

УДК 532.527.013.4

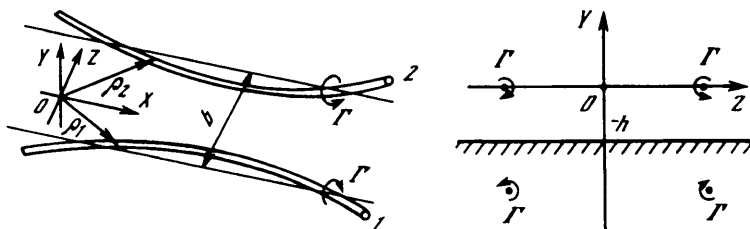
© 1997 г. Н.В. КОРНЕВ

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ И НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА КОНЦЕВЫХ ВИХРЕЙ НАД ТВЕРДОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ В ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Рассматривается неустойчивость концевых вихрей вблизи твердой стенки в идеальной жидкости. С помощью линейной теории устойчивости исследована динамика трехмерных возмущений и в зависимости от высоты расположения вихрей обнаружены три этапа развития неустойчивости. Нелинейные стадии развития возмущений исследованы с помощью численного метода вихревых частиц.

1. Линейная теория устойчивости концевых вихрей над твердой поверхностью. Рассмотрим два концевых вихревых жгута L_m , $m = 1, 2$, равной, но противоположной по знаку циркуляции Γ (фиг. 1) над твердой поверхностью (экраном). Взаимная индукция концевых вихрей приводит к опусканию вихрей в вертикальном направлении, которое при малых высотах полета h вследствие влияния стенки незначительно. Воздействие стенки на малых высотах полета h вызывает отклонение вихрей в боковом направлении. В данном анализе этот фактор не учитывается и в дальнейшем будет показано, что он несущественно сказывается на результатах. Поэтому анализ линейной устойчивости проводится для модельной задачи, в которой два спутных вихря расположены в плоскости, параллельной экрану, на высоте h , и расстояние между вихрями равно b . Рассматриваются процессы распада вихревого следа в дальнем поле и пренебрегается индукцией крыла, генерирующего спутные вихри. Экран будем учитывать методом зеркального отражения. Скорость, индуцированная в произвольной точке $\rho_n = x_n \mathbf{i} + y_n \mathbf{j} + z_n \mathbf{k}$ n -го вихревого шнура, определяется законом Био – Савара

$$\mathbf{U}_n = \frac{\Gamma}{4\pi} \sum_{m=1}^2 (-1)^m \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\rho_m - \rho_n)}{|\rho_m - \rho_n|^3} \frac{\partial \rho_m}{\partial x_m} dx_m - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\rho_m - 2kh - 2k(\rho_m \mathbf{k}) - \rho_n)}{|\rho_m - 2kh - 2k(\rho_m \mathbf{k}) - \rho_n|^3} \left(\frac{\partial \rho_m}{\partial x_m} - 2k \frac{\partial(\rho_m \mathbf{k})}{\partial x_m} \right) dx_m \right] \quad (1.1)$$



Фиг. 1. Расположение концевых вихревых жгутов над экраном

Сообщим вихревой системе малые возмущения

$$\begin{aligned}\rho_m &= \rho_m^0 + \delta\rho_m, \quad \delta\rho_m = \eta_m j + \zeta_m \mathbf{k} \\ \frac{\zeta_m}{b} &\ll 1, \quad \frac{\eta_m}{b} \ll 1, \quad \left| \frac{\partial \delta\rho_m}{\partial x_n} \right| \ll 1\end{aligned}\quad (1.2)$$

Подставив (1.2) в (1.1), получим выражение для линейной по возмущениям части приращения скорости

$$\begin{aligned}\delta U_n &= \frac{\Gamma}{4\pi} \sum_{m=1}^2 (-1)^m \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\delta\rho_m - \delta\rho_n)}{|\rho_m^0 - \rho_n^0|^3} \frac{\partial \rho_m^0}{\partial x_m} dx_m - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\delta\rho_m - 2\mathbf{k}\zeta_m - \delta\rho_n)}{|\rho_m^0 - 2\mathbf{k}h - \rho_n^0|^3} \frac{\partial \rho_m^0}{\partial x_m} dx_m + \right. \\ &+ \sum_{s=1}^2 (-1)^{(s+1)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\rho_m^0 - \rho_n^0 - 2\mathbf{k}hb_s)}{|\rho_m^0 - \rho_n^0 - 2\mathbf{k}hb_s|^3} \left(\frac{\partial \eta_m}{\partial x_m} \mathbf{j} + (-1)^{(s+1)} \frac{\partial \zeta_m}{\partial x_m} \mathbf{k} \right) dx_m + \\ &+ 3 \sum_{s=1}^2 (-1)^s \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\rho_m^0 - \rho_n^0 - 2\mathbf{k}hb_s)}{|\rho_m^0 - \rho_n^0 - 2\mathbf{k}hb_s|^5} \left(\mathbf{i}(1-b_s) + b_s \frac{\partial \rho_m^0}{\partial x_m} \right) ((\delta\rho_m - \delta\rho_n - 2\mathbf{k}b_s \zeta_m) \times \\ &\times (\rho_m^0 - \rho_n^0 - 2\mathbf{k}hb_s)) dx_m \Big], \quad b_1 = 0, \quad b_2 = 1\end{aligned}\quad (1.3)$$

Линеаризованное уравнение эволюции возмущений имсет вид [1]

$$\frac{\partial \delta\rho_n}{\partial t} + U_n \frac{\partial \delta\rho_n}{\partial x_n} = \delta U_n \quad (1.4)$$

Подставляя (1.2), (1.3) в (1.4), получаем интегродифференциальное уравнение для эволюции возмущений, которое из-за громоздкости здесь не приводится. Рассмотрим экспоненциальное решение этого уравнения вида $\delta\rho_n(x, t) = \delta\rho_n^* e^{at + ikx_n}$. В результате предполагаемой экспоненциальной формы решения интегродифференциальное уравнение эволюции возмущений сводится к системе линейных алгебраических уравнений для компонент вектора $\delta\rho_n^*$, $n = 1, 2$

$$(A + \alpha I)B = 0 \quad (1.5)$$

$$B = (\eta_1^*, \eta_2^*, \zeta_1^*, \zeta_2^*), \quad A = \{a_{ij}\}, \quad \alpha = 2\pi ab^2 / \Gamma$$

$$a_{11} = 4H(1 + 4H^2), \quad a_{12} = -6H\chi_0(\sqrt{1 + 4H^2})$$

$$a_{13} = -\beta^2\omega - \psi(2H) + \frac{1}{4H^2} + 12H^2\chi_0(2H) - \frac{4H^2}{1 + 4H^2} - 2\frac{4H^2}{(1 + 4H^2)^2}$$

$$a_{14} = \psi(1) + \psi(\sqrt{1 + 4H^2}) - 12H^2\chi_0(\sqrt{1 + 4H^2})$$

$$a_{31} = \omega\beta^2 - \psi(2H) + \frac{1}{4H^2} - \frac{2 + 4H^2}{1 + 4H^2} + \frac{2}{(1 + 4H^2)^2}$$

$$a_{32} = -\psi(1) + \psi(\sqrt{1 + 4H^2}) - 3\chi_0(\sqrt{1 + 4H^2}) + 3\chi_0(1)$$

$$a_{21} = -a_{12}, \quad a_{22} = -a_{11}, \quad a_{23} = -a_{14}, \quad a_{24} = -a_{13}, \quad a_{33} = -a_{11}, \quad a_{34} = a_{12}$$

$$a_{41} = -a_{32}, \quad a_{42} = -a_{31}, \quad a_{43} = -a_{34}, \quad a_{44} = -a_{33}$$

$$\omega(\delta) = \int_{\delta}^{\infty} \frac{\cos x + x \sin x - 1}{x^3} dx, \quad \chi_0(\beta, y) = \int_0^{\infty} \frac{\cos \beta x}{(x^2 + y^2)^{5/2}} dx$$

$$\chi(\beta, y) = \int_0^{\infty} \frac{\cos \beta x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dx, \quad \psi(\beta, y) = \int_0^{\infty} \frac{\cos \beta x + \beta x \sin \beta x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dx$$

где $\beta = kb$ – безразмерное волновое число, I – единичная матрица, δ – безразмерное расстояние среза, введенное для учета самоиндукции вихрей, $H = h/b$. Согласно [1], $\delta = 0,321c\beta/h$, где c – диаметр вихревого жгута. Из единственности решения уравнений (1.5) находятся значения безразмерного коэффициента усиления α .

В случае $H \rightarrow \infty$ уравнения (1.5) переходят в аналогичные уравнения, полученные в [1]. В этом случае можно скомбинировать собственные векторы $\delta \mathbf{p}_n$, представив суммарное движение состоящим из набора симметричных и несимметричных относительно диаметральной плоскости движений. Доминирующей неустойчивостью оказывается длинноволновое симметричное колебание [1]. Для крыла эллиптической формы в плане были получены следующие величины: $\beta = 0,73$, $\alpha = 0,83$, $L = 8,6b$. Возмущенные вихри располагаются на фиксированных плоскостях, наклоненных к горизонтали под углом $\vartheta \approx 48^\circ$.

При $H \rightarrow 0$ система (1.5) асимптотически стремится к системе

$$\alpha \eta_1^* + a_{13} \zeta_1^* = 0, \quad \alpha \eta_2^* + a_{24} \zeta_2^* = 0$$

$$a_{31} \eta_1^* + \alpha \zeta_1^* = 0, \quad a_{42} \eta_2^* + \alpha \zeta_2^* = 0 \quad (1.6)$$

$$a_{13} = -\omega \beta^2 - \psi(2H) + 1/4H^2 + 12H^2 \chi_0(2H)$$

$$a_{31} = \omega \beta^2 - \psi(2H) + 1/4H^2$$

Как видно из (1.6), влияние концевых жгутов друг на друга при $H \rightarrow 0$ исчезает. Неустойчивость определяется взаимодействием с зеркальными вихрями. Повсюду при $H \rightarrow 0$ и $c/(2b) < H$ плоскости, содержащие любое максимально неустойчивое колебание, наклонены к горизонтали под углом примерно 42° . При $H \rightarrow 0$ размерный максимальный коэффициент усиления возмущений a стремится к бесконечности как $\sim 1/H^2$.

В промежуточной зоне $0 < H < \infty$ при реальных значениях c существует несколько экстремумов в зависимости $\alpha(\beta)$ (фиг. 2). В дальнейшем под $\alpha(\beta)$ понимается максимальное для данного β вещественное значение собственного числа. При больших H в области низкочастотных возмущений появляется максимум (штриховая линия), соответствующий взаимодействию концевых вихрей с зеркальной системой. Собственное число α системы (1.5) и собственный вектор, соответствующие этому максимуму, являются комплексными и между компонентами собственного вектора существует разность фаз. С уменьшением H этот максимум растет и смещается в сторону высокочастотных колебаний.

Неустойчивость, соответствующая этому максимуму, представляет собой раскручивающийся спиралевидный вихрь. Максимум вещественного решения соответствует колебательному движению вихря в наклонных плоскостях. При уменьшении H этот максимум смещается в сторону коротких волн и при $H \sim 0,5$ вырождается, затем вновь растет и при $H < 0,438$ начинает доминировать. В диапазоне $0,438 < H < 0,575$ преобладает максимум комплексного решения. При $H = 0,5$ в зоне длинноволновых возмущений рождается второй максимум вещественного решения. При снижении H этот максимум растет и смещается к коротким волнам. При $H < 0,3$ существует только один экстремум, соответствующий вещественному собственному числу.

возмущений в этой зоне максимальна. Вихревой след крыла $\lambda = 4$ разрушается в симметричные волны длиной около $2,6b$ при $H = 0,4$, что почти в 3,3 раза короче, чем волны неустойчивости за самолетом [1]. Масштаб времени неустойчивости в 6 раз меньше соответствующего масштаба времени неустойчивости следа за крылом самолета и при $H \sim 0$ может быть сравним с масштабом времени сворачивания вихревой пелены.

При высоте $H = 0,4$ для крыла характерного для экранопланов удлинения $\lambda = 4$, движущегося со скоростью 100 м/с, боковая скорость частицы вихревого шнура составляет примерно 0,03 м/с. Таким образом, через 60 с (экспериментальное время распада следа за самолетом В-47 [1]) боковое расхождение вихрей составит 1,8 м. Следовательно, предполагая концевые вихри взаимно параллельными, допускаем ошибку не более $0,02^\circ$. При меньших H боковой снос может быть значительным. Но в этой зоне неустойчивость определяется взаимодействием с экраном и боковое отклонение вихрей не имеет значения. Таким образом, допущения линейного анализа можно считать обоснованными.

В промежуточной узкой зоне $0,438 < H < 0,575$ имеет место спиралевидная неустойчивость вихря. Эта зона является буферной зоной между двумя типами решения, двумя типами распада вихревых следов над экраном. Рост возмущений в буферной зоне минимален (фиг. 2). Как следует из проведенных систематических расчетов, величина диаметра шнура в реальном диапазоне его изменения слабо влияет на результаты.

2. Нелинейная динамика концевых вихрей над экраном. Линейная теория устойчивости не может описать полную картину процесса эволюции возмущений в сложных системах. Поэтому для оценки поведения вихрей при конечных возмущениях выполнено исследование нелинейной неустойчивости вихревых шнуров с помощью численного метода вихревых частиц-вortexов.

Из уравнений переноса завихренности и траектории жидких частиц может быть получена следующая численная схема, определяющая динамику вихревых частиц в идеальной жидкости [6]:

$$\boldsymbol{\omega}(t + \Delta t, \mathbf{X}) = \boldsymbol{\omega}(t, \mathbf{X}) + (\boldsymbol{\omega}(t, \mathbf{X}) \nabla) \mathbf{v}(t, \mathbf{X}) \Delta t \quad (2.1)$$

$$\mathbf{r}(t + \Delta t) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{v}(t) \Delta t \quad (2.2)$$

где $\boldsymbol{\omega}$ – вектор завихренности, Δt – шаг по времени, $\mathbf{X}$ – лагранжева координата жидкой частицы, $\mathbf{v}$ – скорость частицы. Вихревые трубки заменим совокупностью M сферических вихревых частиц-вortexов с радиальным распределением завихренности

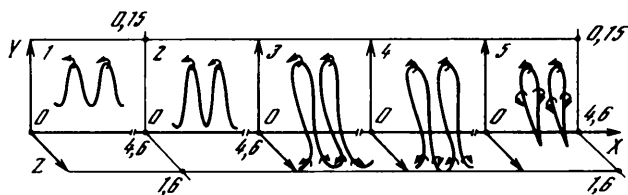
$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_\alpha e^{-r^3/\sigma^3} \quad (2.3)$$

где $\boldsymbol{\omega}_\alpha$ – значение $\boldsymbol{\omega}$ в центре частицы, σ – радиус ядра распределения (радиус вихревой трубки), r – радиус-вектор, отсчитываемый от центра частицы.

Уравнения (2.1)–(2.2) для частиц-вortexов имеют вид

$$\begin{aligned} \Gamma_j(t + \Delta t) = \Gamma_j(t) + \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^M \Gamma_i(t) \times & \left(\frac{\Gamma_j(t) r_{ji}^2 - 3r_{ji}(\Gamma_j r_{ji})}{r_{ji}^5} (1 - e^{-r_{ji}^3/\sigma_i^3}) + \right. \\ & \left. + \frac{3 \exp(-r_{ji}^3/\sigma_i^3)}{\sigma_i^3} \frac{(\Gamma_i \mathbf{r}_{ji}) r_{ji}}{r_{ji}^2} \right), \quad \mathbf{r}_{ji} = \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i, \quad \Gamma_k = \frac{4\pi}{3} \sigma_k^3 \omega_k \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\mathbf{r}_j(t + \Delta t) = \mathbf{r}_j(t) + \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^M \frac{\Gamma_i \times \mathbf{r}_{ji}}{r_{ji}^3} \left(1 - \exp\left(-\frac{r_{ji}^3}{\sigma_i^3}\right) \right) \quad (2.5)$$



Фиг. 4. Основные стадии неустойчивости вихревого шнура над экраном: 1 – линейная, 2 – нелинейная, 3 – вихревое растяжение на экране, 4 – перезамыкание на экран, 5 – сжатие горловины и образование замкнутых вихревых структур

Деформация вихревой трубки приводит к деформации ее поперечного сечения. При этом, согласно теореме Гельмгольца, циркуляция поперечного сечения трубки I остается постоянной. Из этого условия можно получить соотношение для изменения радиуса трубки

$$\sigma(t + \Delta t) = \sigma(t) \sqrt{I(t) / I(t + \Delta t)} \quad (2.6)$$

Легко проверить, что численная схема, определяемая уравнениями (2.4)–(2.6), обладает устойчивостью по Нейману [5].

Практически расчет по схеме (2.4)–(2.6) сводится к следующим операциям. При $t = 0$ задаются начальные условия $\omega(\mathbf{X}, 0)$, $\mathbf{r}(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{X}$, $\sigma(\mathbf{X}, 0)$; при $t = t + \Delta t$ по формулам (2.4)–(2.6) рассчитываются новые значения ω , $\mathbf{r}$, σ : осуществляется сплайновая аппроксимация вдоль осевой дуги вихревого шнура $\mathbf{r}(s)$, $\sigma(s)$, где s – длина дуги. Находится новая система вихревых трубок, расположенных вдоль осевой дуги, с учетом плотной упаковки и отсутствия наложения вихревых трубок друг на друга. Осуществляется переход к следующему шагу по времени.

В численных расчетах, результаты которых представлены на фиг. 4, рассматривалось неустойчивое поведение бесконечного шнура с циркуляцией $I = 0.5$ и радиусом ядра 0.04 на высоте $h = 0.1$. Целью расчетов было исследование неустойчивости на малых высотах. При этом, как показал линейный анализ, влиянием второго концевой вихря можно пренебречь. В качестве начального условия было выбрано гармоническое возмущение оси шнура с амплитудой 0.02 , соответствующее при этих параметрах максимально неустойчивой гармонике, определяемой по линейной теории устойчивости.

Как показывают расчеты нелинейной эволюции, можно выделить несколько характерных стадий развития неустойчивости вихревого шнура над экраном (фиг. 4). Вслед за линейной стадией следует нелинейная стадия, на которой происходит растяжение участков шнура, расположенных ниже его невозмущенного положения. Синусоидальность вихревого шнура нарушается. Как и предсказывает линейная теория, шнур сближается с твердой поверхностью. В расчетах фиксировалось минимальное расстояние 0.001 . В зоне контакта шнура с экраном возникает интенсивное вихревое растяжение (Vortex stretching). Длина шнура интенсивно растет (по оценкам [2], возрастает до бесконечности за конечный промежуток времени), а его поперечное сечение и расстояние до экрана уменьшаются.

В реальности на этой стадии существенно влияние вязкости, которая ликвидирует растянутые зоны контакта. При сближении двух вихрей в свободном потоке также образуется перемычка, которая исчезает за счет диффузии завихренности противоположного знака. Над экраном роль второго вихря играет индуцированный пограничный слой. Взаимная диффузия вихря и пограничного слоя приводит к перезамыканию вихря на твердую поверхность. В рамках данной работы вязкость не рассматривается, хотя в настоящее время изложенный в данном разделе метод распространен и на вязкие за-

дачи [6]. Для того чтобы прогнозировать процесс на следующих стадиях, была искусственно ликвидирована часть вихревого шнура, стелющаяся по твердой поверхности. Эту процедуру можно рассматривать как косвенный учет вязкости или искусственное моделирование процесса перезамыкания. На этой стадии вихревой шнур превращается в шпилькообразные вихревые структуры [7]. Поле скоростей, индуцированных зеркально отраженной вихревой системой, приводит к сжатию горловины и образованию замкнутых вихревых структур в окрестности твердой поверхности.

Заключение. Построена модель распада вихревого следа несущей поверхности над экраном в идеальной жидкости. Линейный анализ предсказывает наличие трех типов распада следа в зависимости от высоты расположения вихревой системы. При больших высотах на концевых вихрях порождаются симметричные относительно диаметральной плоскости колебания с возрастающей во времени амплитудой. Колебание развивается в плоскостях, наклоненных к горизонту под углом примерно 48° . Процесс развития возмущений приводит к перезамыканию концевых вихрей и образованию замкнутых вихревых структур, которые в дальнейшем дробятся и исчезают под воздействием вязкости. С приближением к экрану на умеренных высотах нарушается симметрия относительно диаметральной плоскости. На малых и предельно малых высотах неустойчивость концевого вихря определяется его взаимодействием с экраном, а взаимовлиянием шнуров можно пренебречь. Неустойчивость развивается в плоскости, наклоненной к горизонту под углом -42° . Интенсивность роста возмущений максимальна в этой зоне и имеет порядок $\sim 1/H^2$. В дальнейшем неустойчивые вихревые шнуры, проходя через нелинейные стадии, максимально сближаются с твердой стенкой. На этой стадии может произойти перезамыкание вихрей с вторичными вихрями, возникающими на стенке. Исследование этой стадии требует учета вязкости. Между зонами умеренных и малых высот существует узкая зона, в которой неустойчивость имеет тип раскручивающейся спирали. В реальности этот тип неустойчивости, вероятно, реализуется лишь на начальной стадии. В дальнейшем вследствие увеличения амплитуды вихри переходят в зоны малых и умеренных высот и неустойчивость развивается по описанным выше законам.

Автор благодарит М.А. Басина за полезное обсуждение и Фонд Гумбольдта за финансовую поддержку работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кроу С.К. Теория устойчивости двух систем хвостовых вихрей // Ракетная техника и космонавтика. 1970. Т. 8. № 12. С. 73–81.
2. Siggia E. Collapse and amplification of a vortex filament // Phys. Fluids. 1985. V. 28. № 3. P. 794–805.
3. Kida S., Takaoka M. Vortex reconnection // Annu. Rev. Fluid Mech. 1994. V. 26. P. 169–189.
4. Leonard A. Vortex methods for flow simulation // J. Comput. Phys. 1980. V. 37. № 3. P. 289–335.
5. Richtmyer R.D., Morton K.W. Difference methods for initial-value problems. N.Y.: Intersci, 1967. 405 p.
6. Basin M.A., Kornev N.V. Vortex methods in hydrodynamics // Intern. Symp. on Ship Hydrodynamics. St. Petersburg, 1995. P. 431–449.
7. Рабинович М.И., Суцук М.М. Регулярная и хаотическая динамика структур в течениях жидкости // Успехи физ. наук. 1990. Т. 160. Вып. 1. С. 3–64.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
27.IX.1994