МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 1 · 1997

УДК 533.6.011

© 1997 г. **Н.В. СМЕЛОВА**

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВНЕШНЕГО СВЕРХЗВУКОВОГО ПОТОКА И ДОЗВУКОВОГО СЛОЯ У ВОЛНИСТОЙ СТЕНКИ

Получено решение задачи об обтекании сверхзвуковым потоком волнистой стенки с примыкающим к ней дозвуковым слоем. Это решение обобщает известные решения [1] линейной задачи об обтекании волнистой стенки чисто дозвуковым или чисто сверхзвуковым потоком и переходит в указанные решения в предельных случаях бесконечной или нулевой толщины пристенного слоя соответственно.

Задача о взаимодействии параллельно текущих слабо возмущенных сверхзвукового и дозвукового потоков газа – одна из давних задач газовой динамики. В 40–50-х годах она была навеяна проблемой взаимодействия сверхзвукового потока с пограничным слоем на обтекаемой поверхности.

В [2] в линейном приближении изучено взаимодействие слабого возмущения, идущего из бесконечности в однородном сверхзвуковом потоке, с границей, отделяющей его от дозвукового однородного потока. В частности, определен характер особенности в месте встречи возмущения с поверхностью раздела.

В [3] также в линейном приближении рассмотрены задача о взаимодействии возмущения, идущего из полубесконечного сверхзвукового потока, с дозвуковым слоем конечной ширины у плоской стенки, и задача о возмущении такого потока малым изломом стенки. Эти же задачи с учетом нелинейности изучены в [4], где, в частности, установлена структура особенности, рассматривавшейся для полуограниченной дозвуковой области в линейном приближении в [2]: скачок уплотнения (при сверхзвуковой скорости за ним) отражается от границы дозвукового слоя конечной ширины в виде волны разрежения, ограниченной спереди постепенно усиливающимся скачком, поглощающим эту волну.

В последнее время вновь возник интерес к подобного рода задачам в связи с другими газодинамическими проблемами. Так, в [5] рассмотрено в линейном приближении обтекание вихря дозвуковым потоком, граничащим со сверхзвуковым потоком, или с дозвуковым же потоком большей скорости.

1. Постановка задачи. Выберем ось x совпадающей с невозмущенной поверхностью раздела двух потоков, а ось y перпендикулярную ей. При $y > 0$ – невозмущенный сверхзвуковой поток. Твердую стенку опишем уравнением $y = \varepsilon \sin \alpha x - b$, где амплитуда ε – малый параметр, b – ширина невозмущенного дозвукового слоя, $2\pi/\alpha$ – длина волны возмущения стенки. При $\varepsilon \sin \alpha x - b < y < 0$ – дозвуковой поток. Все величины для сверхзвукового и дозвукового потоков будут обозначаться индексами 1 и 2 соответственно. Давление, плотность, число Маха, компоненты скорости обозначим p, ρ, M, u, v соответственно.

Представим характеристики движения в виде

$$u_{1,2} = U_{1,2}(1 + \varepsilon u'_{1,2}), \quad v_{1,2} = U_{1,2}\varepsilon v'_{1,2}$$

$$p_{1,2} = P_{1,2}(1 + \varepsilon p'_{1,2}), \quad \rho_{1,2} = R_{1,2}(1 + \varepsilon \rho'_{1,2})$$

Здесь $U_{1,2}$, $P_{1,2}$, $R_{1,2}$ – постоянные значения скорости, давления, плотности, соответствующие невозмущенным потокам.

Линеаризованные уравнения для потенциала скоростей возмущения ϕ_i, $i=1,2$

$$(-1)^i(1-\mathrm{M}_i^2)\frac{\partial^2\phi_i}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi_i}{\partial y^2}=0 \tag{1.1}$$

Сформулируем граничные условия. Все возмущения в потоках возникают из-за наличия волнистой стенки, поэтому приходящих из сверхзвукового потока волн не существует. На стенке поставим условие непротекания. В линеаризованном виде оно запишется

$$\frac{\partial\phi_2}{\partial y}=\alpha\cos(\alpha x), \qquad y=-b \tag{1.2}$$

Поверхность раздела – тангенциальный разрыв, на котором нормальная составляющая скорости и давление непрерывны

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial y}=\frac{\partial\phi_2}{\partial y}, \quad \mathrm{M}_1^2\frac{\partial\phi_1}{\partial x}=\mathrm{M}_2^2\frac{\partial\phi_2}{\partial x}, \qquad y=0 \tag{1.3}$$

2. Решение задачи для конечного числа волн. Сначала решим задачу для стенки с конечным числом волн, а затем полученное решение распространим на бесконечную волнистую стенку.

Стенку представим в виде

$$y=\begin{cases}-b, & \alpha x<2\pi n\\ \varepsilon\sin(\alpha x)-b, & -2\pi n<\alpha x<2\pi k\\ -b, & \alpha x>2\pi k\end{cases}$$

где k, n – натуральные числа.

Граничное условие (1.2) должно выполняться при $x\in(-2\pi n/\alpha,\ 2\pi k/\alpha)$, а при остальных x $\partial\phi_2/\partial y_{(y=-b)}=0$. Условия (1.3) сохраняются.

Общее решение уравнения (1.1) при $i=1$ будет

$$\phi_1=f(x+m_1y)+g(x-m_1y), \qquad m_1=\sqrt{\mathrm{M}_1^2-1}$$

где f и g – произвольные функции, $f(x+m_1y)\equiv 0$ из-за условий на бесконечности.

Потенциал ϕ_2 можно взять в виде

$$\phi_2=\frac{\alpha}{\pi m_2}\int_0^\infty\frac{\mathrm{sh}(\lambda m_2(y+b))}{\alpha^2-\lambda^2}\left(\left(-\sin\frac{2\pi k\lambda}{\alpha}-\sin\frac{2\pi n\lambda}{\alpha}\right)\cos\lambda x+\right.$$
$$\left.+\left(\cos\frac{2\pi k\lambda}{\alpha}-\cos\frac{2\pi n\lambda}{\alpha}\right)\sin\lambda x\right)d\lambda+$$
$$+\int_0^\infty \mathrm{ch}(\lambda m_2(y+b))(a_2(\lambda)\sin\lambda x+b_2(\lambda)\cos\lambda x)d\lambda \tag{2.1}$$
$$m_2=\sqrt{1-\mathrm{M}_2^2}$$

где $a_2(\lambda)$ и $b_2(\lambda)$ – функции параметра λ, которые подлежат определению. Можно легко проверить, что такая форма ϕ_2 удовлетворяет дифференциальному уравнению (1.1) при $i=2$. Проверяя условие (1.2) для ϕ_2, можно убедиться, что оно выполняется автоматически.

Представим ϕ_1 также в форме интеграла Фурье

$$\phi_1 = \int_0^\infty [a_1(\lambda)\sin(\lambda(x-m_1y)) + b_1(\lambda)\cos(\lambda(x-m_1y))]d\lambda \tag{2.2}$$

где $a_1(\lambda)$ и $b_1(\lambda)$ являются неопределенными.

Чтобы найти неизвестные функции $a_1(\lambda)$, $a_2(\lambda)$, $b_1(\lambda)$, $b_2(\lambda)$, подставим выражения (2.1) и (2.2) в условия (1.3) и приравняем соответствующие члены в обеих частях граничных условий. В результате получим систему из четырех уравнений относительно четырех неизвестных

$$a_1(\lambda) = -\sqrt{a}\,\mathrm{sh}(s\lambda)b_2(\lambda) - \frac{1}{m_1}\mathrm{ch}(s\lambda)F(\lambda),\quad b_1(\lambda) = \sqrt{a}\,\mathrm{sh}(s\lambda)a_2(\lambda) + \frac{1}{m_1}\mathrm{ch}(s\lambda)G(\lambda),$$

$$a_1(\lambda) = \sqrt{d}\,\mathrm{ch}(s\lambda)a_2(\lambda) + t\,\mathrm{sh}(s\lambda)G(\lambda),\quad b_1(\lambda) = \sqrt{d}\,\mathrm{ch}(s\lambda)b_2(\lambda) + t\,\mathrm{sh}(s\lambda)F(\lambda) \tag{2.3}$$

$$s = m_2b,\quad a = \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2,\quad d = \frac{\mathrm{M}_2^4}{\mathrm{M}_1^4},\quad t = \frac{\sqrt{d}}{m_2}$$

$$F(\lambda) = -\frac{\alpha}{\pi(\alpha^2-\lambda^2)}\left(\sin\frac{2\pi k\lambda}{\alpha} + \sin\frac{2\pi n\lambda}{\alpha}\right)$$

$$G(\lambda) = \frac{\alpha}{\pi(\alpha^2-\lambda^2)}\left(\cos\frac{2\pi k\lambda}{\alpha} - \cos\frac{2\pi n\lambda}{\alpha}\right)$$

Решение системы (2.3)

$$a_1(\lambda) = -\frac{2l}{(d+a)H(\lambda)}\left(\sqrt{d}\,\mathrm{ch}(s\lambda)F(\lambda) + \sqrt{a}\,\mathrm{sh}(s\lambda)G(\lambda)\right)$$

$$a_2(\lambda) = -\frac{2}{(d+a)H(\lambda)}(lF(\lambda) + r\,\mathrm{ch}(s\lambda)\mathrm{sh}(s\lambda)G(\lambda))$$

$$b_1(\lambda) = -\frac{2l}{(d+a)H(\lambda)}\left(\sqrt{a}\,\mathrm{sh}(s\lambda)F(\lambda) - \sqrt{d}\,\mathrm{ch}(s\lambda)G(\lambda)\right) \tag{2.4}$$

$$b_2(\lambda) = -\frac{2}{(d+a)H(\lambda)}(-lG(\lambda) + r\,\mathrm{ch}(s\lambda)\mathrm{sh}(s\lambda)F(\lambda))$$

$$\cos\theta = \frac{d-a}{d+a},\quad l = \frac{\sqrt{d}}{m_1},\quad r = \frac{m_2}{m_1^2} + \frac{d}{m_2}$$

$$H(\lambda) = \mathrm{ch}(2s\lambda) + \cos\theta$$

Задача будет решена полностью, если выражения (2.4) подставить в (2.1), (2.2) и вычислить полученные интегралы. Для ϕ_1 $(y=0)$ после простых преобразований получим

$$\phi_1(y=0) = -\frac{2l\alpha}{\pi(d+a)}\int_0^\infty \frac{\sqrt{d}\,\mathrm{ch}(s\lambda)(\cos(N\lambda) - \cos(K\lambda))}{(\alpha^2-\lambda^2)H(\lambda)}d\lambda +$$

$$+\frac{2l\alpha}{\pi(d+a)}\int_0^\infty \frac{\sqrt{a}\,\mathrm{sh}(s\lambda)(\sin(K\lambda) + \sin(N\lambda))}{(\alpha^2-\lambda^2)H(\lambda)}d\lambda$$

$$N = \frac{2\pi n}{\alpha} + x,\quad K = \frac{2\pi k}{\alpha} - x$$

В Приложении изложен метод вычисления подобных интегралов. Выпишем окончательный ответ

$$x<-\frac{2\pi n}{\alpha}$$

$$\phi_1(y=0)=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{m+1}\left(\frac{(S-C)\exp(-K\beta_+)+(C-S)\exp(N\beta_+)}{\alpha^2+\beta_+^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{(-C-S)\exp(-K\beta_-)+(C+S)\exp(N\beta_-)}{a^2+\beta_-^2}\right.$$

$x\in(-2\pi n/\alpha,\ 2\pi k/\alpha)$

$$\phi_1(y=0)=-\frac{2l(\sqrt{d}\,\mathrm{ch}(s\alpha)\sin(\alpha x)+\sqrt{a}\,\mathrm{sh}(s\alpha)\cos(\alpha x))}{(d+a)(\mathrm{ch}(2s\alpha)+\cos\theta)}+$$

$$+\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{m+1}\left(\frac{(S-C)\exp(-K\beta_+)+(S+C)\exp(-N\beta_+)}{\alpha^2+\beta_+^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{(-C-S)\exp(-K\beta_-)+(C-S)\exp(-N\beta_-)}{a^2+\beta_-^2}\right)$$

$$x>\frac{2\pi k}{\alpha}$$

$$\phi_1(y=0)=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{m+1}\left(\frac{(-S-C)\exp(K\beta_+)+(S+C)\exp(-N\beta_+)}{\alpha^2+\beta_+^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{(S-C)\exp(K\beta_-)+(C-S)\exp(-N\beta_-)}{\alpha^2+\beta_-^2}\right)$$

$$\beta_+=\frac{(2m+1)\pi+\theta}{2s},\quad \beta_-=\frac{(2m+1)\pi-\theta}{2s}$$

$$C=\frac{l\alpha}{2s(d+a)}\frac{\sqrt{d}}{\cos(0{,}5\theta)},\quad S=\frac{l\alpha}{2s(d+a)}\frac{\sqrt{a}}{\sin(0{,}5\theta)}$$

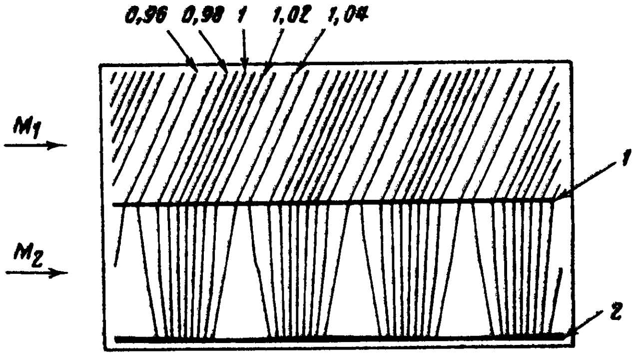
Аналогичным путём можно вычислить $\phi_2(x, y)$.

3. Распространение решения на бесконечную волнистую стенку. Ряды, входящие в выражения для ϕ_1, равномерно сходятся и их члены непрерывны, можно перейти к пределу за знаком суммы при $n\to\infty$ и $k\to\infty$. Таким образом получим решение для бесконечной волнистой стенки

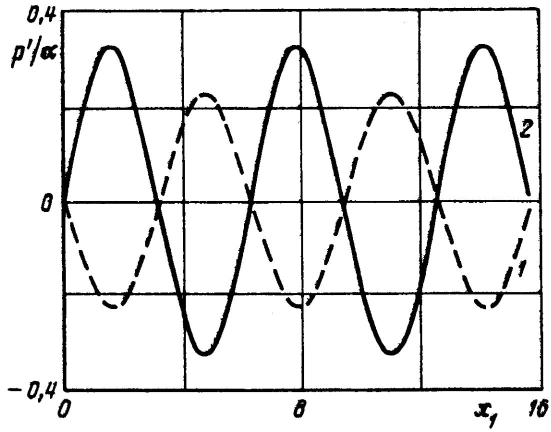
$$\phi_1=-\frac{2l}{(a+d)H(\alpha)}(\sqrt{d}\,\mathrm{ch}(s\alpha)\sin[\alpha(x-m_1y)]-\sqrt{a}\,\mathrm{sh}(s\alpha)\cos[\alpha(x-m_1y)]) \tag{3.1}$$

$$\phi_2=\frac{\mathrm{sh}(\alpha m_2(y+b))\cos(\alpha x)}{m_2}-\mathrm{ch}(\alpha m_2(y+b))\frac{2l\sin(\alpha x)+r\,\mathrm{sh}(2s\alpha)\cos(\alpha x)}{(a+d)H(\alpha)} \tag{3.2}$$

Отсюда получаем выражения для возмущения давления, в сверхзвуковом и



Фиг. 1. Изобары в потоке ($M_1 = 2$, $M_2 = 0{,}5$)· *1* – линия раздела потоков, *2* – твердая стенка ($y = 0{,}1 \sin x - 1$)



Фиг. 2. Распределение давления возмущения ($M_1 = 2{,}5$, $M_2 = 0{,}4$, $\alpha b = 1$, $x_1 = x/b$): *1* – на контактной поверхности (штриховая линия), *2* – на твердой стенке (сплошная линия)

дозвуковом потоках соответственно

$$p_1' = \gamma M_1^2 \frac{2l\alpha}{(d+a)H(\alpha)}(\sqrt{d}\,\mathrm{ch}(s\alpha)\cos[\alpha(x - m_1 y)] - \sqrt{a}\,\mathrm{sh}(s\alpha)\sin[\alpha(x - m_1 y)])$$

$$p_2' = -\gamma M_2^2 \alpha\left(-\frac{\mathrm{sh}(\alpha m_2(y+b))\sin(\alpha x)}{m_2} - \mathrm{ch}(\alpha m_2(y+b))\frac{2l\cos(\alpha x) - r\,\mathrm{sh}(2s\alpha)\sin(\alpha x)}{(a+d)H(\alpha)}\right)$$

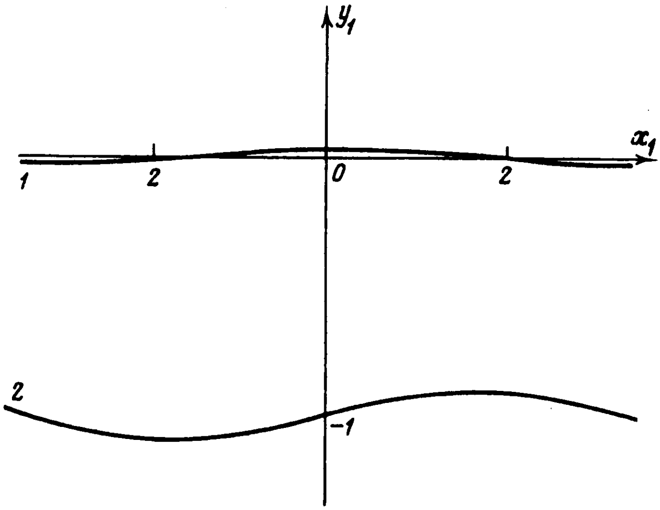
На фиг. 1 показаны изобары в потоке. Числа у изобар соответствуют значениям $1 + \varepsilon p'$. Распределение давления возмущения показано на фиг. 2.

Форма контактной поверхности (фиг. 3) описывается выражением

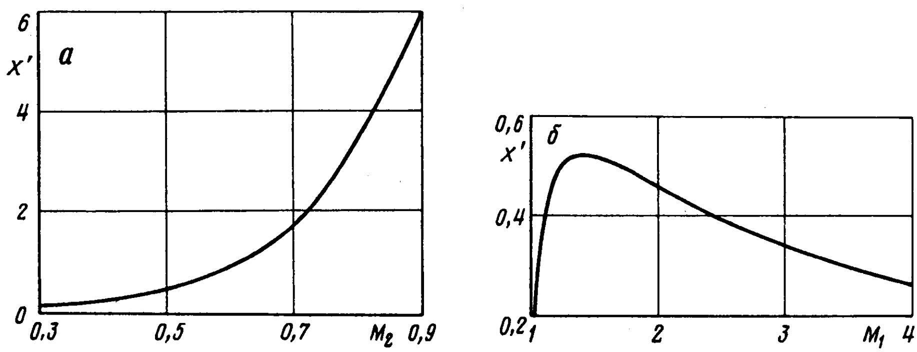
$$y = \frac{2(d\,\mathrm{ch}(s\alpha)\sin(\alpha x) + \sqrt{ad}\,\mathrm{sh}(s\alpha)\cos(\alpha x))}{(a+d)H(\alpha)}$$

Рассмотрим предельные случаи $b \to 0$ и $b \to \infty$. Устремляя ширину дозвукового слоя к нулю в выражении для ϕ_1, получим решение для сверхзвукового обтекания волнистой стенки

$$\lim_{b\to 0}\phi_1 = -\frac{2l\sqrt{d}\,\mathrm{ch}(s\alpha)\sin[\alpha(x - m_1 y)]}{(d+a)(1+\cos\theta)} = -\frac{1}{m_1}\sin[\alpha(x - m_1 y)] \qquad (3.3)$$



Фиг. 3. Взаимное расположение контактной и твердой поверхности: *1* – контактная поверхность, *2* – твердая стенка ($y_1 = y/b$, $M_1 = 2$, $M_2 = 0{,}5$, $\alpha b = 1$)



Фиг. 4. Сила сопротивления, действующая на один период при значениях числа Маха: *а* – $M_1 = 2$, *б* – $M_2 = 0{,}5$ ($\alpha b = 1$)

Для того чтобы получить потенциал для дозвукового обтекания волнистой стенки, перейдем к новым координатам $y_1 = y + b$ и устремим ширину дозвукового слоя к бесконечности

$$\lim_{b\to\infty} \phi_2 = \frac{\operatorname{sh}(\alpha m_2 y_1)\cos(\alpha x)}{m_2} - \operatorname{ch}(\alpha m_2 y_1)\frac{r\cos(\alpha x)}{a+d} = -\frac{1}{m_2}\cos(\alpha x)\exp(-\alpha m_2 y_1) \quad (3.4)$$

Полученные выражения (3.3), (3.4) совпадают с приведенными в [1].

В заключение вычислим силу сопротивления, действующую на один период волны стенки

$$X = \int\limits_0^{2\pi/\alpha} p_2 \frac{dy}{dx}dx = \varepsilon^2 P_2 \mathrm{M}_2^2 \alpha \frac{2l\pi}{(a+d)H(\alpha)}$$

где y – форма поверхности стенки. На фиг. 4 приводится зависимость X' от значений числа Маха. За X' обозначена величина $X / (\varepsilon^2 P_2 \mathrm{M}_2^2 \alpha)$.

Приложение. Метод вычисления интегралов. Интегралы с бесконечными пределами в выражениях для потенциалов могут быть вычислены при помощи интегрирования по контуру.

Например

$$I=\int_0^\infty \frac{\mathrm{ch}(s\lambda)\cos(L\lambda)}{(\mathrm{ch}(2\lambda s)+\cos\theta)(\alpha^2-\lambda^2)}d\lambda=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{ch}(s\lambda)\exp(iL\lambda)}{(\mathrm{ch}(2s\lambda)+\cos\theta)(\alpha^2-\lambda^2)}d\lambda$$

Рассмотрим λ как комплексную переменную и возьмем в качестве контура интегрирования действительную ось, выходящую из начала координат с выколотыми точками $+\alpha$, $-\alpha$, и полукруг бесконечно большого радиуса в верхней полуплоскости комплексного переменного. Контур включает следующие полюсы:

$$\lambda=+\alpha,\quad \lambda=-\alpha,\quad \lambda=i\frac{(2m+1)\pi+\theta}{2s}\equiv\beta_\pm$$

$m=0, 1, 2,...$

Вычеты подынтегральной функции в точках α, $-\alpha$, $i\beta_\pm$ равны соответственно

$$-\frac{\mathrm{ch}(s\alpha)\exp(iL\alpha)}{2\alpha(\mathrm{ch}(2s\alpha)+\cos\theta)},\quad \frac{\mathrm{ch}(s\alpha)\exp(-iL\alpha)}{2\alpha(\mathrm{ch}(2s\alpha)+\cos\theta)},\quad (-1)^{m+1}\frac{i\exp(-L\beta)}{4s\cos\theta/2(\alpha^2+\beta^2)}$$

В результате получим

$$I=-\frac{\pi}{2}\frac{\mathrm{sh}(s\alpha)\cos(L\alpha)}{\alpha(\mathrm{ch}(2s\alpha)+\cos\theta)}+\frac{\pi}{4s\sin\theta/2}\left[\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{\exp(-L\beta_+)}{\alpha^2+\beta_+^2}-\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{\exp(-L\beta_-)}{\alpha^2+\beta_-^2}\right]$$

Интеграл вычислен при $L>0$. Другие интегралы вычисляются аналогично.

Заключение. Рассмотренная задача обнаруживает характер поведения возмущений параллельных потоков газа в приближении линейной теории и обобщает известные ранее решения для чисто сверхзвуковых и дозвуковых обтеканий волнистой стенки.

Приводится решение для стенки с конечным числом волн, которое обобщается на бесконечную волнистую стенку. Полученные решения для потенциалов скоростей возмущений в сверхзвуковом (3.1) и дозвуковом (3.2) потоках позволяют выписать в явном виде выражения для других параметров.

Предложенное решение может быть использовано при расчете обтекания стенок другой формы, поскольку в рамках линейной теории решения таких задач можно получить путем суперпозиции решений задачи об обтекании синусоидальной стенки при разложении функции, описывающей форму стенки, в ряд Фурье.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Липман Г.В., Рошко А.* Элементы газовой динамики. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 518 с.
2. *Howarth L.* The propagation of steady disturbances in a supersonic stream bounded on one side by a parallel subsonic stream // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1948. V. 44. № 3. P. 380–390.
3. *Tsien H., Finston M.* Interaction between parallel streams of subsonic and supersonic velocities // J. Aeronaut. Sci. 1949. V. 16. № 9. P. 515–528.
4. *Черный Г.Г.* Влияние дозвуковой части пограничного слоя на положение скачков уплотнения // Теоретическая гидродинамика. М.: Оборонгиз, 1952. № 9. С. 63–96.
5. *Бабкин Г.В., Ким А.А.* Вихрь вблизи границы раздела сжимаемых потоков // Уч. зап. ЦАГИ. 1993. Т. 24. № 3. С. 23–38.

Москва

Поступила в редакцию
26.X.1995