

УДК 532.582

© 1997 г. В.Л. ЗЕЛЕНКО, И.В. МЕЛИХОВ

СИЛЫ И МОМЕНТЫ СИЛ ПРИ СКОЛЬЖЕНИИ ТЕЛ В ЖИДКОСТИ

Рассмотрено движение системы тел в вязкой жидкости вдоль плоскости при наличии сдвигового потока. Показано, что на систему тел и плоскость со стороны жидкости действует главный вращающий момент, линейно связанный со скоростями тел.

Скольжение тел вдоль твердой поверхности может быть связано как с обтеканием поверхности потоком жидкости, так и с действием силовых полей. Обширные исследования посвящены процессам, протекающим в тонком слое, разделяющем тело и удерживающую плоскость. При этом в зависимости от толщины в слое преобладают либо молекулярные силы [1, 2], либо напряжения, обусловленные движением вязкой жидкости и описываемые гидродинамической теорией смазки [3]. Менее изучено взаимодействие внешнего течения с поверхностью, содержащей множество скользящих тел. Одно из проявлений этого взаимодействия – "ослабление" граничного условия прилипания, что приводит к большей подвижности жидкости. Так, Пуазейль наблюдал повышенную текучесть крови за счет выделения эритроцитов из крови на стенки сосудов [4]. Этим же эффектом объясняют [5] облегчение образования смерчей в атмосфере в случае, когда земля устлана песком, листвой или сухим снегом.

Проблема граничных условий также актуальна при исследовании дисперсных течений, сопровождаемых инерционным осаждением и скольжением частиц вдоль поверхности [6].

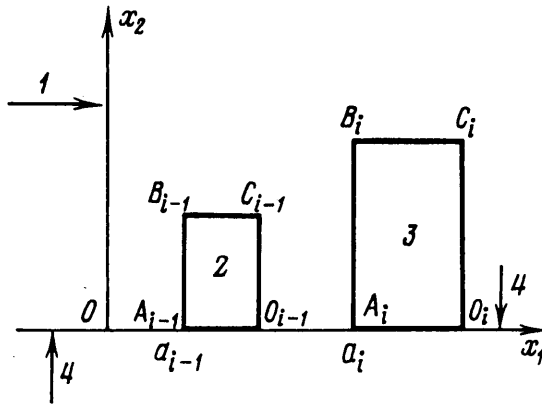
Иного рода явления наблюдаются при скольжении коллоидных кристаллов. При больших скоростях скольжения ($\sim 10^2$ мкм · с⁻¹) кристаллы полностью растворяются [7], несмотря на то что средние термодинамические характеристики допускают существование фаз. При малых скоростях (~ 1 мкм · с⁻¹) движение кристаллов носит прерывистый характер, причем чередование состояний скольжения и покоя входит в резонанс с акустическими колебаниями в системе [8].

Проблема скольжения и отрыва частиц от поверхности представляет интерес для технологии. Однако обычно силу взаимодействия потока с частицей оценивают весьма схематично [9, 10], заменяя поток со сдвигом в вязком подслое на равномерный поток с подходящим образом выбранной скоростью.

Цель настоящей работы – получение общих соотношений, описывающих обмен импульсом и моментом импульса между жидкостью и твердыми телами.

1. Постановка задачи. Пусть на плоскости расположены N тел, на которые из бесконечности набегают поток с постоянным градиентом скорости K . Рассмотрим плоскую задачу о движении вязкой несжимаемой жидкости с плотностью ρ_0 и коэффициентом вязкости μ . Начало O прямоугольной системы координат (фиг. 1) поместим в плоскости, а оси X_1, X_2 направим вдоль потока и перпендикулярно плоскости.

Каждое i -е тело (при пересчете слева направо $1 \leq i \leq N$) является прямоугольником высотой H_i , шириной D_i и движется вдоль оси X_1 с заданной скоростью U_i . Реально существующим тонким зазором, разделяющим тела и плоскость, пренеб-



Фиг. 1. Схема скольжения тел вдоль плоскости: 1 – набегающий сдвиговый поток; 2 – $(i - 1)$ -е тело; 3 – i -е тело; 4 – пара сил с моментом M_0

регаем, считая, что в точках A_i, O_i (фиг. 1) граница области течения, оставаясь непрерывной, претерпевает излом. Анализ процессов в этих зазорах необходим для нахождения внешних сил, обеспечивающих заданное движение, однако этот расчет не является целью настоящей работы.

Пусть $H_{\max} = \max_i H_i$, $U_{\max} = \max(KH_{\max}, U_i)$, $i = 1, \dots, N$, где первый член в скобках равен максимальной невозмущенной скорости потока, которая достигается в области, занятой телами; второй член может превосходить первый, если движение связано с действием внешней силы. Предположим, что число Рейнольдса $Re = \rho_0 H_{\max} U_{\max} \mu^{-1} \ll 1$, а скорости тел изменяются достаточно медленно на временах $\tau \geq H_{\max} U_{\max}^{-1}$. Эти оценки позволяют опустить инерционные члены в уравнении Навье–Стокса и описывать течение с помощью уравнения

$$\frac{\partial P}{\partial X_j} = \mu \Delta V_j, \quad j = 1, 2; \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \quad (1.1)$$

где P – давление, V_j – j -я компонента скорости жидкости. В качестве краевых условий на плоскости и поверхностях тел примем условия прилипания

$$X_2 = 0, \quad V_j = 0, \quad j = 1, 2 \quad (1.2)$$

$$V_1 = U_i, \quad V_2 = 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (1.3)$$

Перейдем к безразмерным величинам на основе единиц длины – H_{\max} , времени – K^{-1} , скорости – KH_{\max} , давления – μK , силы – μKH_{\max} , момента силы – μKH_{\max}^2 . Безразмерные координаты, давление, силы, моменты сил, скорость, высоту и ширину i -го тела обозначим с помощью соответствующих строчных букв $x_j, p, f_j, m_i, u_i, h_i, d_i$. Безразмерные компоненты скорости жидкости снабдим штрихом. Для описания возмущений, вносимых в поток телами, введем величины

$$v_1 = V_1' - x_2, \quad v_2 = V_2'; \quad |x_j| \rightarrow \infty, \quad v_j \rightarrow 0 \quad (1.4)$$

Введем функцию тока ψ

$$v_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \quad v_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \quad (1.5)$$

Из (1.1) следует, что ψ удовлетворяет бигармоническому уравнению $\Delta^2\psi = 0$. Если область течения такова, что каждая прямая, параллельная оси x_2 , пересекает ее границу не более чем в двух точках (рассматриваемая область течения именно такова), то бигармоническая функция ψ допускает представление [11]

$$\psi = \varphi_1 + x_2\varphi_2, \quad \Delta\varphi_i = 0 \quad (1.6)$$

Для удобства записи введем в рассмотрение i -й фрагмент периметра, который включает в себя отрезок $O_{i-1}A_i$ (фиг. 1) плоскости и три стороны i -го тела. Последний, $(N+1)$ -й фрагмент состоит лишь из полупрямой $[O_N, \infty]$, при этом, по определению, $O_0 = -\infty, A_{N+1} = \infty$. Отрезкам $O_{i-1}A_i, A_iB_i, B_iC_i, C_iO_i$, именуемым далее элементами, присвоим номера от 1 до 4. Условимся, что если величина снабжена двумя верхними индексами, то первый индекс обозначает номер фрагмента периметра, а второй – номер элемента в пределах рассматриваемого фрагмента, к которому отнесена величина. С учетом строения $(N+1)$ -го фрагмента каждая величина $C^{(N+1)K} = 0$, если $1 < K$. Интегралы, не содержащие пределов интегрирования, вычисляются вдоль элемента, к которому отнесено подынтегральное выражение.

Введем производные q от φ_p по нормали к границе области течения. По определению, $q_{pj}^{ik} = \partial\varphi_p^{ik} / \partial x_j$, где ось x_j перпендикулярна k -му элементу. Благодаря электростатической аналогии с точностью до знака q_{pj}^{ik} является поверхностной плотностью заряда, соответствующего потенциалу φ_p .

Учитывая (1.4)–(1.6), краевые условия (1.2), (1.3) представим следующим образом. Во всех точках плоскости, включенных в первые элементы фрагментов, выполняются условия

$$\varphi_1^{i1} = 0, \quad \varphi_2^{i1} + q_{12}^{i1} = 0; \quad i = 1, \dots, N+1 \quad (1.7)$$

На боковых гранях тел справедливы соотношения

$$\begin{aligned} x_2\varphi_2^{i(2l)} + \varphi_1^{i(2l)} &= -\frac{1}{2}x_2^2 + x_2u_i \\ x_2q_{21}^{i(2l)} + q_{11}^{i(2l)} &= 0; \quad l = 1, 2; \quad i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (1.8)$$

На верхних гранях тел имеем

$$\begin{aligned} h_i\varphi_2^{i3} + \varphi_1^{i3} &= -\frac{1}{2}h_i^2 + h_iu_i \\ \varphi_2^{i3} + h_iq_{22}^{i3} + q_{12}^{i3} &= -h_i + u_i, \quad i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (1.9)$$

2. Интегральные соотношения и их механическая интерпретация. Используя невозмущенность потока на бесконечности, получим два интегральных соотношения. Пусть \mathbf{n} – внешняя по отношению к области, занятой жидкостью, нормаль к границе, \mathbf{r} – текущий радиус-вектор точки, \mathbf{l} – радиус-вектор произвольной точки границы, $\rho = |\mathbf{r} - \mathbf{l}|$ – расстояние между указанными точками. Для гармонических функций φ_p ($p = 1, 2$) запишем основную интегральную формулу Грина [12] для точек первого элемента первого фрагмента границы

$$2\pi\varphi_p^{11} = -\int_L \ln\rho^2 \frac{\partial\varphi_p(\mathbf{l})}{\partial\mathbf{n}} ds + \int_L \frac{\varphi_p}{\rho^2} \frac{\partial\rho^2}{\partial\mathbf{n}} ds \quad (2.1)$$

где ds – элемент границы, а интегрирование распространено по всему периметру. Пусть \mathbf{n}_{jk} – внешняя нормаль к k -му элементу j -го фрагмента, \mathbf{e}_i – единичный вектор, параллельный i -й оси. Принимая во внимание, что $\mathbf{n}_{j1} = -\mathbf{e}_2$,

$\mathbf{n}_{j2} = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{n}_{j3} = -\mathbf{e}_2$, $\mathbf{n}_{j4} = -\mathbf{e}_1$, (2.1) запишем в виде

$$2\pi\varphi_p^{11}(x_1) = \sum_{j=1}^{N+1} \sum_{k=1}^4 \int (R_{kj}q_{pm}^{jk}(x'_1) + S_{kj}\varphi_p^{jk}(x'_1))dx'_1$$

$$m = \frac{1}{2}(3 - (-1)^k), \quad l = \frac{1}{2}(3 + (-1)^k), \quad x_2 = 0, \quad x_1 < a_1$$

$$R_{1j} = \ln(x_1 - x'_1)^2, \quad R_{2j} = -\ln((x_1 - a_j)^2 + x_2'^2)$$

$$S_{1j} = 0, \quad S_{2j} = -\frac{2(x_1 - a_j)}{(x_1 - a_j)^2 + x_2'^2}$$

$$S_{3j} = -\frac{2h_j}{(x_1 - x'_1)^2 + h_j^2}, \quad S_{4j} = \frac{2(x_2 - a_j - d_j)}{(x_1 - a_j - d_j)^2 + x_2'^2}$$

При $x_1 \rightarrow -\infty$ $R_{kj} \sim \ln x_1^2$, $S_{kj} \rightarrow 0$ и в силу невозмущенности потока на бесконечности $\varphi_p^{11} \rightarrow 0$, вследствие чего необходимо потребовать исчезновения суммы членов, содержащих R_{kj} . Таким образом, имеем

$$\sum_{i=1}^{N+1} \left(\int q_{p2}^{i1} dx_1 + \int q_{p2}^{i3} dx_1 - \int q_{p1}^{i2} dx_2 + \int q_{p1}^{i4} dx_2 \right) = 0 \quad (2.2)$$

Знак минус в третьем члене связан с тем, что $\mathbf{n}_{j2} = -\mathbf{n}_{j4}$, т.е. внешние нормали на втором и четвертом элементах противоположны, вместе с тем q_{p1}^{ik} , по определению, обозначают производные по координатам, а не по нормальям. Учитывая это обстоятельство, имеем электростатическую аналогию: полный заряд, соответствующий потенциалу φ_p ($p = 1, 2$), равен нулю.

Для выяснения механического смысла (2.2) выпишем выражение для k -й компоненты силы f_k^{ij} , действующей со стороны жидкости на j -й элемент i -го фрагмента границы

$$f_1^{i1} = (a_i - a_{i-1} - d_i) + \int \frac{\partial v_1^{i1}}{\partial x_2} dx_1, \quad f_1^{i3} = d_i + \int \frac{\partial v_1^{i3}}{\partial x_2} dx_1$$

$$f_1^{i(2l)} = (-1)^{l+1} \int p^{i(2l)} dx_2, \quad f_2^{i(2l)} = (-1)^l \int \frac{\partial v_2^{i(2l)}}{\partial x_1} dx_2 \quad (2.3)$$

$$f_2^{i(2l-1)} = -\int p^{i(2l-1)} dx_1; \quad l = 1, 2; \quad i = 1, \dots, N+1$$

Поскольку $f_1^{11} = f_1^{(N+1)1} = \infty$, то для оценки влияния движущихся тел на обмен импульсом между потоком и твердыми стенками рассмотрим возмущение f'_{10} x_1 -компоненты полной силы, действующей на тела и плоскость, в виде

$$f'_{10} = \lim_{s \rightarrow \infty} (f_{10s} - 2s)$$

где f_{10s} - x_1 -компонента силы, действующая на тела и элементы плоскости в промежутке $-s < x_1 < s$, $2s$ - сила, действующая на плоскость в указанном промежутке при отсутствии тел. Из (2.3) следует

$$f'_{10} = \sum_{i=1}^{N+1} \left(\int \frac{\partial v_1^{i1}}{\partial x_2} dx_1 + \int \frac{\partial v_1^{i3}}{\partial x_2} + \int p^{i2} dx_2 - \int p^{i4} dx_2 \right) \quad (2.4)$$

$$f'_{20} = \sum_{i=1}^{N+1} \left(-\int \frac{\partial v_2^{i2}}{\partial x_1} dx_2 + \int \frac{\partial v_2^{i4}}{\partial x_1} dx_2 - \int p^{i1} dx_1 - \int p^{i3} dx_1 \right)$$

где f'_{20} – возмущение x_2 -компоненты полной силы, действующей на периметр без учета гидростатического давления.

Из (1.1), (1.5), (1.6) следуют выражения

$$\begin{aligned} v_1 &= \varphi_2 + x_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} \\ v_2 &= -x_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}, \quad p = -2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Исключив φ_1 с помощью краевых условий (1.7)–(1.9), получим

$$\frac{\partial v_1^{i(2l-1)}}{\partial x_2} = 2q_{22}^{i(2l-1)}, \quad \frac{\partial v_2^{i(2l)}}{\partial x_1} = -1 - 2 \frac{\partial \varphi_2^{i(2l)}}{\partial x_2}; \quad l=1,2 \quad (2.6)$$

Подставляя (2.5), (2.6) в (2.4), имеем

$$\begin{aligned} f'_{10} &= 2 \sum_{i=1}^{N+1} \left(\int q_{22}^{i1} dx_1 + \int q_{22}^{i3} dx_1 - \int q_{21}^{i2} dx_2 + \int q_{21}^{i4} dx_2 \right) \\ f'_{20} &= 2 \int_L \frac{\partial \varphi_2}{\partial s} ds \end{aligned}$$

Полагая в (2.2) $p = 2$, получим $f'_{10} = 0$, также имеет место $f'_{20} = 0$, поскольку в силу невозмущенности потока вдали от тел $\varphi_2 = 0$ при $x_1 = \pm\infty$. Таким образом, связанное с присутствием движущихся тел возмущение главного вектора сил, действующих со стороны потока на плоскость и тела, равно нулю.

Полученный результат не является неожиданным, поскольку гидравлическое сопротивление гладкой и шероховатой труб совпадают, когда масштаб шероховатости меньше толщины вязкого подслоя, и обтекание элементов шероховатости описывается уравнением (1.1) или его пространственным аналогом [13].

Рассмотрим связь моментов сил, действующих со стороны потока на элементы границы, с (2.2). Пусть m^{ij} – момент сил, действующих на j -й элемент i -го фрагмента относительно O_i ($i = 1, \dots, N$), а m_0^{N+1} – момент сил, действующих на $(N+1)$ -й фрагмент относительно начала координат O (фиг. 1). С учетом (1.4) запишем

$$\begin{aligned} m^{i(2l)} &= \int \left((-1)^l x_2 p^{i(2l)} + \delta_{1e} d_i \frac{\partial v_2^{i(2l)}}{\partial x_1} \right) dx_2 \\ m^{i(2l-1)} &= \int \left((a_i + d_i - x_1) p^{i(2l-1)} - (1 - \delta_{1e}) h_i \frac{\partial v_1^{i(2l-1)}}{\partial x_2} \right) dx_1 - (1 - \delta_{1l}) h_i d_i \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$l = 1, 2; \quad \delta_{11} = 1, \quad \delta_{12} = 0$$

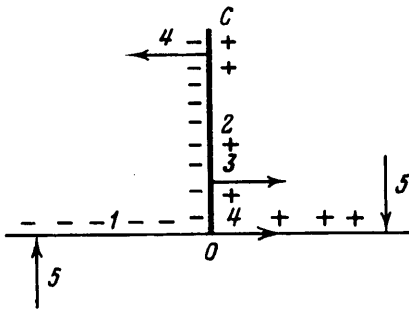
$$m_0^{N+1} = - \int x_1 p^{(N+1)1} dx_1$$

После приведения системы сил к центру O [14] получим выражение для главного момента сил относительно O

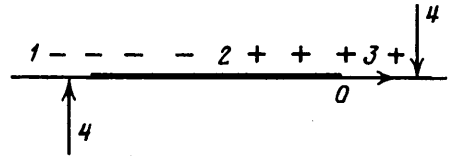
$$m_0 = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^4 \left(m^{ik} + (a_i + d_i) f_2^{ik} \right) + m_0^{N+1} \quad (2.8)$$

Используя непрерывность φ_p в угловых точках, невозмущенность потока вдали от тел, а также краевые условия (1.7)–(1.9), получим

$$\begin{aligned} m^{i1} &= 2 \int q_{12}^{i1} dx_1 + 2(a_i + d_i - a_{i-1} - d_{i-1}) \varphi_2^{i1}(a_{i-1} + d_{i-1}) - 2d_i \varphi_2^{i1}(d_i) \\ m^{i2} &= -2 \int q_{11}^{i2} dx_2 - 2d_i (\varphi_2^{i3}(a_i) - \varphi_2^{i1}(a_i)) - d_i h_i \end{aligned}$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Фиг. 2. Скольжение тела нулевой ширины и конечной высоты: 1 – удерживающая плоскость; 2 – тело; 3 – направление скольжения тела; 4 – пара сил, действующая на тело; 5 – пара сил, действующая на плоскость

Фиг. 3. Скольжение тела нулевой высоты и конечной ширины: 1 – удерживающая плоскость; 2 – тело; 3 – направление скольжения тела; 4 – пара сил, действующая на плоскость

$$m^{i3} = 2 \int q_{12}^{i3} dx_1 + 2d_i \varphi_2^{i3}(a_i) + d_i h_i - 2u_i d_i, \quad m^{i4} = 2 \int q_{11}^{i4} dx_2 \quad (2.9)$$

$$m_0^{N+1} = 2 \int q_{12}^{(N+1)1} dx_1 - 2(d_N + d_N) \varphi_2^{(N+1)1}(d_N + d_N)$$

$$\sum_{k=1}^4 (a_i + d_i) f_2^{ik} = 2(a_i + d_i) (\varphi_2^{(i+1)1}(a_i + d_i) - \varphi_2^{i1}(a_{i-1} + d_{i-1})), \quad i = 1, \dots, N$$

После подстановки (2.9) в (2.8) имеем

$$m_0 = 2 \sum_{i=1}^{N+1} \left(\int q_{12}^{i1} dx_1 + \int q_{12}^{i3} dx_1 - \int q_{11}^{i2} dx_2 + \int q_{11}^{i4} dx_2 \right) - 2 \sum_{i=1}^N u_i d_i$$

Учитывая (2.2), при $p = 1$ получим

$$m_0 = -2 \sum u_i d_i$$

Запишем в размерном виде это же выражение для главного момента M_0 , действующего со стороны жидкости на плоскость и движущиеся тела

$$M_0 = -2\mu \sum_{i=1}^N U_i D_i \quad (2.10)$$

В полученное выражение не вошли градиент скорости набегающего потока и высоты тел. Существенны лишь скорость и ширина каждого из тел, а также вязкость жидкости.

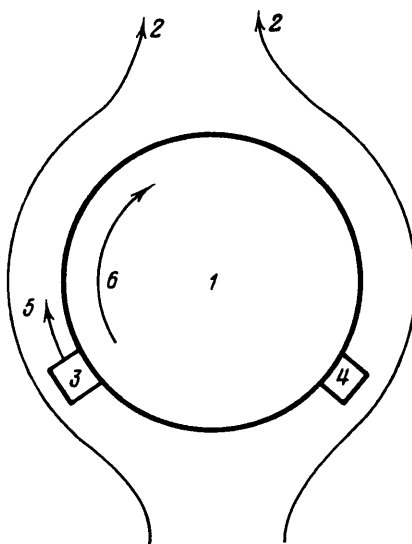
Таким образом, следствием равенства нулю полного заряда, соответствующего потенциалу φ_1 , является существование главного момента сил в форме (2.10).

Полученные результаты справедливы также для тел, одна часть границы которых совпадает с отрезком оси x_1 , а вторая часть описывается однозначной функцией x_1 , поскольку каждое из таких тел может быть с любой точностью аппроксимировано системой прямоугольников. При этом (2.10) под D_i следует понимать протяженность вдоль направления скольжения области контакта i -го тела и плоскости.

Для выяснения механизма возникновения момента M_0 рассмотрим два предельных случая скольжения одного тела.

В первом случае предположим, что тело имеет нулевую ширину и конечные высоту и скорости (фиг. 2), знаками плюс и минус отметим области с повышенным и пониженным давлением. При этом за счет разности давления справа и слева от точки O на плоскость будет действовать отрицательный момент. С другой стороны, вслед-

Фиг. 4. Скольжение малой частицы вдоль поверхности большой частицы в потоке: 1 – частица большого диаметра; 2 – линия тока жидкости; 3 – малая частица, скользящая по поверхности большой частицы; 4 – малая частица, закрепленная на поверхности большой частицы; 5 – направление скольжения подвижной частицы; 6 – направление вращения большой частицы



ствии движения на отрезке OC давление будет испытывать скачок, благодаря чему возникнет компенсирующий положительный момент, действующий на OC . В результате, согласно (2.10), главный момент $M_0 = 0$.

Во втором случае предположим, что тело имеет нулевую высоту и конечные ширину и скорость. При этом также имеет место перенос массы и импульса слева направо (фиг. 3) благодаря касательным напряжениям на перемещающемся отрезке. Это приведет за счет образующегося перепада давления к возбуждению отрицательного момента, действующего на плоскость. Однако в отличие от предыдущего случая компенсирующий положительный момент, действующий на тело, будет отсутствовать, поскольку плечо касательных напряжений относительно O , действующих на тело, равно нулю. В результате на систему плоскость – тело действует отрицательный момент, что и отражено в (2.10).

В общем случае, когда высота и ширина отличны от нуля, имеет место частичная компенсация отрицательного момента, действующего на плоскость.

Таким образом, возникновение момента M_0 связано с переносом импульса касательными напряжениями, действующими со стороны грани тела, параллельной плоскости, на поток.

3. Скольжение и вращение частиц суспензии. Наличие вращающего момента M_0 позволяет более глубоко исследовать взаимодействие частиц в суспензии. Так, в условиях блочного роста кристаллов, когда мелкие кристаллы ($D \leq 1$ мкм) агрегируют с крупными ($D \sim 100$ мкм), до момента закрепления имеет место скольжение малого кристалла по поверхности большого. На фиг. 4 стрелками показаны линии тока жидкости, обтекающей частицу большого диаметра, и направление скорости скольжения малой частицы, расположенной в левой части рисунка. Для подчеркивания важности процесса скольжения в правой части рисунка симметрично помещена малая частица, жестко связанная с большой частицей. Принимая приближенно поверхность большой частицы в окрестности малой частицы за плоскость и применяя (2.10), получим, что вращение большой частицы, возбуждаемое связанным со скользящей частицей моментом M_0 , увеличивает скорость перемещения скользящей частицы в неподвижной невращающейся системе координат, связанной с центром большой частицы. Таким образом, реакцией системы на процесс скольжения является уменьшение времени достижения скользящей частицей кормовой точки, в которой скольжение прекращается.

Заключение. Обмен импульсом и моментом импульса между сдвиговым потоком вязкой жидкости, с одной стороны, и плоскостью, содержащей произвольное число скользящих вдоль нее тел, с другой стороны, характеризуется следующими особенностями.

Связанное с присутствием тел возмущение главного вектора сил, действующих на тела и плоскость, равно нулю. Причем этот вывод не зависит от скоростей скольжения тел. В отличие от главного вектора сил главный вращающий момент, действующий на тела и плоскость, отличен от нуля и линейно связан со скоростями скольжения тел и протяженностями областей контакта тел и плоскости.

Приложение полученных результатов к качественному анализу процессов скольжения и вращения частиц суспензии приводит к следующему выводу. Реакцией системы, состоящей из малой частицы, скользящей по поверхности большой частицы, является уменьшение времени достижения малой частицей положения на поверхности большой частицы, в котором скольжение невозможно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дерягин Б.В., Чураев Н.В., Муллер В.М. Поверхностные силы. М.: Наука, 1985. 399 с.
2. Бакли Д. Поверхностные явления при адгезии и фрикционном взаимодействии. М.: Машиностроение, 1986. 359 с. (*Buckley D.H. Surface effects in adhesion, friction, wear, and lubrication, Tribology series, 5. Amsterdam; Oxford, N.Y.: Elsevier Scient. Publ. Co., 1981*).
3. Слезкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: Гостехиздат, 1955. 520 с.
4. Poiseuille J. Memoires savants etrangers. Paris, 1846. V. 9. P. 433–544.
5. Кикнадзе Г.И., Краснов Ю.К. Эволюция смерчеобразных течений вязкой жидкости // Докл. АН СССР. 1986. Т. 290. № 6. С. 1315–1319.
6. Reeks M.W., Swailes D.C. The near wall behavior of particles in a simple turbulent flow with gravitational settling and partially absorbing walls // Proc. 2nd Intern. Conf. on Multiphase Flow, 95. Kyoto, 1955. Kyoto, Japan, P. MO3 – 35, MO3 – 40.
7. Pusey P.N. Liquids, freezing and the glass transition. / Ed. Hansen J.P., Levesque D. Amsterdam; 1991. 942 p.
8. Palberg T., Striecher K. Resonant stick-slip motion in a colloidal crystal // Nature. 1994. V. 367. № 6458. P. 51–54.
9. Зимон А.Д. Адгезия пыли и порошков. М.: Химия, 1967. 372 с.
10. Magnee A. Modelization of damage by abrasion // Wear. 1993. V. 162–164. Pt B. P. 848–855.
11. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 724 с.
12. Курант Р. Уравнение с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с. (Курант Р., Гилберт Д. Методы математической физики. Т. 2.)
13. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969. 744 с.
14. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. Ч. 1. М.: Наука, 1972. 467 с.

Москва

Поступила в редакцию
7. VIII. 1995