

УДК 532.517.4.011.11

© 1997 г. В.М. ЕМЕЛЬЯНОВ, В.А. ФРОСТ

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОГО ПЕРЕНОСА ПРИ НАЛИЧИИ СИЛ ПЛАВУЧЕСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ УСЛОВНО УСРЕДНЕННОЙ СКОРОСТИ

Рассмотрен процесс успокоения сильно турбулизованной первоначально стратифицированной по плотности жидкости. Показано, что метод моментов не позволяет описать существенные особенности процесса, связанные с начальным распределением плотности. Привлечение уравнения для плотности вероятности плотности также не решает проблему из-за неградиентного характера турбулентного переноса. Использование уравнения для условно усредненной скорости позволило описать все существенные особенности процесса вырождения турбулентности в жидкости с вариациями плотности при наличии сил плавучести.

Турбулентные явления, происходящие из-за вариаций плотности при наличии сил плавучести, имеют много общего с явлениями, происходящими при турбулентном горении газов. Это позволяет использовать уравнение для совместной плотности распределения вероятности скорости потока и концентрации, первоначально предложенное для описания химических процессов в турбулентных потоках [1, 2] для описания турбулентности в жидкостях при наличии вариаций плотности и сил плавучести.

Для применения такого подхода достаточно, чтобы уравнение состояния имело вид зависимости плотности от концентрации некоторого компонента или только от температуры среды. Характерным примером является вырождение турбулентности в сосуде, в котором первоначально находилась покоящаяся стратифицированная по плотности жидкость. После сильной турбулизации наблюдается полная пространственная однородность турбулентности при наличии значительных пульсаций плотности. В процессе вырождения турбулентности под действием сил плавучести происходит расслоение жидкости, приводящее на конечной стадии к восстановлению стратификации с отличным от начального распределением плотности по высоте. Такое явление достаточно хорошо изучено экспериментально [3–6], однако его математическое моделирование затруднено недостаточностью наших представлений о взаимном влиянии турбулентности и процессов молекулярного переноса, определяющего фактически наблюдаемые распределения плотности.

Измеряемое в экспериментах изменение распределения плотности, в частности толщины слоя промежуточных концентраций, после прекращения всех турбулентных колебаний позволяет получить количественные результаты по интенсивности турбулентного микросмешения. С этой точки зрения процесс турбулентного перемешивания жидкости с вариациями плотности при образовании устойчивой стратификации представляет собой очень интересный объект для изучения.

1. Постановка задачи. Рассматривается бесконечно протяженный в горизонтальных направлениях слой жидкости глубиной H , в котором создана однородная по пространству, но неизотропная турбулентность. В жидкости наблюдаются пульсации солёности s , начальное распределение вероятности $P_0(s)$ для солёности предполагается известным. Плотность жидкости является известной функцией состава $\rho(s)$. Жидкость

находится в поле сил тяготения с известным и постоянным ускорением g . Система координат: ось z направлена по ускорению g , значение $z = 0$ соответствует верхней границе жидкости. Предполагается, что изменения плотности малы.

Из соображений симметрии и в силу постоянства плотности среднее движение среды отсутствует ($U = (\langle u \rangle, \langle v \rangle, \langle w \rangle) = 0$). Развитие процесса стратификации характеризуется изменением интенсивностей двух компонент турбулентной скорости ($\langle u^2 \rangle$ и $\langle w^2 \rangle$, $\langle v^2 \rangle = \langle u^2 \rangle$), изменением характеристик поля солёности ($\langle c \rangle$, $\langle c^2 \rangle$) или наиболее полно распределением $P(c, z, t)$. По прошествию достаточно большого времени происходит вырождение турбулентности и в зависимости от его условий могут наблюдаться различные распределения плотности по вертикали слоя.

Граничные условия при $z = 0$ и H являются условиями нулевого потока для солёности. Условия для пульсаций скорости зависят от предположений о возмущениях скорости на свободной поверхности жидкости и на дне сосуда.

Эксперименты по вырождению турбулентности при наличии сил плавучести проводились в гидроротках с соляными растворами для создания стратификации и с применением буксируемых турбулизующих решеток [3–5] и в аэродинамических трубах с использованием тепловой стратификации [6]. Каждый из методов имеет свои преимущества и недостатки и никакой из них не является идеальным способом изучения вырождения турбулентности в стратифицированной жидкости.

Даже в условиях одной и той же экспериментальной установки (замкнутый канал Стилинжера [3]) результаты, полученные различными авторами, подчас оказываются противоречивыми. Так, результаты [3] показывают, что вырождение турбулентности в стратифицированной жидкости происходит медленнее, чем в однородном случае. Противоположные результаты получены в экспериментах, выполненных Итсвером и др. [4].

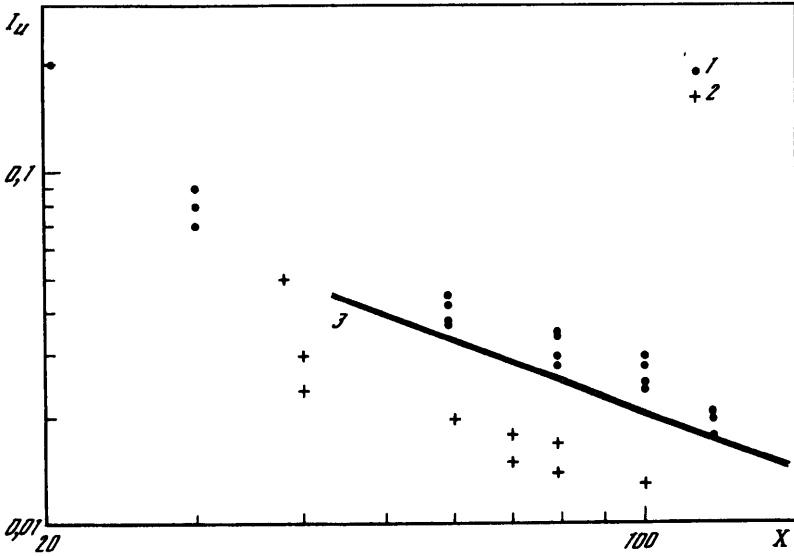
Как правило, эксперименты проводились при линейной стратификации и постоянном значении средней скорости потока. В этих экспериментах не проводилось прямое определение интенсивности микросмещения, поэтому появилась необходимость в проведении собственных экспериментов.

2. Экспериментальная установка и методика измерений. Эксперименты были выполнены в стальном канале $50 \times 50 \times 300$ см, на боковых стенках которого имелись окна для проведения оптических наблюдений. Канал имел две буксируемые тележки, на одной из которых размещалась турбулизирующая решетка, а на другой измерительные приборы. При проведении экспериментов тележки буксировались на постоянном расстоянии одна от другой вдоль канала.

Турбулизирующие решетки выполнялись из стержней (1×1 см²) с шагом $M = 5$ см. В канале предвзято создавалось двухслойное распределение плотности: сверху пресная вода, внизу соляной раствор.

Теневой прибор и лазерный рефрактометр использовались для измерения вертикального распределения плотности. Интенсивность микросмещения оценивалась из сравнения начального (до буксировки решетки) и конечного (после того, как все движения жидкости прекращались) вертикальных распределений плотности. Основными измеряемыми параметрами при этом являлись начальная S_0 и конечная S_f толщины промежуточного слоя.

Для измерения пульсаций скорости применялся пленочный термоанемометр DANTEC, использующий покрытые кварцем датчики клинообразной формы. Отношение плотностей слоев жидкости $\Delta\rho$, скорость U и размер ячейки M сетки изменялись в экспериментах с целью получения зависимости суммарной интенсивности микросмещения $\Delta S = S_f - S_0$ и интегрального влияния сил плавучести от безразмерных параметров. Число Ричардсона может быть построено в форме $Ri = Mi/Fr = (g\Delta\rho M^2)/(\rho S U^2)$, где $Mi = (\Delta\rho)/\rho M/S$ и $Fr = U^2/(gM)$. Локальные критерии $Mi = (l_t/\rho) \partial\rho/\partial z$ и $Fr = q^2/(l_t g)$ (где l_t – турбулентный масштаб длины и $q^2 = \langle u^2 \rangle + \langle v^2 \rangle + \langle w^2 \rangle$) имеют ясный физический смысл. Число Mi характеризует отношение турбулентного масштаба длины к



Фиг. 1. Относительная интенсивность пульсаций продольной компоненты скорости I_u в зависимости от безразмерного расстояния от решетки X : 1 – однородная жидкость; 2 – начальная соленость нижнего слоя $c = 0,4\%$

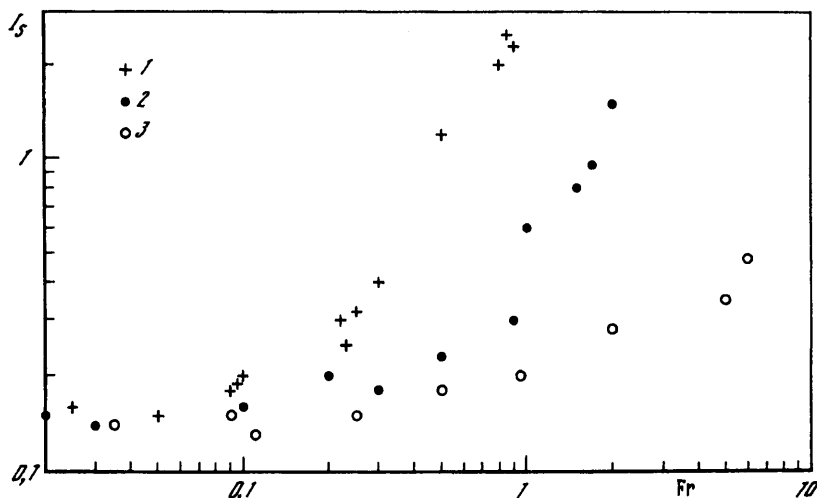
масштабу длины стратификации, а число Fr – отношение энергии турбулентности к потенциальной энергии подъема на высоту, равную характерному масштабу турбулентности.

3. Экспериментальные результаты. На фиг. 1 для однородного и стратифицированного случаев представлены результаты измерений турбулентных пульсаций продольной компоненты скорости $I_u = \langle u^2 \rangle / U^2$ как функции безразмерного на шаг решетки M расстояния X . В однородном случае полученные результаты описываются степенной зависимостью с показателем $-0,8$ (кривая 3). В стратифицированном случае, начиная с некоторого расстояния, вырождение турбулентности усиливается, а затем снова выходит на режим вырождения со скоростью, соответствующей однородному случаю.

Площади под кривыми, проведенными по экспериментальным точкам, характеризуют интегральное влияние сил плавучести на вырождение турбулентности. Зависимости интенсивности микросмешения $I_s = \Delta S^2 / M^2$ от числа $Fr = U^2 / (Mg)$ для различных значений числа Mi представлены на фиг. 2, которые для различных значений Mi близки при малых значениях числа Fr и различаются при больших значениях числа Fr . Большим значениям числа Mi соответствуют большие интегральные интенсивности микросмешения.

В экспериментах наблюдались два существенно различных режима. При начальной толщине промежуточного слоя S_0 , достаточно малой по сравнению с шагом решетки M ($S_0/M < 1$), после перемешивания и последующего затухания возмущений толщина переходного слоя S_f оказывается больше исходной S_0 и соответственно максимальное значение градиента концентрации уменьшается.

Если же буксировку турбулизирующей решетки проводить по прошествии значительного времени после создания двухслойного распределения, то измеренная после смешения и последующего успокоения толщина переходного слоя S_f оказывается меньше начальной S_0 . Такие режимы наблюдаются при больших начальных толщинах переходного слоя S_0 , образовавшихся под действием молекулярной диффузии за время между созданием двухслойного распределения и буксировкой турбулизирующей ре-



Фиг. 2. Интенсивность микросмешения в зависимости от числа Фруда Fr для различных значений числа смешения Mi : 1 – $Mi = 0,015$; 2 – $0,012$; 3 – $0,01$

щетки. Уменьшение S_f по сравнению с S_0 должно сопровождаться небольшими изменениями концентрации в верхней и нижней частях канала, однако наши экспериментальные возможности не позволили их определить.

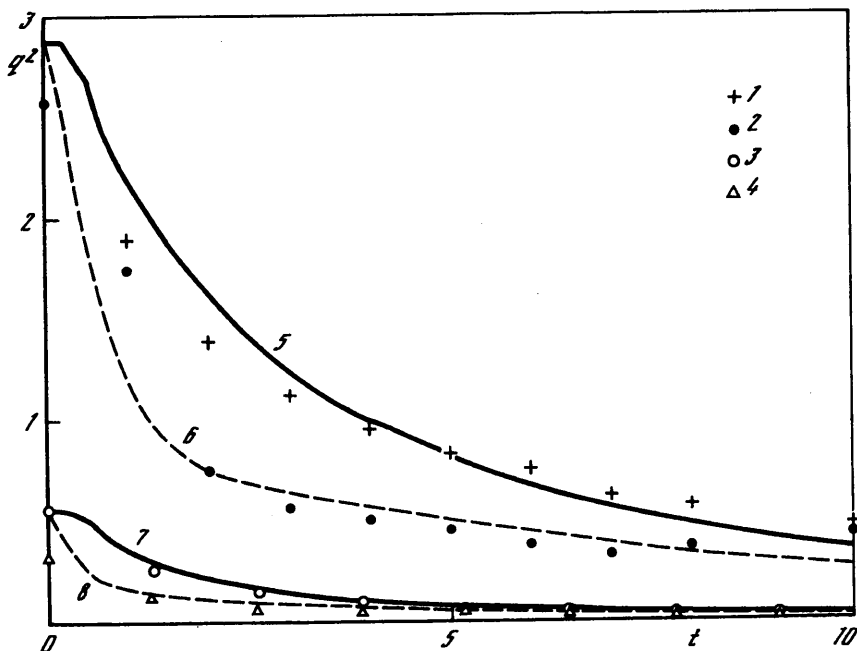
4. Математическое моделирование. Сделанные выше предположения о малости изменения плотности позволяют разделить описание полей турбулентности и концентрации. Для описания турбулентности в неизотопном случае, каким является данный эксперимент, необходимы уравнения для всех компонент пульсаций скорости. Простейшая форма уравнений для компонент пульсаций может быть получена различными способами: как часть последовательности уравнений Фридмана–Келлера [7] или как следствие уравнения для совместной плотности распределения вероятности для скорости и концентрации [8]. Эти уравнения содержат высшие моменты и незамкнуты. Простейшим замыкающим предположением является предположение о равенстве нулю всех слагаемых, зависящих от моментов третьего порядка. Однако в неоднородном случае такое предположение не выполняется и используется предположение о равновесности этих моментов, эквивалентное градиентным гипотезам для них. Уравнения, полученные как следствие уравнения для совместного распределения вероятности скорости и концентрации, содержат некоторые эмпирические постоянные, которые оцениваются [9] из расчетов простейших течений: вырождения турбулентности в однородном случае [6] и развития турбулентности в потоке с однородным сдвигом средней скорости [10].

5. Метод моментов для описания вырождения турбулентности при наличии сил плавучести. Для описания экспериментов в водном канале используется следующая система уравнений для интенсивностей турбулентности и концентрации и соответствующих моментов второго порядка:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = - \frac{\partial \langle c'w' \rangle}{\partial z} \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial \langle c'^2 \rangle}{\partial t} = -2\beta \langle c'^2 \rangle - \langle c'w' \rangle \frac{\partial C}{\partial z} - \frac{\partial \langle c'^2 w' \rangle}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \langle u'^2 \rangle}{\partial t} = -2\alpha \langle u'^2 \rangle + \varepsilon - \frac{\partial \langle u'^2 w' \rangle}{\partial z}$$



Фиг. 3. Сравнение расчетных зависимостей (кривые 5–8) величины q^2 от времени с экспериментом: 1, 3 – однородная и 2, 4 – стратифицированная жидкости

$$\frac{\partial \langle w'^2 \rangle}{\partial t} = -2\alpha \langle w'^2 \rangle + \varepsilon - 2 \langle c'w' \rangle Gr - 3 \frac{\partial \langle w'^3 \rangle}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \langle c'w' \rangle}{\partial t} = -(\alpha + \beta) \langle c'w' \rangle - 2 \langle c'^2 \rangle Gr - \langle w'^2 \rangle \frac{\partial C}{\partial z} - 2 \frac{\partial \langle c'w'^2 \rangle}{\partial z}$$

Здесь C – средняя концентрация, $\langle c'^2 \rangle$ – интенсивность пульсаций концентрации, $\langle c'w' \rangle$ – турбулентный вертикальный массовый поток, α и β – интенсивности диссипации импульса и концентрации, их отношение позволяет определить турбулентное число Шмидта [2], ε – интенсивность пульсаций сил давления и трения.

Фактор

$$Gr = -b \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial z} \quad (5.2)$$

характеризует взаимодействие пульсаций плотности и поля среднего давления p . Здесь a и b – коэффициенты в зависимости плотности от концентрации, которая выбрана в виде

$$\frac{1}{\rho} = a - bc$$

Включение в систему (5.1) уравнения для турбулентного потока $\langle c'w' \rangle$ является принципиальным и позволяет обойтись без использования понятия о коэффициенте турбулентного переноса. При выполнении условий равновесия для потока $\langle c'w' \rangle$ применение уравнения для него оказывается эквивалентным принятию градиентной гипотезы о турбулентном переносе. В общем случае использование уравнения для потока позволяет учесть возможную неравновесность турбулентного переноса, особенно существенную в начальный момент.

Моменты третьего порядка $\langle w'c^2 \rangle$, $\langle u^2w \rangle$, $\langle w^3 \rangle$ и $\langle w^2c \rangle$ определяются из уравнений для них, в которых опущены все слагаемые, содержащие моменты четвертого порядка и производные от моментов третьего порядка, что эквивалентно предположению о равновесности.

Нулевые граничные условия (на дне и поверхности) приняты для вертикальных и продольных пульсаций скорости и для производных по вертикальной координате для других переменных.

На фиг. 3 приведены результаты сравнения расчетных зависимостей величины q^2 от времени для однородного случая (кривые 5, 7) и в случае со стратификацией (6, 8) с результатами измерений, полученными авторами настоящей статьи (1, 2), и результатами, опубликованными в [5] (3, 4). Наблюдается приемлемое согласование результатов вычислений и экспериментальных данных как при стратификации, так и для однородного случая.

6. Уравнение для плотности распределения вероятности. В целом метод моментов дает достаточно хорошее совпадение с экспериментальными данными. Однако если вспомнить об обнаруженном влиянии начального распределения плотности на результирующее распределение, то необходимо отметить, что в методе моментов отсутствует возможность учета деталей начального распределения плотности. В начальные условия для метода моментов входят только распределения средней плотности и интенсивности пульсаций плотности. Первое после сильного перемешивания однородно по высоте и, следовательно, характеризует только среднюю плотность. Второе, таким образом, является единственной стохастической характеристикой распределения плотности. Более полную информацию о распределении плотности в процессе вырождения можно получить, дополнив систему уравнений для моментов уравнением для распределения вероятности плотности или концентрации $P(c, z, t)$. В этом случае средняя концентрация и интенсивность пульсаций концентрации вычисляются по предварительно рассчитываемой $P(c, z, t)$. В рассматриваемом случае уравнение для $P = P(c, z, t)$ можно записать

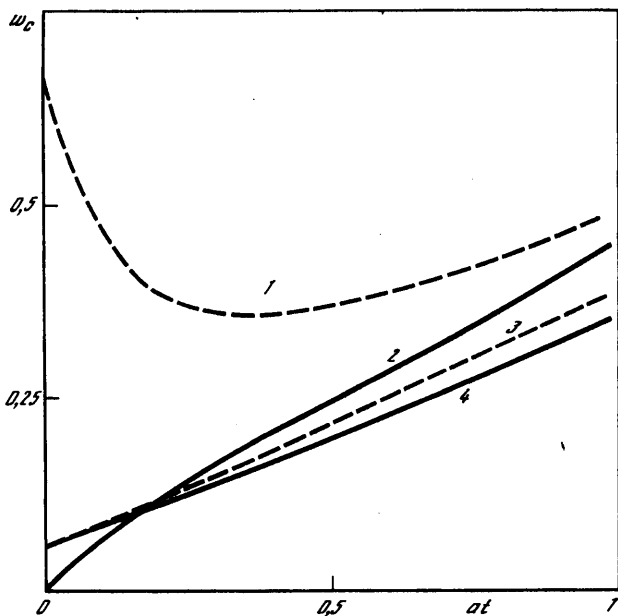
$$\frac{\partial P}{\partial t} = - \frac{\partial w_c P}{\partial z} + \beta M[P] \quad (6.1)$$

Здесь $w_c = \langle w \rangle_c$ есть условно усредненная скорость, вычисляемая при фиксированном значении концентрации, $\beta M[P]$ – член, описывающий процесс смешения до молекулярного состояния или, другими словами, процесс микросмешения. Величина β характеризует интенсивность микросмешения. Уравнение (6.1) является не замкнутым, так как микросмешение не выражается через одноточечное распределение вероятности и предложено достаточно много замыкающих гипотез (см., например, [11–13]). Анализ некоторых из этих гипотез [14] показал, что результаты расчетов распределений вероятности слабо зависят от используемой модели и ее выбор может основываться на соображениях, связанных с упрощением расчетов. В данной работе используется модель, предложенная в [12].

Входящая в уравнение (6.1) условно усредненная скорость должна быть определена дополнительно. Однако часто используется градиентная гипотеза [12]

$$w_c P = -D \frac{\partial P}{\partial z} \quad (6.2)$$

где D есть коэффициент турбулентной диффузии. Такая форма непригодна для описания процесса, начинающегося с полностью однородного состояния, так как в этом случае градиенты распределения вероятности отсутствуют в начальном состоянии и не могут возникнуть при отсутствии потоков через границы. Введение в модель условно усредненной скорости эквивалентно использованию уравнения для потока в методе моментов и позволяет учесть возможную неравновесность переноса. Для определения условно усредненной скорости могут использоваться: уравнение для нее



Фиг. 4. Зависимости максимальных значений условно усредненной скорости w_c (см/с) от времени для различных начальных распределений потока; 1, 2 – расчет по формуле (6.3), 3, 4 – по (6.4)

или соотношение, связывающие w_c с потоком концентрации [15], или предположение о ее равновесии. На фиг. 4 приведены зависимости максимальных значений условно усредненной скорости, рассчитанных по формуле, предложенной В.Р. Кузнецовым

$$w_c = - \frac{\langle cw \rangle (c - \langle C \rangle)}{\langle c'^2 \rangle} \quad (6.3)$$

и по равновесному соотношению, полученному из уравнения для w_c , приведенного ниже (7.1)

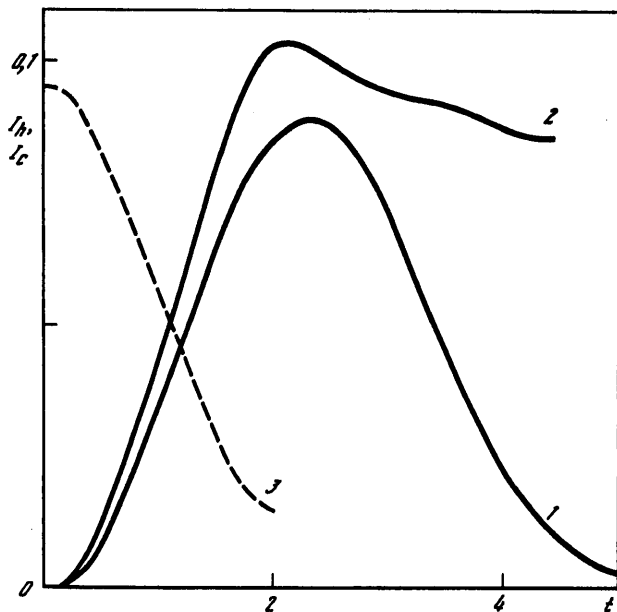
$$w_c = -(\langle w'^2 \rangle) \frac{\partial \ln(P)}{\partial z} - g \frac{b}{a} (c - \langle C \rangle) (\alpha + \beta)^{-1} \quad (6.4)$$

Расчеты распределений условно усредненной скорости выполнены с использованием решения системы (5.1) для случая [6]. Начальные распределения $\langle c'w' \rangle$ задавались нулевыми (кривые 1, 3) или по соотношению (6.4) (кривые 2, 4).

Сравнение результатов показывает, что формула (6.3), использующая расчетные значения потока, позволяет учесть неравновесность процесса турбулентного переноса, тогда как равновесное соотношение (6.4) эквивалентно градиентной гипотезе и требует вычисления коэффициента турбулентной диффузии.

7. Уравнение для условно усредненной скорости. Наиболее простая форма этого уравнения получается с использованием уравнений Ланжевена, заменяющих уравнение Навье–Стокса и уравнение молекулярной диффузии [12]. Такая система позволяет получить уравнение для совместной вероятности скорости и концентрации как уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова, интегрирование которого по скорости приводит к уравнению для $w_c P$

$$\frac{\partial w_c P}{\partial t} = -(\alpha + \beta) w_c P - \langle w'^2 \rangle \frac{\partial P}{\partial z} - g \frac{b}{a} (c - C) P \quad (7.1)$$



Фиг. 5. Зависимости от времени параметра I_h , характеризующего стратификацию (кривые 1, 2) для случаев сильного 1 и слабого 2 перемешивания и параметра I_c (кривая 3)

На фиг. 5 изображены временные зависимости параметра

$$I_h = \frac{1}{H} \int_0^H (C(z) - \langle C \rangle_H)^2 dz$$

характеризующего процесс восстановления стратификации в процессе вырождения турбулентности. Здесь $C(z)$ есть среднее на высоте z значение концентрации, а $\langle C \rangle_H$ среднее по всему объему значение. Нулевому значению I_h соответствует полная пространственная однородность. Для сравнения приведена зависимость средней по высоте интенсивности пульсаций концентрации

$$I_c = \frac{1}{H} \int_0^H \langle c'^2 \rangle dz$$

Расчеты проведены для некоторой модельной ситуации, при этом интенсивности микросмещения α и β изменялись произвольно. В выражении для силы плавучести использовано предположение о малости отклонений плотности ($\rho \cong \sigma^{-1}$).

В результате сильного перемешивания (кривая 1) к моменту полного вырождения турбулентности достигается полная равномерность распределения плотности. В случае слабого смещения (кривая 2), наоборот, происходит сепарация по плотности и образуется стратифицированное состояние, напоминающее начальное.

Заключение. Проведенное исследование позволило проанализировать различные подходы к описанию турбулентных процессов, происходящих при наличии архимедовых сил. Показана целесообразность включения в метод моментов уравнения для турбулентного потока, что позволяет описать возможную неравновесность процесса турбулентного переноса.

Более полное описание требует использования уравнения для распределения вероятности для плотности среды. При этом аналогом уравнения для потока является

уравнение для условно усредненной скорости потока. Проиллюстрированы различные подходы к определению условно усредненной скорости. Рассчитаны режимы вырождения турбулентности, завершающиеся как полным перемешиванием, так и образованием стратификации.

Аномальные результаты экспериментов, при которых итоговое распределение имеет большие максимальные градиенты, не может быть объяснено при использовании существующих моделей микросмешения.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 95-01-01080).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Frost V.A.* Математическая модель турбулентного горения // Тр. 3-го Всесоюз. совещ. по теории горения. М.: Изд-во АН СССР, 1960. Т. 1. С. 121–125.
2. *Chung P.M.* A simplified statistical model of turbulent chemically reacting shear flows // AIAA Journal. 1969. V. 7. № 7. P. 1982–1991.
3. *Stilling D.C., Helland K.N., Van Atta C.W.* Experiments on the transition of homogeneous turbulence to internal waves in a stratified fluid // J. Fluid Mech. 1983. V. 131. P. 91–122.
4. *Itswiere E.C., Helland K.N., Van Atta C.W.* The evolution of grid-generated turbulence in a stably stratified fluid // J. Fluid Mech. 1986. V. 162. P. 299–338.
5. *Huq P., Britter R.E.* Turbulence evolution and mixing in a two-layer stably stratified fluid // J. Fluid Mech. 1995. V. 285. P. 41–67.
6. *Lienhard J.H., Van Atta C.W.* The decay of turbulence in thermally stratified flow // J. Fluid Mech. 1990. V. 210. P. 57–112.
7. *Курбацкий А.Ф.* Моделирование нелокального турбулентного переноса импульса и тепла // Новосибирск: Наука, 1988. 240 с.
8. *Фрост В.А.* Описание процессов смешения в турбулентных потоках: Препринт № 483. М.: ИИМ АН СССР, 1990. 28 с.
9. *Emelianov V.M., Frost V.A.* Decay of turbulence in fluid with density fluctuations under the stable stratification // Prepr. 4th Intern. Symp. on Stratified Flows. Grenoble, 1994. V. 2. Sess. A3. P. 1–8.
10. *Tavoularis S., Karnik U.* Further experiments on the evolution of turbulent stresses and scales in uniformity sheared turbulence // J. Fluid. Mech. 1989. V. 204. P. 457–478.
11. *Janicka J., Kolbe W., Kollman W.* Closure of the transport equation for the probability density function of turbulent scalar fields // J. Non-Equilib. Thermodyn. 1979. V. 4. № 1. P. 47–66.
12. *Фрост В.А.* Модель турбулентного диффузионного фронта пламени // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. 1973. № 6. С. 108–116.
13. *Curl R.L.* Dispersed phase mixing: I. Theory and effects in simple Reactors // AIChE Journal. 1963. V. 9. № 2. P. 175–181.
14. *Kosály G., Givi P.* Modelling of turbulent molecular mixing // Combust. and Flame. 1987. V. 70. № 1. P. 101–118.
15. *Кузнецов В.П., Сабельников В.А.* Турбулентность и горение. М.: Наука, 1986. 287 с.

Москва

Поступила в редакцию
8.И.1996