

УДК 532.516.013.4:536.25

© 1997 г. Л.Е. СОРОКИН

УСТОЙЧИВОСТЬ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ С КОЭФФИЦИЕНТОМ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ, ЛИНЕЙНО ЗАВИСЯЩИМ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ

В задачах конвекции обычно предполагается, что физические параметры жидкости являются постоянными величинами. Однако эти коэффициенты могут зависеть от температуры и давления. Зависимость вязкости от температуры приводит к асимметрии основного течения и связанным с ней (асимметрией) эффектам дрейфа вихрей гидродинамической моды и локализации наиболее опасных волновых возмущений в восходящем потоке [1, 2]. Приведенные ниже результаты расчетов показывают, что сравнительно небольшие изменения в коэффициенте теплопроводности из-за изменения температуры приводят к аналогичным эффектам дестабилизации течения.

1. Рассматривается вертикальный плоский слой жидкости, на изотермических границах которого $x = \pm d$ поддерживаются постоянные разные температуры $\pm \Theta$. Предполагается, что температура жидкости мало отклоняется от некоторого среднего значения, а коэффициент теплопроводности линейно зависит от температуры

$$\lambda = \lambda_0(1 - \sigma T), \quad \sigma = -\frac{1}{\lambda_0} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial T} \right)_p \quad (1.1)$$

где λ_0 – теплопроводность жидкости при средней температуре T_0 , σ – коэффициент, характеризующий зависимость теплопроводности от температуры. Для жидкостей $\sigma \leq 10,01 \text{ K}^{-1}$ может быть как положительным, так и отрицательным [3]. Неоднородность плотности, обусловленная градиентом температуры, вызывает в слое конвективное течение. Введем безразмерные переменные на основе единиц расстояния d , времени d^2/ν , скорости $\beta \Theta d^2/\nu$.

Конвективное течение жидкости в приближении Буссинеска в безразмерных переменных описывается уравнениями [1, 2]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + G(\mathbf{V}\mathbf{V})\mathbf{V} &= -\nabla p + \Delta \mathbf{V} + T \boldsymbol{\gamma} \\ \frac{\partial T}{\partial t} + G\mathbf{V}\nabla T &= \frac{1}{\text{Pr}} \nabla((1 - FT)\nabla T), \quad \nabla \mathbf{V} = 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$G = \frac{g\beta\Theta d^3}{\nu^2}, \quad \text{Pr} = \nu\rho_0 \frac{C_p}{\lambda_0}, \quad F = \sigma\Theta$$

Здесь $\mathbf{V}$, T и p – скорость, температура и давление жидкости, $\boldsymbol{\gamma}$ – единичный вектор, направленный вертикально вверх вдоль оси z , G – число Грасгофа, Pr – число Прандтля, F – коэффициент, характеризующий зависимость теплопроводности от температуры. При $\Theta = 10 \text{ K}^{-1}$ для жидкостей $|F| \leq 0,1$.

На границах слоя $x = \pm 1$ выполняются условия прилипания, постоянство температур, а также должно быть выполнено условие замкнутости потока

$$V_0 = 0, \quad T = \pm 1, \quad \int_{-1}^1 V_z dx = 0 \quad (1.3)$$

Задача имеет аналитическое решение, описывающее стационарное плоскопараллельное течение с асимметричными профилями температуры и скорости

$$T_0 = \left(1 - \sqrt{1 - 2Fx + F^2}\right) / F$$

$$V_0 = [q_0 + q_1 x + q_2 (x^2 - 1) + \frac{1}{3}(1 - 2Fx + F^2)^{5/2}] / (5F^3)$$

$$q_0 = -\frac{1}{6}[(1+F)^5 + (1-F)^5], \quad q_1 = \frac{1}{6}[(1+F)^5 - (1-F)^5] \quad (1.4)$$

$$q_2 = \frac{3}{2}q_0 - [(1-F)^7 - (1+F)^7] / (28F)$$

При $F \rightarrow 0$ решение (1.4) переходит в хорошо известное решение, описывающее линейный профиль температуры и кубический профиль скорости.

Зависимость коэффициента теплопроводности от температуры приводит к асимметрии профиля скорости и температуры относительно оси слоя z . Профиль скорости мало отличается от кубического вплоть до значений $|F| = 0,7$. Более заметно отклонение распределения температуры от линейного. Легко проверить, что T_0 и V_0 обладают свойствами симметрии

$$T_0(x, F) = -T_0(-x, -F), \quad V_0(x, F) = -V_0(-x, -F)$$

2. При достаточно больших значениях числа Грасгофа стационарное течение (1.4) становится неустойчивым. Для задачи (1.2), (1.3) имеют место преобразования Сквайра. Поэтому плоские возмущения наиболее опасны и далее рассматривается плоская задача. При исследовании устойчивости стационарного конвективного движения (1.4) используется метод малых возмущений, который подробно рассмотрен в [2]. Нормальные возмущения имеют вид

$$\{\psi_1, T_1\} = \{\varphi(x), \theta(x)\} \exp(ikz - \lambda t), \quad V_{1x} = -\frac{\partial \psi_1}{\partial z}, \quad V_{1z} = \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \quad (2.1)$$

где $\varphi(x)$, $\theta(x)$ – амплитуды возмущений функции тока и температуры, k – волновое число (по z), $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$ – комплексный декремент возмущений.

Подставляя стационарное решение (1.4) с наложенными на него малыми возмущениями в уравнения движения (1.2) и ограничиваясь членами первого порядка по малым возмущениям, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для амплитуд с однородными граничными условиями

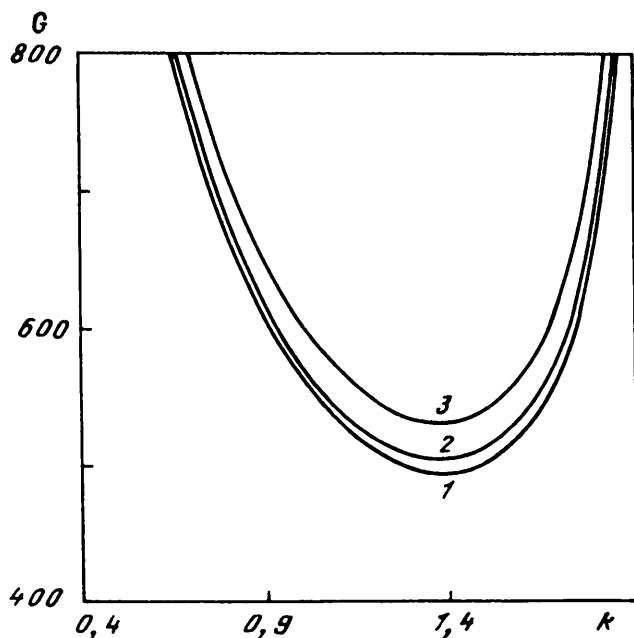
$$(\varphi'''' - 2k^2\varphi'' + k^4\varphi) + ikG[V_0'''\varphi - V_0(\varphi'' - k^2\varphi)] + \Theta' = -\lambda(\varphi'' - k^2\varphi)$$

$$\frac{1}{Pr}[(1 - FT_0)(\theta'' - k^2\theta) - 2FT_0'\theta' - FT_0\theta''] = -\lambda\theta + ikG(V_0\theta - \varphi T_0')$$

$$x = \pm 1, \quad \varphi = \varphi' = 0, \quad \theta = 0 \quad (2.2)$$

Краевая задача определяет характеристические декременты λ_r, λ_i в зависимости от параметров G, Pr, F, k . Границы устойчивости течения (1.4) находятся из условия $\lambda_r = 0$.

Для решения задачи (2.2) использовался пакет прикладных программ "Гидродинамическая устойчивость", разработанный автором. Пакет предназначен для решения тех задач линейной устойчивости течений и равновесия жидкости, которые сводятся к



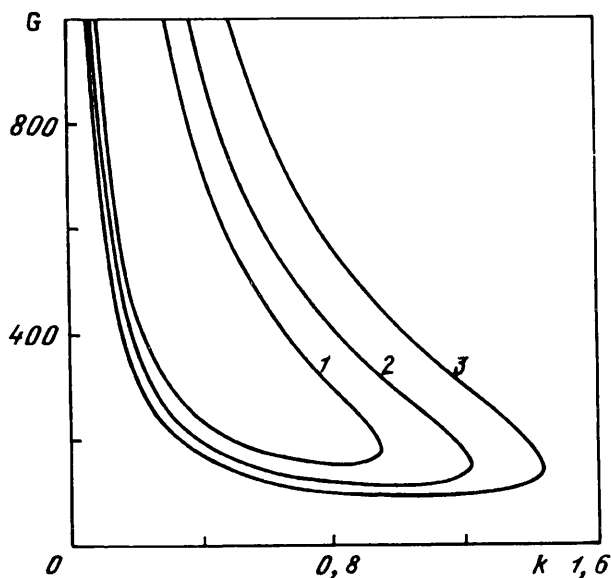
Фиг. 1. Нейтральные кривые 1, 2, 3 гидродинамической неустойчивости для разных значений коэффициента F : 0; 0,2; 0,4 соответственно ($Pr = 6,7$)

системе обыкновенных дифференциальных уравнений с краевыми условиями. Задачи решаются методом дифференциальной прогонки.

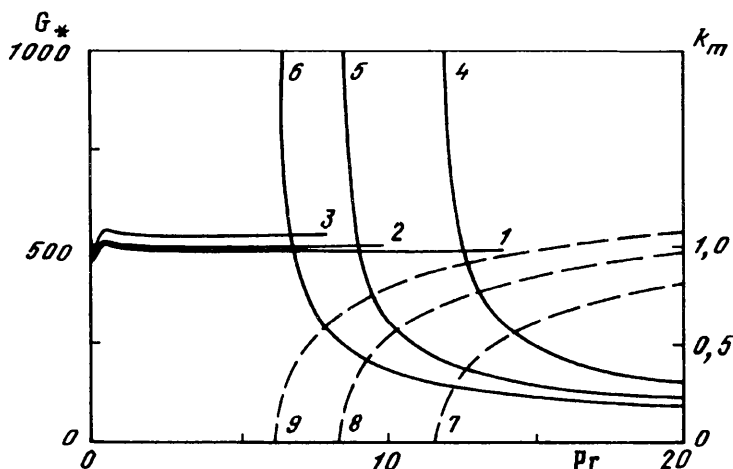
3. Обсудим результаты численных расчетов. При малых значениях числа Грасгофа ($G < G_*$) течение стационарно и имеет вид (1.4). С ростом числа Грасгофа при $G > G_*$ течение становится неустойчивым. Устойчивость основного течения для постоянного значения коэффициента теплопроводности ($F = 0$) детально исследована (обзор этих работ имеется в книге [2]). Были обнаружены два вида неустойчивости – гидродинамическая и волновая. Эти виды неустойчивости имеют место и при коэффициенте теплопроводности, линейно зависящем от температуры ($F \neq 0$).

Основные результаты вычислений представлены в виде графиков на фиг. 1, 2 и 3. Нейтральные кривые $G(k)$ для гидродинамической ($Pr = 6,7$) и волновой ($Pr = 20$) мод приведены на фиг. 1 и 2 соответственно. Кривые 1, 2, 3 соответствуют значениям коэффициента $F = 0; 0,2; 0,4$. На фиг. 3 приведены минимизированные по волновому числу k критические числа Грасгофа для гидродинамической (кривые 1, 2, 3) и волновой мод (кривые 4, 5, 6) в зависимости от числа Прандтля. Здесь же приведены соответствующие значения волнового числа k_m для волновой моды (штриховые кривые 7, 8, 9). Кривые 1, 4, 7 соответствуют значению коэффициента $F = 0$, кривые 2, 5, 8 – $F = 1/5$, кривые 3, 6, 9 – $F = 2/5$. Для гидродинамической моды волновое число, для которого G_* минимально, практически постоянно и равно 1,38 (k_m достигает максимального значения 1,4 при $Pr = 0,7 - 0,9$ и минимального 1,34 при $Pr = 0$).

Гидродинамическая мода неустойчивости существует при любых значениях числа Прандтля. Минимальное критическое число Грасгофа, как и соответствующие значения волнового числа k_m и фазовой скорости возмущений V_ϕ , во всей области изменения числа Прандтля слабо зависят от этого параметра. Слабая зависимость от числа Прандтля связана с гидродинамической природой неустойчивости. Наиболее заметно изменение критического числа Грасгофа и соответствующих ему значений k_m



Фиг. 2. Нейтральные кривые 1, 2, 3 волновой неустойчивости для разных значений коэффициента F : 0; 0,2; 0,4 соответственно ($Pr = 20$)



Фиг. 3. Зависимость критического числа Грасгофа G_* от числа Прандтля Pr для гидродинамической (кривые 1, 2, 3) и волновой (кривые 4, 5, 6) неустойчивости, а также зависимость критического волнового числа k_m от Pr для волновой неустойчивости (кривые 7, 8, 9). Кривые 1, 4, 7 соответствуют значениям коэффициента $F = 0$; кривые 2, 5, 8 – $F = 0,2$; кривые 3, 6, 9 – $F = 0,4$

и V_Φ при изменении числа Прандтля в области $Pr \leq 1$ (из (2.1) $V_\Phi = \lambda_i / k_m$ в единицах ν / d). Гидродинамическая неустойчивость развивается в виде вихрей на границе раздела встречных потоков. Вихри неподвижны, если $F = 0$. При $F \neq 0$ из-за асимметрии основного течения вихри не неподвижны: при $F > 0$ они сносятся течением вверх, при $F < 0$ – вниз. Фазовая скорость возмущений заметно зависит от коэффициента F . При $Pr > 1$ имеем

F	0	0,2	0,4
V_Φ	0	0,5632	1,065

Здесь фазовая скорость приведена в единицах v/d . Благодаря этому табличные данные годятся для целого класса задач, в которых отношение v/d одинаково. Значение фазовой скорости для конкретной задачи получается умножением табличного значения на отношение v/d . Фазовая скорость дрейфа гидродинамических возмущений относительно невелика – порядка разности максимальных скоростей восходящего и нисходящего потоков. Так как для реальных жидкостей $F \neq 0$, то в эксперименте наблюдать неподвижные вихри, по-видимому, невозможно.

Если число Прандтля $P_r \geq P_{r_0}$, то появляется волновая мода неустойчивости, которая становится наиболее опасной при $P_r \geq P_{r*}$. P_{r_0} – это точки пересечения кривых 7, 8, 9 с осью P_r . Числа P_{r*} соответствуют точкам пересечения кривых 1 и 4, 2 и 5, 3 и 6 для гидродинамической и волновой мод. P_{r_0} и P_{r*} уменьшаются с увеличением коэффициента F :

F	0	0,2	0,4
P_{r_0}	11,6	8,3	6,2
P_{r*}	12,6	9,0	6,8

Область неустойчивости основного течения (1.4) расположена выше кривых 1, 2, 3 и 4, 5, 6. Развиваются возмущения типа бегущих тепловых волн. В восходящем и нисходящем потоках вверх и вниз соответственно бегут тепловые волны. При $F = 0$ и той и другой волне соответствуют одинаковые критические числа G . При $F \neq 0$ вырождение снимается. Наиболее опасные возмущения при $F > 0$ находятся в восходящем потоке, при $F < 0$ – в нисходящем.

Расчеты в основном велись для положительных значений F . Это связано с тем, что решения задачи (2.2) обладают свойствами симметрии, которые позволяют сделать вывод о поведении решения и при отрицательных значениях F . Нетрудно проверить, что решения

$$T(x, z, F) = -T(-x, -z, -F), \quad \psi(x, z, F) = \psi(-x, -z, -F)$$

удовлетворяют уравнениям (2.2). Из этих свойств симметрии следует, что если $F < 0$, то вихри гидродинамической моды будут сноситься вниз, а тепловые волны наиболее опасны в нисходящем потоке.

Заключение. Зависимость коэффициента теплопроводности от температуры вызывает асимметрию течения относительно оси, проходящей через центр слоя. Из-за этого вихри гидродинамической моды сносятся течением, а волновая неустойчивость развивается раньше в одном из потоков – вверх или вниз, в зависимости от знака коэффициента, характеризующего зависимость теплопроводности от температуры.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Шихов В.М. Об устойчивости конвективного течения жидкости с вязкостью, зависящей от температуры // Теплофизика высоких температур. 1975. Т. 13, № 4. С. 771–778.
2. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Непомнящий А.А. Устойчивость конвективных течений. М.: Наука, 1989. 319 с.
3. Варгафтик Н.Б., Филиппов Л.П., Тарзиманов А.А., Тоцкий Е.Е. Теплопроводность жидкостей и газов. Справочные данные. М.: Изд-во стандартов, 1978. 471 с.