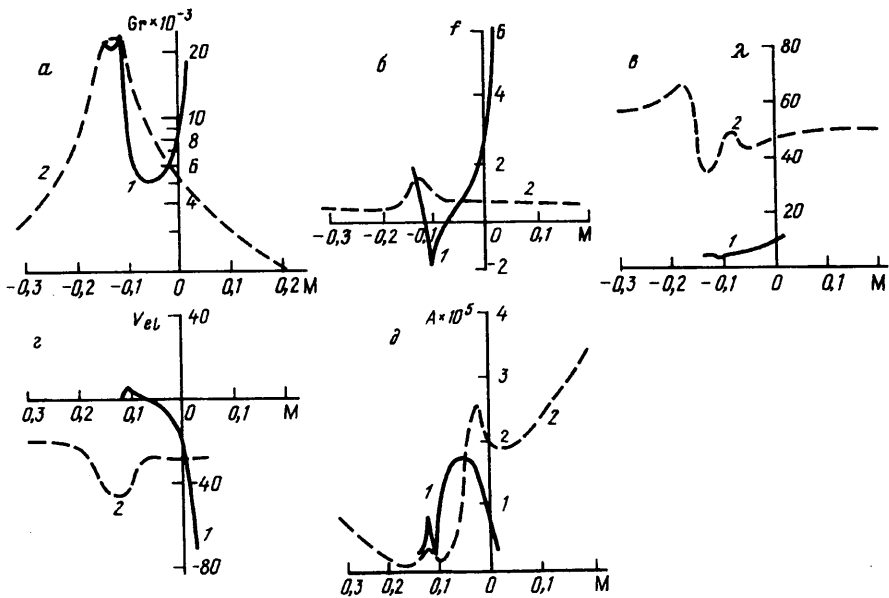
Задача на собственные значения (2.1) решается методом К.И. Бабенко. При этом неизвестные функции интерполируются многочленами с узлами интерполяции в нулях многочленов Чебышева второго рода. Порядок аппроксимации (число узлов интерполяции) определяет степень аппроксимирующих многочленов. Фундаментальные многочлены интерполяции выбираются так, чтобы удовлетворялись краевые условия. После подстановки аппроксимирующих многочленов в решаемую систему берется ее ограничение на узлы интерполяции, которые, таким образом, являются и узлами коллокации. В результате такой процедуры получается алгебраическая задача на собственные значения, которая может быть решена стандартными методами.

4. Результаты. Анализ устойчивости выполнен для широкого диапазона определяющих параметров.

На фиг. 1 показаны области реализации различных типов вторичных течений для положительных значений числа M (этот случай включает в себя почти все жидкости). В области под кривой 1 первой теряет устойчивость 2D-мода. Таким образом, при малых значениях чисел Pr и M при достижении критического значения числа Грасгофа возникают температурные колебания в результате появления плоской моды. Длина волн критического возмущения зависит в основном только от числа M и изменяется от 4 до 12.

При почти всех остальных значениях параметров колебательные трехмерные моды определяют вторичное течение. Критическая длина волны зависит в основном от числа Прандтля, равна 180 при $Pr = 0,001$ и убывает с возрастанием Pr .

При $M = 0$ и $Pr = 0,41$ 3D-мода перестает определять неустойчивость основного течения.



Фиг. 3. Зависимость критических параметров от числа M при $Pr = 0,01$. Кривые 1 – двумерная мода, кривые 2 – трехмерная плоская мода. a – критическое число Грасгофа, $б$ – частота колебаний вторичного течения, $в$ – длина волн вторичного течения, $г$ – волновая скорость вторичного течения, $д$ – скорость роста амплитуды вторичного течения

При малых значениях числа M в диапазоне чисел Прандтля $0,41 < Pr < 1,2$ первой теряет устойчивость спиральная мода. Нейтральные кривые для $Pr = 0,56$ показаны на фиг. 2. При $Pr > 1,2$ и очень малых числах M основное течение всегда устойчиво. Область существования LR -моды столь мала, что не показана на фиг. 1.

Кривая 3 на фиг. 1 разделяет области существования различных типов $3D$ -моды. В левой области после бифуркации возникают плоские волны (волны первого типа, описываемые формулой (3.2)). Второй тип $3D$ -моды реализуется справа от кривой 2. Для больших значений числа M реализуется $3D$ -мода только первого типа, что согласуется с результатами [3] для предельного случая $M \rightarrow \infty$.

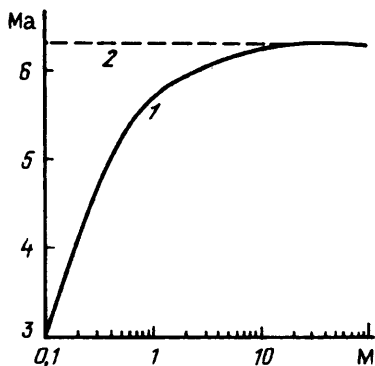
Кривая 3 на фиг. 1 разделяет области, где вторичные волны распространяются по (верхняя область) или против (нижняя область) температурного градиента.

На фиг. 3 приведены результаты для $Pr = 0,01$; критические кривые $G_c(M)$ для различных мод (a), критические частоты, длины волн и фазовые скорости волн ($б, в$ и $г$), зависимости коэффициента A в формулах (3.1) и (3.2) ($д$). Коэффициент A определяет амплитуду вторичного течения.

В [2] исследуется чистая термокапиллярная конвекция. Для $Pr = 0,01$ критическое число Марангони $Ma_c = 6,29$. В присутствии гравитационных сил число Ma_c уменьшается. Зависимость $Ma_c(M)$ для $Pr = 0,01$ приведена на фиг. 4. Значение Ma_c уменьшается в 2 раза для $M = 0,1$.

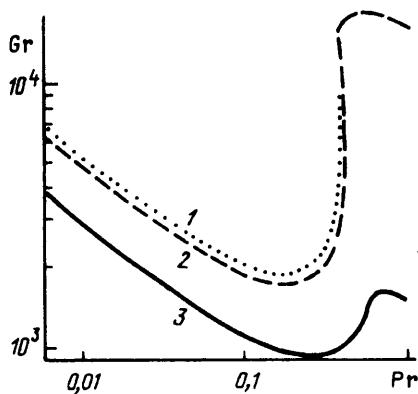
Как было отмечено раньше, при $M = 0$ $3D$ -мода существует при всех значениях числа Прандтля вплоть до $Pr = 0,41$. С возрастанием числа M критические числа Грасгофа уменьшаются. Начиная с некоторого значения числа M $3D$ -мода существует при всех значениях числа Pr . Нейтральные кривые для трех значений M приведены на фиг. 5.

Заключение. Приведенный анализ режимов вторичных течений выполнен в приближении плоского бесконечного слоя. Задача о гравитационно-термокапиллярной конвекции в конечной области существенно более сложная. Поэтому любые полученные результаты, которые приложимы к полной задаче, интересны и с точки зрения нелинейной задачи конвекции в замкнутой области.



Фиг. 4

Фиг. 4. Зависимость критического числа Марангони от числа M для значения $Pr = 0,01$. Кривая 1 – трехмерная плоская мода, кривая 2 – предел в отсутствие гравитационных сил [2]



Фиг. 5

Фиг. 5. Критическое число Грасгофа для трехмерной плоской моды в зависимости от числа Прандтля. Кривая 1 – $M = 0$, кривая 2 – $M = 0,01$, кривая 3 – $M = 0,1$

Анализ структуры полученных закритических течений показывает, что в случае двух режимов ($2D$ -мода и модулированная трехмерная мода) вторичные волны распространяются по или против направления температурного градиента. При этом можно ожидать, что решение полной задачи в вытянутой вдоль градиента области будет напоминать такую же волну.

Анализ течений в бесконечном слое может, по-видимому, дать также и оценки влияния тех или иных параметров. Кривая на фиг. 4, например, показывает, что при малых числах Прандтля, характерных для жидких металлов, значения числа M , большие 10, соответствуют случаю практически чистой термокапиллярной конвекции. Математическое моделирование в этих условиях не требует учета гравитационных сил, что уменьшает число определяющих параметров до двух.

Данная работа осуществлена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 94-01-01551).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Laure P. Étude des mouvements de convection dans une cavité rectangulaire soumise à un gradient de température horizontal // J. Mec. Theor. et Appl. 1987. V. 6. № 3. P. 351–382.
2. Smith M.K., Davis S.H. Instabilities of dynamic thermocapillary liquid layers. 1. Convective instabilities // J. Fluid Mech. 1983. V. 132. P. 119–144.
3. Smith M.K. The nonlinear stability of dynamic thermocapillary liquid layers // J. Fluid Mech. 1988. V. 194. P. 391–415.
4. Мызников В.М. Конечно-амплитудные пространственные возмущения адекватного движения в горизонтальном слое со свободной границей // Конвективные течения. Пермь: Изд-во Перм. пед. ин-та, 1981. С. 83–88.
5. Pavlovsky D.S. Stability of flows with interaction between different convective mechanisms in microgravity. Hydromechanics and Heat/Mass Transfer in Microgravity // Reviewed Proc. 1st Intern. Symp. on Hydromechanics and Heat/Mass Transfer in Microgravity. Gordon and Breach Sci. Pub., 1992. P. 37–42.
6. Павловский Д.С. Вторичные течения в слое со свободной поверхностью // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 5. С. 85–98.