МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 • 1997

УДК 532.69

© 1997 г. О.Ю. ДИНАРИЕВ

ТЕЧЕНИЕ В КАПИЛЛЯРЕ С ПОВЕРХНОСТНО-АКТИВНЫМИ СТЕНКАМИ. МЕТОД ФУНКЦИОНАЛА ПЛОТНОСТИ

Рассмотрено изотермическое течение однокомпонентной жидкости между плоскими параллельными стенками и в круглом капилляре с учетом поверхностных эффектов. Используется гидродинамическое описание, при котором свободная энергия системы является функционалом поля плотности. В пределе, когда поперечное сечение области течения является малым, получена система нелинейных дифференциальных уравнений для плотности и скорости. В приближении слабосжимаемой жидкости найдено решение в двух первых порядках теории возмущений.

1. В настоящей работе рассматривается установившееся изотермическое течение однокомпонентной вязкой жидкости между двумя плоскими параллельными стенками и в круглом капилляре, когда граница между жидкой и твердой фазами обладает поверхностно-активными свойствами. Поверхностные эффекты описываются в рамках метода функционала плотности, когда свободная энергия системы в отсутствие гравитационных сил задается выражением

$$F = \int\limits_{D_*} \left(\frac{1}{2} \nu n_{,a} n_{,a} + f \right) dV + \int\limits_{\Gamma} \omega dS \tag{1.1}$$

Здесь $n = n(x^a)$ – мольная плотность жидкости, $f = f(T, n)$ – плотность свободной энергии, $\nu = \nu(T, n)$ – положительный феноменологический коэффициент, D_* – пространственная область, занятая жидкостью, Γ – граница с поверхностно-активной твердой фазой, $\omega = \omega(T, n)$ – поверхностное натяжение на границе Γ. Латинские индексы a, b, c везде в работе пробегают значения 1, 2, 3, соответствуя координатам. Температура T считается фиксированной.

В состоянии равновесия распределение плотности $n = n(x^a)$ обеспечивает абсолютный минимум функционала (1.1) при заданном количестве вещества в объеме D_*

$$N = \int\limits_{D_*} n dV$$

Среды со свободной энергией (1.1) рассматривались в ряде работ [1–4]. В [1] исследовались соответствующие уравнения механики сплошной среды для анизотропной сжимаемой жидкости. В [2] на основе (1.1) были получены условия на плоском скачке. В [3] изучались законы переноса в общем виде для сплошных сред с лагранжианом, зависящим от пространственных производных. В [4] для многокомпонентных смесей было показано, что теория, основанная на функционале плотности, позволяет описать средствами механики сплошной среды широкий класс капиллярных и поверхностных явлений [5, 6].

Выражение (1.1) по заданному распределению плотности позволяет вычислить статический тензор напряжений σ^{ab}. В [4] приведено соответствующее выражение для

многокомпонентной смеси. Для однокомпонентной жидкости выражение для σ^{ab} сводится к следующему виду:

$$\sigma^{ab} = (\tfrac{1}{2}\nu_{,n} n n_{,c} n_{,c} + \nu n n_{,cc} + \tfrac{1}{2}\nu n_{,c} n_{,c} - p)\delta^{ab} - \nu n_{,a} n_{,b}, \qquad p = n f_{,n} - f \tag{1.2}$$

Здесь p – давление. Вполне естественно, что для однородной жидкости (n = const) статический тензор напряжений совпадает с тензором напряжений идеальной жидкости $\sigma^{ab} = -p\delta^{ab}$.

Полный тензор напряжений p^{ab} в движущейся вязкой жидкости складывается из статического тензора σ^{ab} и тензора вязких напряжений τ^{ab} [4]

$$p^{ab} = \sigma^{ab} + \tau^{ab} \tag{1.3}$$

$$\tau^{ab} = (\eta - (\tfrac{2}{3})\mu)\delta^{ab} v^{c}_{,c} + \mu(v^{b}_{,a} + v^{a}_{,b}) \tag{1.4}$$

где η – объемная вязкость, μ – сдвиговая вязкость.

Для установившегося изотермического течения справедливы уравнения механики сплошной среды – уравнение сохранения количества молекул и уравнение импульсов [7]

$$(n v^{a})_{,a} = 0; \qquad m n v^{b} v^{a}_{,b} = p^{ab}_{,b} \tag{1.5}$$

В (1.5) m – масса моля жидкости. Граничными условиями на поверхности твердой фазы будут [4]

$$v^{a} = 0; \qquad \frac{\partial n}{\partial l} = \omega_{,n}(x^{a} \in \Gamma) \tag{1.6}$$

Равенство (1.6), в котором l – внутренняя нормаль на границе области D_*, – следствие вариационного принципа для функционала (1.1).

Будем искать решения задачи (1.5), (1.6) при следующих упрощающих предположениях. Примем, что величины ν, η, μ, $\vartheta = \omega_{,n}$ не зависят от плотности n, а уравнение состояния линейное, что соответствует поведению слабосжимаемой жидкости

$$p = E(n - \rho_0)/\rho_0 + p_0 \tag{1.7}$$

Здесь E – постоянный объемный модуль упругости жидкости, ρ_0 – характерное для данной задачи значение плотности.

Для течений в капиллярах обычно известен внешний размер задачи L, характеризующий систему в целом, и внутренний размер r_c, характеризующий поперечное сечение капилляра. При этом $\varepsilon = r_c / L \ll 1$. По величинам ν, ϑ, описывающим поверхностные эффекты, можно рассчитать следующие величины с размерностью длины:

$$r_1 = (\nu\rho_0^2 E^{-1})^{1/2}, \qquad r_2 = \vartheta\rho_0 E^{-1}$$

Параметры r_1 и r_2 характеризуют поперечные размеры межфазных границ [4] и поверхностных слоев соответственно. Поверхностные явления становятся существенными для течений в капиллярах, когда величина r_c одного порядка с r_1, r_2. В этом случае при асимптотическом разложении по малому параметру ε необходимо положить

$$\nu = \varepsilon^2\alpha, \qquad \vartheta = \varepsilon\beta \tag{1.8}$$

где величины α, β – конечные.

Мы будем рассматривать течения в щели между параллельными стенками и в круглом капилляре. Пусть x^1 – координата вдоль оси капилляра, x^2 – поперечная

координата. Скорость имеет ненулевые компоненты $v^1 = v^1(x^1, x^2)$, $v^2 = v^2(x^1, x^2)$. Зададим перепад давления на интервале длины L

$$p(0,0) = P_0, \quad p(L,0) = P_1, \quad \Delta P = P_1 - P_0 \tag{1.9}$$

При заданном перепаде давления (1.9) будем искать главную асимптотику при $\varepsilon \to 0$ с учетом равенств (1.8). При этом введем безразмерные координаты $x = x^1 / L$, $y = x^2 / r_c$. Для неизвестных функций n, v^1, v^2 имеет место представление

$$n = \rho(x,y) + O(\varepsilon), \quad v^1 = \varepsilon^2 u(x,y) + O(\varepsilon^3), \quad v^2 = O(\varepsilon^3)$$

Определим параметр D: $D = 0$ для течения в щели, $D = 1$ для круглого капилляра. Из соотношений (1.2)–(1.8) вытекают уравнения для функций $\rho(x, y)$, $u(x, y)$

$$\frac{d}{dx}\int_0^1 \rho u y^D dy = 0$$

$$0 = \left[\alpha \frac{\rho}{y^D}(y^D \rho_{,y})_{,y} - E\frac{\rho}{\rho_0}\right]_{,y} - \frac{\alpha}{2y^{2D}}(y^{2D}\rho_{,y}^2)_{,y} \tag{1.10}$$

$$0 = \left(\alpha \frac{\rho}{y^D}(y^D \rho_{,y})_{,y} - E\frac{\rho}{\rho_0}\right)_{,x} - \alpha\frac{\rho_{,x}}{y^D}(y^D\rho_{,y})_{,y} + \frac{1}{y^D}(y^D \mu u_{,y})_{,y}$$

и граничные условия на поверхности контакта с твердой фазой

$$\alpha\rho_{,y} = \pm\beta, \quad u = 0 \tag{1.11}$$

2. Пусть имеется установившееся течение между плоскими параллельными стенками, расположенными на расстоянии $(2r_c)$ друг от друга.

Задача (1.9)–(1.11) допускает явное решение, если использовать приближение слабосжимаемой жидкости. В этом случае величины $|(\rho - \rho_0)/\rho_0|$ считаются малыми, и искомые функции представляются в виде рядов по порядку малости

$$\rho = \rho_0 + \rho_1 + \rho_2 + \ldots, \quad u = u_1 + u_2 + \ldots. \tag{2.1}$$

При этом величины $\delta_1 = (P_1 - p_0)E^{-1}\rho_0$ считаются первого порядка малости.

В первом порядке задача (1.9)–(1.11) приводится к виду

$$\rho_1(0,0) = \delta_0, \quad \rho_1(1,0) = \delta_1 \tag{2.2}$$

$$\frac{d}{dx}\int_{-1}^{1} \rho_0 u_1 dy = 0 \tag{2.3}$$

$$0 = \left(\alpha\rho_0\rho_{1,yy} - E\frac{\rho_1}{\rho_0}\right)_{,y} \tag{2.4}$$

$$0 = \left(-E\frac{\rho_1}{\rho_0} + \alpha\rho_0\rho_{1,yy}\right)_{,x} + \mu u_{1,yy} \tag{2.5}$$

$$\alpha\rho_{1,y} = -\beta, \quad u_1 = 0, \quad y = 1; \quad \alpha\rho_{1,y} = \beta, \quad u_1 = 0, \quad y = -1 \tag{2.6}$$

Из (2.4), (2.6) находим выражение для возмущений плотности

$$\rho_1 = -\frac{\rho_0}{E}\Psi_1 + a_1 \operatorname{ch}\lambda y, \quad \lambda = \frac{1}{\rho_0}\sqrt{\frac{E}{\alpha}}, \quad a_1 = -\frac{\beta}{\lambda\alpha \operatorname{sh}\lambda} \tag{2.7}$$

где $\Psi_1 = \Psi_1(x)$ – неизвестная функция. Далее, из (2.5), (2.6) определяем профиль скорости

$$u_1 = \frac{1}{2\mu}\Psi_{1,x}(1-y^2) \tag{2.8}$$

Отсюда находим выражение для расхода в первом порядке

$$Q_1 = \int_{-1}^{1} \rho_0 u_1 dy = \frac{2}{3\varkappa}\Psi_{1,x}, \qquad \varkappa = \frac{\rho_0}{\mu}$$

где $\varkappa$ – кинематическая вязкость.

Теперь из (2.2), (2.3) легко найти функцию $\Psi_1(x)$

$$\Psi_1(x) = -\Delta P x + p_0 - P_0 + \frac{E}{\rho_0}a_1 \tag{2.9}$$

$$\Delta P = P_1 - P_0$$

Таким образом, в низшем порядке теории возмущений для скорости течения и расхода получаются такие же выражения, как и для течения Пуазейля вязкой несжимаемой жидкости.

Рассмотрим второй порядок теории возмущений

$$\rho_2(0,0) = 0, \qquad \rho_2(1,0) = 0 \tag{2.10}$$

$$\frac{d}{dx}\int_{-1}^{1}(\rho_0 u_2 + \rho_1 u_1)dy = 0 \tag{2.11}$$

$$0 = \Psi_{2,y} \tag{2.12}$$

$$\Psi_2 = -\frac{1}{2}\alpha\rho_{1,y}\rho_{1,y} + \alpha\rho_0\rho_{2,yy} + \alpha\rho_1\rho_{1,yy} - E\frac{\rho_2}{\rho_0}$$

$$0 = \alpha(\rho_{1,xy}\rho_{1,y} - \rho_{1,x}\rho_{1,yy}) + \Psi_{2,x} + \mu u_{2,yy} \tag{2.13}$$

$$\rho_{2,y} = 0, \qquad u_2 = 0, \qquad y = \pm 1 \tag{2.14}$$

Из соотношений (2.12), (2.14) находим возмущения плотности во втором порядке теории возмущений

$$\rho_2 = -\rho_0(E^{-1}\Psi_2 + b_1\Psi_1 y \operatorname{sh}\lambda y + b_2 \operatorname{ch} 2\lambda y + b_3) \tag{2.15}$$

$$b_1 = -\frac{\beta}{2E\alpha \operatorname{sh}\lambda}$$

$$b_2 = -\frac{1}{12}b, \qquad b_3 = -\frac{3}{4}b, \qquad b = \frac{\beta^2}{\rho_0\lambda^2\alpha^2 \operatorname{sh}^2\lambda}$$

Используя выражение (2.7), из соотношений (2.13), (2.14) находим возмущения профиля скорости

$$u_2 = \frac{1}{2\mu}\Psi_{2,x}(1-y^2) + z_1\Psi_{1,x}(\operatorname{ch}\lambda y - \operatorname{ch}\lambda) \tag{2.16}$$

$$z_1 = \frac{\beta}{\varkappa E\lambda \operatorname{sh}\lambda}$$

На основе выражений (2.7), (2.8), (2.16) можно вычислить поправку к расходу

$$Q_2 = \int_{-1}^{1} (\rho_0 u_2 + \rho_1 u_1) dy = \frac{2}{3\varkappa}\left(\Psi_{2,x} + \zeta_1 \Psi_{1,x} - \frac{1}{E}\Psi_1 \Psi_{1,x}\right) \tag{2.17}$$

$$\zeta_1 = 6\beta\rho_0 \frac{\operatorname{sh}\lambda - \lambda \operatorname{ch}\lambda}{E\lambda^2 \operatorname{sh}\lambda}$$

Теперь из соотношений (2.10), (2.11), (2.15) можно вычислить функцию $\Psi_2(x)$

$$\Psi_2 = \chi_0 + \chi_1 x + \chi_2 x^2$$

$$\chi_0 = E(b_2 + b_3), \quad \chi_1 = -\frac{\Delta P^2}{2E}, \quad \chi_2 = \frac{\Delta P^2}{2E}$$

Окончательное выражение для поправки (2.17) к расходу

$$Q_2 = -\frac{2}{3\varkappa}\Delta P\left(\frac{1}{2E}(P_0 + P_1 - 2p_0) + \zeta_1 - \frac{a_1}{\rho_0}\right)$$

Эта поправка может быть отрицательной или положительной в зависимости от знака и величины параметров ζ_1, a_1.

3. Рассмотрим течение в круглом капилляре радиуса r_c. Как и в разд. 2, воспользуемся приближением слабосжимаемой жидкости. Используя разложение в ряды (2.1), выводим из соотношений (1.9)–(1.11) систему уравнений для определения неизвестных функций в первом приближении

$$\frac{d}{dx}\int_0^1 \rho_0 u_1 y dy = 0 \tag{3.1}$$

$$0 = \left[\alpha \frac{\rho_0}{y}(y\rho_{1,y})_{,y} - E\frac{\rho_1}{\rho_0}\right]_{,y} \tag{3.2}$$

$$0 = \left(\alpha \frac{\rho_0}{y}(y\rho_{1,y})_{,y} - E\frac{\rho_1}{\rho_0}\right)_{,x} + \frac{1}{y}(y\mu u_{1,y})_{,y} \tag{3.3}$$

$$\rho_1(0,0) = \delta_0, \quad \rho_1(1,0) = \delta_1 \tag{3.4}$$

$$\alpha\rho_{1,y} = -\beta, \quad u_1 = 0, \quad y = 1 \tag{3.5}$$

$$\rho_{1,y} = 0, \quad u_{1,y} = 0, \quad y = 0 \tag{3.6}$$

Из (3.2), (3.3), (3.5), (3.6) находим плотность и скорость в первом порядке теории возмущений

$$\rho_1 = -\frac{\rho_0}{E}\Psi_1 + a_2 I_0(\lambda y), \quad a_2 = \frac{\beta}{\alpha\lambda I_1(\lambda)} \tag{3.7}$$

$$u_1 = \frac{1}{4\mu}\Psi_{1,x}(1 - y^2) \tag{3.8}$$

где $\Psi_1 = \Psi_1(x)$ – неизвестная функция, $I_j(\xi)$ – модифицированные функции Бесселя [8]. Из (3.8) вычислим расход в первом порядке теории возмущений

$$Q_1 = 2\pi \int_0^1 \rho_0 u_1 y dy = \frac{1}{8\varkappa}\pi\Psi_{1,x}$$

Из соотношений (3.1), (3.5) для функции $\Psi_1(x)$ вытекает формула, аналогичная (2.10)

$$\Psi_1(x) = -\Delta P x + p_0 - P_0 + E\frac{a_2}{\rho_0}$$

а величина Q_1 совпадает со значением для течения Пуазейля [9]. Рассматривая второй порядок теории возмущений, получаем из (1.9)–(1.11) систему уравнений

$$\frac{d}{dx}\int_0^1 (\rho_0 u_2 + \rho_1 u_1) y dy = 0 \tag{3.9}$$

$$0 = \Psi_{2,y} \tag{3.10}$$

$$\Psi_2 = \frac{\alpha\rho_0}{y}(y\rho_{2,y})_{,y} - E\frac{\rho_2}{\rho_0} + \frac{E\rho_1^2}{2\rho_0^2}$$

$$0 = \Psi_{2,x} - \alpha\rho_{1,x}(y\rho_{1,y})_{,y} + \frac{\mu}{y}(yu_{2,y})_{,y} \tag{3.11}$$

$$\rho_2(0, 0) = 0, \quad \rho_2(1, 0) = 0 \tag{3.12}$$

$$\rho_{2,y} = 0, \quad u_2 = 0, \quad y = 1; \quad \rho_{2,y} = 0, \quad u_{2,y} = 0, \quad y = 0 \tag{3.13}$$

Чтобы найти функцию ρ_2, воспользуемся равенством

$$I_0(\xi)^2 = \pi^{-1}\int_0^\pi I_0(2\xi\sin\varphi)d\varphi \tag{3.14}$$

которое является непосредственным следствием формулы № 7.7.13 из работы [8]. Введем в рассмотрение функцию

$$H(y) = \frac{1}{\pi}\text{V.p.}\int_0^\pi \frac{I_0(2\lambda y\sin\varphi)}{4\sin^2\varphi - 1}d\varphi$$

Тогда из (3.10), (3.13), (3.14) находим второе приближение для плотности

$$\rho_2 = \rho_0(-E^{-1}\Psi_2 + c_1\Psi_1^2 + (c_2 y I_1(\lambda y) + c_3 I_0(\lambda y))\Psi_1 + c_4 I_0(\lambda y) + c_5 H(y)) \tag{3.15}$$

$$c_1 = \frac{1}{2E^2}, \quad c_2 = -\frac{\beta}{2E\rho_0\alpha I_1(\lambda)}$$

$$c_3 = -\frac{\beta I_0(\lambda)}{2I_1(\lambda)^2 E\alpha\rho_0\lambda}, \quad c_4 = -\frac{\beta^2 H_{,y}(1)}{2\rho_0^2\lambda^3\alpha^2 I_1(\lambda)}$$

$$c_5 = -\frac{\beta^2}{2\rho_0^2\lambda^2\alpha^2 I_1(\lambda)}$$

где $\Psi_2 = \Psi_2(x)$ – неизвестная функция. Далее, из (3.11), (3.13) находим поправку к полю скорости

$$u_2 = \frac{1}{4\mu}\Psi_{2,x}(1 - y^2) + z_2\Psi_{1,x}(I_0(\lambda y) - I_0(\lambda))$$

$$z_2 = -\frac{\beta}{\varkappa\lambda E I_1(\lambda)}$$

С учетом (3.7), (3.8) несложно рассчитать поправку к расходу

$$Q_2 = \frac{\pi}{8\varkappa}\left(\Psi_{2,x} + \zeta_2\Psi_{1,x} - \frac{1}{E}\Psi_1\Psi_{1,x}\right)$$

$$\zeta_2 = -\frac{\beta\rho_0}{I_1(\lambda)E\lambda} + \frac{8\beta I_2(\lambda)}{\rho_0\alpha\lambda I_1(\lambda)\lambda^2}$$

Используя соотношения (3.9), (3.12), (3.15), вычисляем функцию $\Psi_2(x)$

$$\Psi_2 = \chi_0 + \chi_1 x + \chi_2 x^2$$

$$\chi_0 = E\left(c_1\left(-P_0 + \frac{Ea_2}{\rho_0}\right)^2 + c_3\left(-P_0 + \frac{Ea_2}{\rho_0}\right) + c_4 + c_5 H(0)\right)$$

$$\chi_1 = -\frac{\Delta P^2}{2E} + E\Delta P\left(c_1\left((P_0 + P_1 - 2p_0) - \frac{Ea_2}{\rho_0}\right) - c_3\right)$$

$$\chi_2 = \frac{\Delta P^2}{2E}$$

Подставляя это выражение в формулу для поправки к расходу, получаем

$$Q_2 = -\frac{\pi}{8\varkappa}\Delta P\left(Ec_3 + \zeta_2 - \frac{a_2}{2\rho_0}\right)$$

Таким образом, при течении в капиллярах и узких щелях с поверхностно-активными стенками возникают поправки к формулам Пуазейля. Их удается вычислить в явном виде в приближении слабосжимаемой жидкости.

4. Оценим численно возможную величину поправок к формуле Пуазейля. Поправочные члены могут быть двух типов. Относительный вклад данного типа при переходе к размерным переменным характеризуется параметрами π_1 и π_2

$$\pi_1 = |\vartheta|\rho_0 E^{-1} r_c^{-1}, \qquad \pi_2 = |\vartheta|\nu\rho_0^3 E^{-2} r_c^{-3}$$

Примем оценки

$$E \approx 2\cdot 10^9 \text{ Па}, \qquad |\vartheta|\rho_0 \approx 200 \text{ Па м} \tag{4.1}$$

Последняя оценка соответствует, например, значениям

$$|\omega| \approx 0{,}1 \text{ Нм}^{-1}, \qquad \left|\frac{d\ln\omega}{d\ln p}\right| \approx 10^{-1} \tag{4.2}$$

Используя (4.1), получаем $\pi_1 \approx 10^{-7} r_c^{-1}$, где r_c измеряется в м.

Таким образом, вклад соответствующих членов становится существенным при значениях $r_c \approx 10^{-6}$ м и ниже. При этом поправки к расходу становятся порядка 10% и выше. Конечно, эффект сильно зависит от оценок (4.2). Изменение величин (4.2) на порядок в ту или иную сторону приводит к изменению поправки в ту же сторону на два порядка. Если поправка становится сравнимой с расходом в течении Пуазейля, то использованное в работе приближение теряет силу.

Чтобы найти значение параметра π_2, оценим величину ν, которую можно связать с поверхностным натяжением σ при парожидкостном равновесии [4]: $\nu \approx \sigma^2\rho_0^{-2}\varphi^{-1}$. Здесь φ – положительная величина с размерностью давления, характеризующая среднее отклонение свободной энергии от линейной функции в области фазового перехода. Выразим эту функцию в долях атмосферного давления $\varphi = (10^5 \text{ Па})\varphi_*$ и примем

$\sigma \approx 0{,}02$ Нм$^{-1}$. Используя, как и раньше, (4.1), получаем $\pi_2 \approx 2 \cdot 10^{-25} r_c^{-3} \varphi_*^{-1}$, где r_c измеряется в м.

Результат сильно зависит от величины φ_*. Например, если $\varphi_* \approx 10^{-3}$, что бывает при достаточной близости к критической точке, поправки к формуле Пуазейля от членов этого типа становятся заметными при $r_c \approx 10^{-7}$ м и ниже.

Заключение. Поверхностное взаимодействие между жидкостью и неподвижной фазой может приводить к нарушению пуазейлевского характера течения и существенному влиянию на расход. Эффект проявляется в достаточно тонких капиллярах, в которых, однако, сохраняются условия применимости гидродинамического описания. Оценки дают размеры капилляров, имеющие место на практике в ряде процессов химической технологии и при фильтрации нефти и конденсата в призабойных зонах скважин на месторождениях жидких углеводородов. Конечно, в природных пористых материалах геометрия капилляров очень далека от идеальных щелей или труб, для которых можно провести полное аналитическое исследование. Для реальных капилляров полученные выше результаты позволяют оценить величину и знак эффекта и в том случае, когда эффект значителен, влиять на течение посредством управления поверхностными свойствами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Эглит М.Э.* Одно обобщение модели идеальной сжимаемой жидкости // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 2. С. 351–354.
2. *Трускиновский Л.М.* Равновесные межфазные границы // Докл. АН СССР. 1982. Т. 265. № 2. С. 306–310.
3. *Желнорович В.А.* О получении уравнений состояния при помощи вариационного уравнения // Докл. АН СССР. 1991. Т. 316. № 5. С. 1092–1096.
4. *Динариев О.Ю.* О гидродинамическом описании многокомпонентной многофазной смеси в узких порах и тонких слоях // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 5. С. 776–783.
5. *Дерягин Б.В., Чураев Н.В., Муллер В.М.* Поверхностные силы. М.: Наука, 1985. 399 с.
6. Capillarity today // Lecture notes in physics. V. 386. Berlin: Springer, 1991. 384 p.
7. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1973. 536 с.
8. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. Т. 2. М.: Наука, 1974. 295 с.
9. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1973. 584 с.

Москва

Поступила в редакцию
10.XI.1995