

УДК 533.72

© 1997 г. И.А. КУЗНЕЦОВА, А.А. ЮШКАНОВ, Ю.И. ЯЛАМОВ

СИЛЬНАЯ ДОЗВУКОВАЯ КОНДЕНСАЦИЯ ОДНОАТОМНОГО ГАЗА С УЧЕТОМ КОЭФФИЦИЕНТА ИСПАРЕНИЯ

В рамках кинетической теории решена задача о сильной дозвуковой конденсации одноатомного газа на плоской поверхности с учетом влияния коэффициента испарения α на параметры конденсации. Получены аналитические выражения и определены области допустимых значений параметров, характеризующих состояние газа за кнудсеновским слоем. Проведено сравнение полученных данных с результатами численных расчетов.

На параметры процессов испарения и конденсации материалов существенное влияние оказывают коэффициенты испарения α и аккомодации энергии q . Для воды и ряда других веществ коэффициент аккомодации q равен единице [1]. Значение коэффициента α для металлов близко к единице, в то же время для жидкостей величина α может меняться в широких пределах. Так, для воды экспериментальные данные, полученные различными методами, различаются на два порядка [1]. Анализ этих данных позволяет сделать вывод [1], что малые значения α ($\alpha \ll 1$), вероятнее всего, являются следствием экспериментальных ошибок. В [2] определяется диапазон значений α для дистиллированной воды при температуре поверхности $T_s = 20^\circ\text{C}$: $0,3 \leq \alpha \leq 1$. Как видно, α может меняться в широких пределах, поэтому для постановки соответствующих экспериментов представляет интерес численное аналитическое исследование влияния коэффициента испарения α на параметры процессов в различных режимах испарения и конденсации газа.

Задача об интенсивных испарении и конденсации газа на плоской поверхности связана с решением нелинейного уравнения Больцмана в так называемом кнудсеновском слое, примыкающем к поверхности раздела фаз и имеющем толщину порядка длины свободного пробега молекул. Внешним по отношению к слою Кнудсена является невязкое течение, описываемое уравнениями Эйлера. Условия на "внешней границе" слоя Кнудсена являются граничными условиями к уравнениям газодинамики. Для получения этих условий и установления связи между параметрами конденсированной и газовой фазы необходимо решение кинетической задачи в самом кнудсеновском слое.

Процесс конденсации в отличие от испарения описывается большим числом параметров и в этом смысле является более сложной проблемой, требующей дополнительного исследования [3, 4]. Задача о сильной конденсации одноатомного газа, т.е. когда нормальная к поверхности раздела фаз составляющая среднемассовой скорости порядка звуковой скорости, рассматривалась в ряде работ [3–9]. В большинстве работ (среди указанных см., например, [3–6]) решение уравнения Больцмана получено численными методами. В [7] использовался моментный метод с предложенным авторами анзацем для функции распределения падающих молекул, в [8] – двухпоточный моментный метод. При этом в [7] и [8] коэффициент испарения α полагался равным единице. В работе [9] применяется 13-моментное приближение. Как следует из данных [3], результаты [9] при $\alpha = 1$ подтверждаются численными расчетами только в узком диапазоне параметров. При $\alpha \neq 1$ в [9] предложены

интерполяционные зависимости для полного массового потока, полученные на основе сравнения результатов исследования с экспериментальными данными [10] по интенсивной конденсации ртуту.

В настоящей работе уравнение Больцмана решается методом полупространственных моментов. Целью работы является исследование влияния коэффициента испарения α на параметры сильной дозвуковой конденсации одноатомного газа на плоской поверхности.

1. Рассмотрим случай установившегося одномерного течения простого газа. Ось x направлена по нормали к поверхности конденсации в сторону газа. Вдали от поверхности за пределами слоя Кнудсена функция распределения имеет вид максвелловской равновесной функции распределения со средней скоростью набегающего потока u ($u < 0$)

$$f(\mathbf{v}) = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\frac{m(\mathbf{v} - \mathbf{u})^2}{2kT} \right\} \quad (1.1)$$

Здесь m – масса молекулы, k – постоянная Больцмана, n – концентрация молекул за кнудсеновским слоем, $\mathbf{v}$ – скорость молекул.

Будем предполагать, что рассеяние молекул, падающих на поверхность конденсации, носит чисто диффузный характер. В случае, когда коэффициент испарения α отличен от единицы ($0 < \alpha \leq 1$), поток молекул, летящих от поверхности ($v_x > 0$), должен состоять из собственно испарившихся молекул с функцией распределения αf_s и потока диффузно отраженных молекул с функцией распределения $(1 - \alpha)f'$. Исходя из сказанного, функцию распределения молекул, летящих от поверхности, представим в следующем виде:

$$f_0^+ = \alpha f_s + (1 - \alpha) f', \quad v_x > 0 \quad (1.2)$$

$$f_s(\mathbf{v}) = n_s \left(\frac{m}{2\pi kT_s} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\frac{mv^2}{2kT_s} \right\}, \quad f'(\mathbf{v}) = \frac{n'}{n_s} f_s$$

Здесь n' – концентрация диффузно отраженных частиц.

Выражение для функции распределения f_s учитывает тот факт, что молекулы, испущенные поверхностью, имеют максвелловское распределение с температурой, равной температуре поверхности T_s .

Функция распределения молекул газа в области формирования течения ищется в виде четырехмодальной функции

$$f(x, \mathbf{v}) = a_1^+(x) f_s^+ + a_2^+(x) f^+ + a_1^-(x) f_s^- + a_2^-(x) f^- \quad (1.3)$$

где f^+ и f^- – максвелловские функции распределения ($u \neq 0$), заданные в полупространстве ($v_x > 0$) и ($v_x < 0$) соответственно.

В (1.3) в отличие от трехмодальной аппроксимации [11] наряду с функцией распределения f_s^+ (1.1) введена функция распределения f_s^- ($v_x < 0$), что учитывает возможность для молекул, испущенных поверхностью, в результате межмолекулярных столкновений в кнудсеновском слое рассеяться назад к поверхности. Функция распределения (1.3) обладает очевидной симметрией, отсутствующей в трехмодальном представлении.

Из граничных условий (1.1) и (1.2) следует:

$$x = 0: \quad a_1^+ = \alpha + (1 - \alpha) \frac{n'}{n_s}, \quad a_2^+ = 0 \quad (1.4)$$

$$x = \infty: \quad a_1^+ = 0, \quad a_2^+ = 1, \quad a_1^- = 0, \quad a_2^- = 1$$

Концентрация диффузно отраженных частиц n'/n_s определяется из условия непроницаемости стенки для отраженных молекул:

$$\int_{v_x < 0} f^-(\mathbf{v}) v_x d\mathbf{v} + \int_{v_x > 0} f'(\mathbf{v}) v_x d\mathbf{v} = 0 \quad (1.5)$$

После соответствующих вычислений для n'/n_s получим

$$\frac{n'}{n_s} = \beta_1 - \frac{n}{n_s} \sqrt{\frac{T}{T_s}} \beta_2 [\sqrt{\pi} z \operatorname{erfc}(z) - \exp(-z^2)] \quad (1.6)$$

$$a_1^-(x=0) = \beta_1, \quad a_2^-(x=0) = \beta_2$$

В постановке задачи параметры поверхности будем считать заданными: температуру поверхности T_s , концентрацию насыщенного пара материала поверхности n_s , коэффициент испарения α . В граничное условие на внешней границе слоя Кнудсена входят три параметра: T – температура, n – концентрация и M – число Маха набегающего потока. При решении уравнения Больцмана в кнудсеновском слое в случае сильного испарения из этих трех параметров можно задавать только один, при этом предельная скорость испарения соответствует числу Маха M , равному единице [12]. В случае конденсации газ может натекал на стенку как с дозвуковой скоростью ($M < 1$), так и со сверхзвуковой ($M > 1$). В случае дозвуковой конденсации ($M < 1$) на бесконечности можно задавать любые два параметра из трех, характеризующих течение, т.е. в кнудсеновском слое должна существовать функциональная связь $F(T_s, n_s, \alpha, T, n, M) = 0$, которую требуется установить. При аналитическом решении задачи возникает вопрос об определении области допустимых значений параметров, при которых решение уравнения Больцмана существует.

2. Решение задачи ищется моментным методом. Для определения четырех неизвестных функций $a_i^\pm(x)$, $i = 1, 2$, составляется система уравнений переноса (являющаяся следствием кинетического уравнения)

$$\frac{d}{dx} \int v_x J_\mu(\mathbf{v}) f d\mathbf{v} = \int J_\mu(\mathbf{v}) I_M d\mathbf{v} \quad (2.1)$$

где I_M – интеграл столкновений, а моменты $J_\mu(v)$ – произвольные функции скорости молекул v . В качестве первых трех моментов $J_\mu(v)$, $\mu = 1, 2, 3$, берутся инварианты соударения 1, v_x , $v^2/2$, для которых правая часть (2.1) обращается в нуль. При этом полученные уравнения представляют собой условия баланса потоков массы, импульса и энергии в произвольной точке x

$$\begin{aligned} & (\sqrt{\pi} z \operatorname{erfc}(z) - \exp(-z^2)) [a_2^-(x) - a_2^+(x)] + \\ & + \frac{n_s}{n} \sqrt{\frac{T_s}{T}} [a_1^+(x) - a_1^-(x)] + 2\sqrt{\pi} z a_2^+(x) = 2\sqrt{\pi} z \\ & \left[\left(\frac{1}{2} + z^2 \right) \operatorname{erfc}(z) - \frac{z}{\sqrt{\pi}} \exp(-z^2) \right] [a_2^-(x) - a_2^+(x)] + \\ & + \frac{1}{2} \frac{n_s}{n} \frac{T_s}{T} [a_1^+(x) + a_1^-(x)] + (1 + 2z^2) a_2^+(x) = 1 + 2z^2 \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} & \left[z \left(\frac{5}{2} + z^2 \right) \operatorname{erfc}(z) - \frac{(z^2 + 2)}{\sqrt{\pi}} \exp(-z^2) \right] [a_2^-(x) - a_2^+(x)] + \\ & + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{n_s}{n} \left(\frac{T_s}{T} \right)^{3/2} [a_1^+(x) - a_1^-(x)] + 2 \left(\frac{5}{2} + z^2 \right) z a_2^+(x) = z \left(\frac{5}{2} + z^2 \right) \\ & z = u \sqrt{\frac{m}{2kT}}, \quad \operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty \exp(-m^2) dm \end{aligned}$$

Из этих уравнений при $x = 0$ с учетом соотношений (1.5), (1.7) и (1.8) получаются газодинамические граничные условия, позволяющие, например, выразить параметры

β_1 , n/n_s и β_2 через $z = \sqrt{5/6} M$, $\theta = T/T_s$ и α

$$\beta_1 = Q\beta_0 \quad (2.3)$$

$$Q = \frac{\alpha}{\alpha + (1 - \alpha)2\sqrt{\pi}z\sqrt{\theta}N_0}, \quad \beta_0 = \frac{4(\theta - 1) + \sqrt{\pi}z\sqrt{\theta}}{4(\theta - 1) - \sqrt{\pi}z\sqrt{\theta}}$$

$$\frac{n}{n_s} = QN_0 \quad (2.4)$$

$$N_0 = \left[\left(\frac{1}{2} + z^2 \right) \operatorname{erfc}(z) \exp(z^2) - \frac{z}{\sqrt{\pi}} \right] \frac{1}{\sqrt{\theta}} (1 - \beta_0) + \\ + \frac{1}{2} [1 - \sqrt{\pi}z \operatorname{erfc}(z) \exp(z^2)] \frac{1}{\theta} (1 + \beta_0) \\ \beta_2 = Q \left[(1 - \beta_0)(1 + 2z^2) - \frac{1}{\sqrt{\theta}} (1 + \beta_0) \sqrt{\pi}z \right] \frac{n_s}{n} \frac{1}{\sqrt{\theta}} \exp(z^2) \quad (2.5)$$

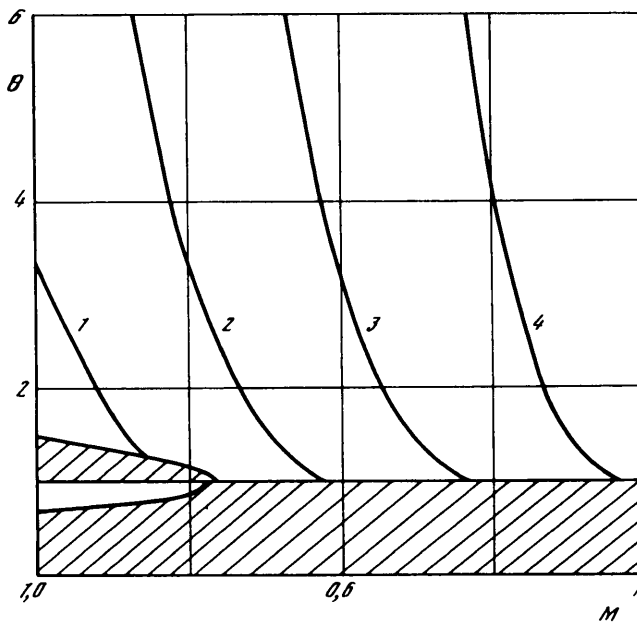
Из уравнений (2.2) после несложных преобразований получим выражения для коэффициентов $a_1^+(x)$, $a_1^-(x)$, $a_2^+(x)$ в виде зависимостей от одной неизвестной функции $y(x) = a_2^-(x) - a_2^+(x)$

$$a_1^+(x) = -\frac{1}{2}\theta \frac{n}{n_s} \left[\frac{1}{\sqrt{\theta}} \frac{z}{4} \sqrt{\pi} + \frac{1}{\theta} - 1 \right] \Psi(z) \frac{\exp(-z^2)}{\sqrt{\pi}z} y(x) \\ a_1^-(x) = \frac{1}{2}\theta \frac{n}{n_s} \left[\frac{1}{\sqrt{\theta}} \frac{z}{4} \sqrt{\pi} - \frac{1}{\theta} + 1 \right] \Psi(z) \frac{\exp(-z^2)}{\sqrt{\pi}z} y(x) \quad (2.6) \\ a_2^+(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{\Phi_2(z)}{2} - \left(\frac{1}{\theta} - 1 \right) \frac{\Phi_1(z)}{z} \right] \Psi(z) y(x) + 1 \\ \Phi_1(z) = z \operatorname{erfc}(z) - \exp(-z^2) / \sqrt{\pi} \\ \Phi_2(z) = (1/2 + z^2) \operatorname{erfc}(z) - z \exp(-z^2) / \sqrt{\pi} \\ \Psi(z) = \left(\frac{1}{\theta} - \frac{5}{4} - \frac{z^2}{2} \right)^{-1}$$

Для нахождения функции $y(x)$ образуем еще одномоментное уравнение с $J_4 = v_r^2$, для которого интегрирование правой части (2.1) в случае максвелловских молекул может быть выполнено сравнительно легко. Использование этого момента в случае стационарного испарения [11–13] даст значение предельно допустимого числа Маха M для случая стационарного испарения, отличающегося от истинного значения $M = 1$ всего на 2%.

Таким образом, $y(x)$ определяется решением нелинейного дифференциального уравнения

$$\frac{dy(X)}{dX} = -L \left\{ 1 + \frac{y(X)}{y_1} \right\} y(X) \quad (2.7)$$



Фиг. 1. Границы областей существования стационарного решения для $\alpha = 0,95; 0,9; 0,8; 0,7$ (кривые 1–4). Допустимые значения параметров θ и M при каждом α лежат выше кривых 1–4. При $\alpha = 1$ в заштрихованных областях решение отсутствует

$$L = \frac{8}{3} z \left(\frac{1}{\theta} - 1 \right)^{-1} \left(\frac{1}{\theta} + \theta - \frac{7}{4} - \frac{z^2}{2} \right)$$

$$y_1 = 3\sqrt{\pi} L \left(\frac{1}{\theta} - 1 \right) \left(\frac{1}{\theta} - \frac{5}{4} - \frac{z^2}{2} \right) \left[2 - \frac{1}{\theta} - \theta - \frac{z^2}{2} \right]^{-1} \exp(z^2)$$

$$X = 6A \sqrt{\frac{4K}{kT}} n x = \frac{x}{\lambda}$$

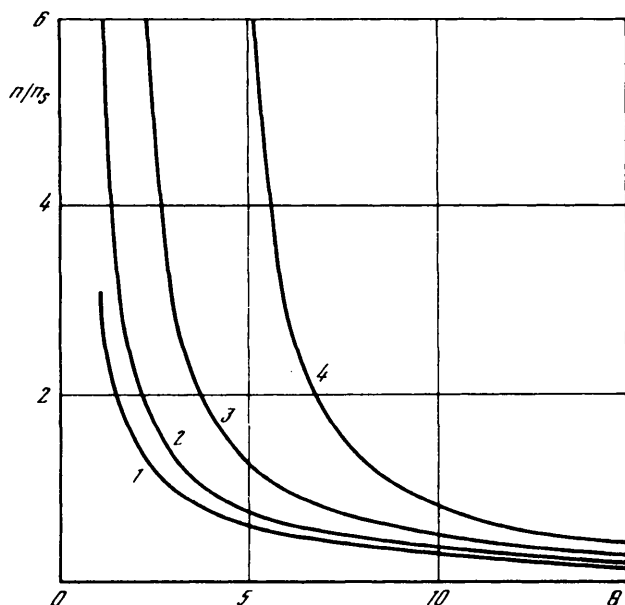
Здесь λ – длина свободного пробега молекул за кнудсеновским слоем, A и K – константы, характеризующие взаимодействие между молекулами [14].

Решение уравнения (2.7) имеет вид

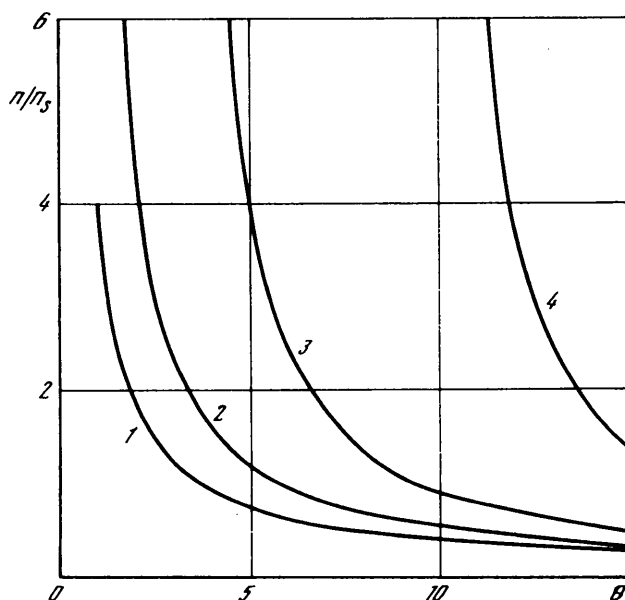
$$y(X) = \frac{y_1}{(y_1 / \beta_2 + 1) \exp(LX) - 1} \quad (2.8)$$

Полученное решение должно удовлетворять граничному условию при $x \rightarrow \infty$. Для этого необходимо потребовать, чтобы величина L была положительной: $L > 0$. Данное условие приводит к ограничению на область существования параметров M и T/T_s . На фиг. 1 области параметров, где решение (2.8) отсутствует, изображены штриховкой.

Кроме того, необходимо потребовать, чтобы было $n/n_s > 0$. При $\alpha = 1$ это условие выполняется для любых θ и M , лежащих в области существования решения. При $\alpha \neq 1$ условие $n/n_s > 0$ приводит к дополнительным ограничениям на область допустимых значений θ и M .



Фиг. 2. Граничные значения $n/n_s(\theta)$ при $M = 0,5$ для $\alpha = 1; 0,9; 0,8; 0,7$ (кривые 1–4)



Фиг. 3. Граничные значения $n/n_s(\theta)$ при $M = 0,6$ для $\alpha = 1; 0,9; 0,8; 0,7$ (кривые 1–4)

На фиг. 1 изображены границы области существования решения для $\alpha = 0,95; 0,9; 0,8; 0,7$ (кривые 1–4). Допустимые значения параметров θ и M при каждом α лежат выше кривых 1–4. С уменьшением α уменьшаются размеры области существования решения (2.8).

На фиг. 2 и 3 построены зависимости $n/n_s(\theta)$ для $M = 0,5$ (фиг. 2) и $M = 0,6$ (фиг. 3), соответствующие $\alpha = 1; 0,9; 0,8; 0,7$ (кривые 1–4).

Из графиков видно, что для каждого α характер зависимости $n/n_s(\theta)$ одинаков: с уменьшением температуры θ концентрация газа $n/n_s(\theta)$ увеличивается. Для чисел Маха $M = 0,5$ (фиг. 2) и $M = 0,6$ (фиг. 3) в случае $\alpha = 1$ (кривая 1) и 0,9 (кривая 2) допустимые значения температуры лежат в интервале $\theta > 1$ (см. фиг. 1), следовательно, при $\theta \rightarrow 1$ концентрация молекул n/n_s стремится к верхнему предельно допустимому значению: для $M = 0,5$ и $\theta \rightarrow 1$ при $\alpha = 1$ концентрация $n/n_s \rightarrow 3,100$, при $\alpha = 0,9$ $n/n_s \rightarrow 7,002$; для $M = 0,6$ и $\theta \rightarrow 1$ при $\alpha = 1$ концентрация $n/n_s \rightarrow 3,990$.

Анализ зависимостей $n/n_s(\theta)$, представленных на фиг. 2 и 3 для одинаковых значений коэффициента α , показывает, что с ростом числа Маха M кривые 1–4 сдвигаются в сторону больших значений температуры θ . Такое смещение кривых 1–4 выражено тем сильнее, чем меньше значение α .

Ниже сравниваются результаты, полученные в настоящей работе, с результатами численных расчетов методом прямого статистического моделирования [3]. Такое сравнение возможно только для случая $\alpha = 1$. Для сравнения также представлены данные, полученные моментным методом [9]:

T/T_s	1.916	2.532	1.856	1.630	2.208
M	0.533	0.894	0.786	0.928	0.914
n/n_s	1.640	3.225	3.260	5.556	3.920
n/n_s [3]	1.708	3.315	3.354	6.059	4.455
n/n_s [9]	1.711	5.137	3.228	6.133	5.492

Заключение. Результаты настоящей работы находятся в хорошем согласии с результатами прямого статистического моделирования [3] во всем рассматриваемом диапазоне параметров (максимальное отличие не превышает 12%). Показано, что α влияет не только на граничные значения параметров за кнудсеновским слоем, но и на область существования стационарного решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Неизвестный А.И. Результаты экспериментального определения коэффициента конденсации воды: Обзор. Обнинск: Изд-во ВНИИГМИ МЦД, 1976. 51 с.
2. Хирс Д., Паунд Г. Испарение и конденсация. М.: Металлургия, 1966. 196 с.
3. Абрамов А.А., Козан М.Н. Сильная дозвуковая конденсация одноатомного газа // Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 1. С. 165–169.
4. Абрамов А.А., Козан М.Н. О режиме сверхзвуковой конденсации газа // Докл. АН СССР. 1984. Т. 278. № 5. С. 1078–1081.
5. Yen S.M. Numerical solutions of the Boltzmann and Krook equations for a condensation problem // Rar. Gas Dynam. N.Y., 1981. V. 1. P. 356–362.
6. Yen S.M. Numerical solutions of nonlinear kinetic equations for a one-dimensional evaporation-condensation problem // Comput. and Fluids. 1973. V. 1. № 4. P. 367–374.
7. Ytrehus T., Alvestad J. A Mott-Smith solution for nonlinear condensation // Rar. Gas Dynam. N.Y., 1981. V. 1. P. 330–345.
8. Hatakeyama M., Oguchi H. Kinetic approach to nonlinear condensation of flowing vapor // Rar. Gas Dynam. Paris: CEA, 1979. V. 2. P. 1293–1303.
9. Labuntsov D.A., Kryukov A.P. Analysis of intensive evaporation and condensation // Intern. J. Heat and Mass Transfer. 1979. V. 22. № 7. P. 989–1002.

10. *Necmi S., Rose J.W.* Film condensation of mercury // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1976. V. 19. № 11. P. 1245–1256.
11. *Ytrehus T.* Theory and experiments on gas kinetics in evaporation // *Rar. Gas Dynam.* N.Y., 1977. V. 2. P. 1197–1212.
12. *Кузнецова И.А., Юшканов А.А., Яламов Ю.И.* Применение метода Мотт–Смита к решению задачи о сильном испарении с плоской поверхности // *Теплофизика высоких температур.* 1992. Т. 30. № 2. С. 345–350.
13. *Кузнецова И.А., Юшканов А.А.* К вопросу об интенсивном поверхностном испарении // *Теплофизика высоких температур.* 1991. Т. 29. № 5. С. 1038.
14. *Коган М.Н.* Динамика разреженного газа. Кинетическая теория. М.: Наука, 1967. 440 с.

Ярославль,
Москва

Поступила в редакцию
23.1.1996