

УДК 532.5.013.4:536.24

© 1997 г. Д.А. ВЕТЮКОВ, А.И. ОСИПОВ, А.В. УВАРОВ

КОНВЕКТИВНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПРИ ОБЪЕМНОМ ЭНЕРГОВЫДЕЛЕНИИ

Решена задача о конвективной неустойчивости плоского слоя жидкости, ограниченного твердыми стенками, при нагреве в узком слое, расположенному внутри рассматриваемого объема параллельно стенкам. Найдены критерии неустойчивости, зависящие от положения нагреваемого слоя и чисел Рэлея верхнего и нижнего слоев. Проведено сравнение с результатами по устойчивости плоского слоя с равномерным энерговыделением внутри объема.

В классической задаче Бенара об устойчивости плоского слоя жидкости параметром, определяющим потерю устойчивости, является поток тепла через систему [1, 2]. В отсутствие объемного энерговыделения поток тепла внутри системы является постоянной величиной. Однако в последнее время в связи с развитием лазерной физики, физики газового разряда и других областей интерес стали представлять системы с энерговыделением внутри объема. В таких системах градиент температуры как функция координат может менять свой знак и известные критерии устойчивости к этим системам неприменимы.

Задачи о конвективной устойчивости горизонтального плоского слоя при объемном энерговыделении, не зависящем от возмущений, рассматривались в [3] (см. также [2, 4]). Отметим также работы по исследованию конвективной неустойчивости химически активных сред ([5], см. также обзор [4]) и колебательно-неравновесного газа [6]. Эти исследования требуют знания кинетической схемы накачки энергии и результат во многом зависит от этой схемы. В то же время существует большой класс задач, где энерговыделение, определяемое, например, лазерным излучением, сосредоточено в малой области исследуемого объема (см. эксперимент [7]). В этом случае зависимость энерговыделения от возмущений не столь существенна (по крайней мере для длин волн, много больших линейных размеров зоны энерговыделения) и основную роль играет геометрия задачи. Наибольший практический интерес представляют сферический и цилиндрический случаи, однако отдельного рассмотрения заслуживает плоская задача, поскольку большинство решенных задач относится к этому случаю и имеется возможность для сравнения.

Задача об устойчивости плоского слоя однокомпонентной жидкости принципиально отличается от задач по конвективной неустойчивости двухслойной системы. Наблюдаемые в последнем случае эффекты, а именно неустойчивость при нагреве сверху [8] и появление колебательных движений при нагреве снизу [9], целиком определяются различием в физических свойствах жидкостей [10], т.е. нерэлеевским механизмом появления неустойчивости. Для анализа именно этих эффектов в работе [10] была численно рассчитана устойчивость системы вода – ртуть с тепловыделением на границе. В такой системе возможно также и возникновение рэлеевского механизма конвекции, но из-за большой разницы в локальных числах Рэлея для ртути и воды ртуть остается практически неподвижной и неустойчивость возникает при достижении критического числа Рэлея для слоя воды (это отмечается и в самой работе [10]). Однородная среда с локальным тепловыделением в этом смысле является принципиально иной системой.

1. Постановка задачи. Рассмотрим горизонтальный плоский слой жидкости, ограниченный твердыми стенками с температурами верхней и нижней поверхностей, равными соответственно T_1 и T_2 .

На некотором расстоянии от границ параллельно им расположен плоский слой, выделяющий (или поглощающий) энергию. Этот слой "прозрачен" для гидродинамических возмущений и обеспечивает выделение (поглощение) тепла с мощностью Q на единицу площади (роль нагревающего слоя может играть, например, токопроводящая тонкая сетка). Положение излучающего слоя определяется параметром S , равным отношению толщины верхнего слоя к толщине всего слоя.

Ось z направим вверх по нормали к граничным плоскостям, точка $z = 0$ соответствует положению энерговыделяющей поверхности.

В стационарном режиме в покоящемся газе температура среды определяется уравнением

$$-\lambda \frac{d^2 T}{dz^2} = Q\delta(z) \quad (1.1)$$

где λ – коэффициент теплопроводности, и условием постоянства давления $p = \text{const}$.

Профиль температуры $T(z)$ будет представлять собой два отрезка прямых с общей точкой при $z = 0$ и разными наклонами.

В приближении Буссинеска [1, 2] уравнения непрерывности, движения и энергии для возмущений могут быть записаны в виде

$$\operatorname{div} \mathbf{v}' = 0 \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} = -\alpha g T' - \frac{\operatorname{grad} p'}{\rho} + \mathbf{v} \Delta \mathbf{v}' \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = \chi \Delta T' \quad (1.4)$$

где α – коэффициент теплового расширения, g – ускорение свободного падения, $\chi = \lambda / (\rho c_p)$ – коэффициент температуропроводности, c_p – теплоемкость при постоянном давлении, ν – коэффициент кинематической вязкости, \mathbf{v} – скорость. Штрихами обозначены отклонения гидродинамических параметров от стационарных значений.

Границным условиям для \mathbf{v}' на верхней и нижней плоскостях соответствуют условия прилипания и постоянства температуры

$$v_x' = 0, \quad v_y' = 0, \quad v_z' = 0, \quad T' = 0 \quad (1.5)$$

На энерговыделяющей поверхности

$$z = 0; \quad v_{x1}' = v_{x2}', \quad v_{y1}' = v_{y2}', \quad v_{z1}' = v_{z2}', \quad T_1' = T_2'; \quad p_1' = p_2';$$

$$\frac{\partial v_{x1}'}{\partial z} = \frac{\partial v_{x2}'}{\partial z}; \quad \frac{\partial v_{y1}'}{\partial z} = \frac{\partial v_{y2}'}{\partial z}; \quad \frac{\partial T_1'}{\partial z} = \frac{\partial T_2'}{\partial z} \quad (1.6)$$

Равенство градиентов скоростей соответствует условию равенства тангенциальных напряжений на сетке, а последнее из условий, соответствующее равенству флюктуационных потоков тепла, справедливо лишь при постоянной (не варьируемой) мощности энерговыделения. Нарастающие во времени возмущения, удовлетворяющие системе уравнений (1.2)–(1.4) и граничным условиям (1.5), (1.6), означают неустойчивость.

2. Нормальные возмущения и собственные значения. Перейдем к безразмерным переменным. В качестве единиц расстояния и времени используем величины h и h^2/ν (h – ширина слоя).

Поскольку параметры невозмущенной задачи не зависят от времени и координат x и y , решение задачи для возмущений можно искать в виде [2]

$$A'(z)\exp(-\omega t + ik_x x + ik_y y) \quad (2.1)$$

В дальнейшем будем обозначать штрихами амплитуды в зависимости (2.1).

Систему уравнений (1.2)–(1.4) сведем к одному уравнению относительно переменной ν_z' [2, 3]

$$(\omega Pr + D^2 - k^2)(\omega + D^2 - k^2)(D^2 - k^2)\nu_{zi}' = -k^2 R \nu_z' \quad (2.2)$$

$$D = \frac{d}{dz}, \quad Pr = \frac{\nu}{\chi}, \quad k^2 = k_x^2 + k_y^2, \quad R = -\frac{g\alpha h^4}{\chi\nu} \frac{dT}{dz}$$

Здесь $i = 1, 2$ соответствуют значениям ν в верхнем и нижнем слоях соответственно, Pr – число Прандтля, R – число Рэлея.

Во всех перечисленных работах, где исследовались однокомпонентные системы с тепловыделением, изучалась монотонная устойчивость, т.е. устойчивость по отношению к определенному классу возмущений, для которых $\text{Im}\omega = 0$ (см., например, [2, с. 281]). Это ограничение исследуемой области неустойчивости обосновано для $R = \text{const}$, поскольку анализ возможных значений ω для плоского слоя в этом случае приводит к выводу, что при $R > 0$ (подогрев снизу) величина ω действительна, а при $R < 0$ ω может иметь мнимую часть, но при этом $\text{Re}\omega > 0$ и такие возмущения затухают ([11], см. также [2]). Обобщение выводов [11] на произвольную полость сделано в работе [12], однако трудно представить, как можно практически реализовать условие $R = \text{const}$ при хорошо проводящих границах для произвольной полости. В работе [3], где изучалась конвекция при объемном энерговыделении и $R \neq \text{const}$, применимость условия $\text{Im}\omega = 0$ обосновывалась ссылкой на выводы [11], однако в более поздних работах отмечалось, что общей теории, определяющей выполнимость условия $\text{Im}\omega = 0$ для $R \neq \text{const}$, не существует [5]. Монотонные возмущения рассматриваются и в данной работе, однако вопрос о возможности существования в однокомпонентных средах с энерговыделением растущих периодических возмущений, для которых $\text{Im}\omega \neq 0$, по-видимому, на сегодняшний день следует считать открытым. Для монотонных возмущений в критическом режиме $\text{Re}\omega = 0$ и $\omega = 0$.

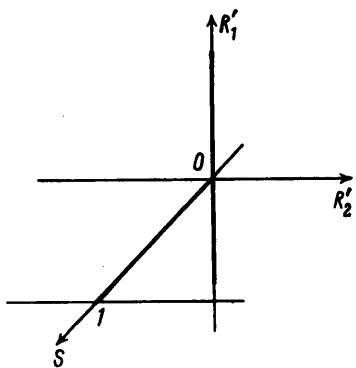
Задача об устойчивости плоского слоя с энерговыделяющей поверхностью сводится к решению системы двух уравнений 6-го порядка

$$(D^2 - k^2)^3 \nu_{zi}' = -R_i k^2 \nu_{zi}' \quad (i = 1, 2) \quad (2.3)$$

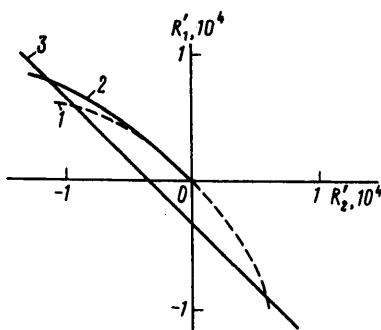
Границное условие $T' = 0$ на твердых поверхностях преобразуется в граничное условие для переменной ν_z [2]

$$(D^2 - k^2)^2 \nu_{zi}' = 0 \quad (2.4)$$

Границные условия (1.6) на энерговыделяющей поверхности также можно переписать в форме граничных условий для ν_z' . Из уравнений (1.2) и (1.6) следует, что $d\nu_{z1}'/dz = d\nu_{z2}'/dz$. Продифференцировав уравнение (1.2) по z , получим с учетом (1.6), что и вторая производная ν_z' по z непрерывна. Третья производная ν_z' по z также оказывается непрерывной. Это следует из уравнения (1.2), если его продифференцировать по z дважды и учесть непрерывность $\partial^2 \nu_x'/\partial z^2$ и $\partial^2 \nu_y'/\partial z^2$, вытекающую из (1.3) и (1.6). Если применить операцию rot rot к уравнению (1.3), использовать (2.1) и условие $\omega = 0$,



Фиг. 1



Фиг. 2

Фиг. 1. Пересечение критической поверхности, разграничающей область устойчивых и неустойчивых состояний, с осями координат

Рис. 2. Зависимость R'_1 от R'_2 в критическом режиме. Энерговыделяющая поверхность расположена в центре ($S = 0,5$): 1 – расчет, 2 – данные [3], 3 – прямая, соответствующая равным температурам на стенах

то для v'_z получается уравнение

$$\frac{\partial^4 v'_z}{\partial z^4} - 2k^2 \frac{\partial^2 v'_z}{\partial z^2} + k^4 v'_z - \frac{\alpha g k^2 T'}{v} = 0 \quad (2.5)$$

Из (2.5) и из продифференцированного по z уравнения (2.5) следует, что четвертая и пятая производные v'_z по z также непрерывны на тепловыделяющей поверхности.

Отметим, что шестая производная $\partial^6 v'_z / \partial z^6$ терпит разрыв, если $v'_z|_{z=0} \neq 0$. Это следует из уравнения (2.3).

Таким образом, на тепловыделяющей поверхности непрерывна величина v'_z и первые пять производных v'_z по z . Следовательно, задача сводится к решению системы двух уравнений 6-го порядка с 12 граничными условиями для комплексных величин v'_{z1} и v'_{z2} .

Эта система уравнений зависит от трех параметров R_1 , R_2 и S и определяет в пространстве R_1 , R_2 и S критическую поверхность, отделяющую режим теплопереноса в покоящейся жидкости от конвективного теплопереноса. Как и в классической задаче Бенара, полученная критическая поверхность дает универсальную связь R_1 , R_2 и S вида $\Phi(R_1, R_2, S) = \text{const}$ (в задаче Бенара $R_1 = R_2 = R_c \approx 1708$ при $0 < S < 1$). Реально задаваемые температуры верхней и нижней стенок T_1 и T_2 , положение сетки S , а также мощность энерговыделения Q позволяют легко рассчитать значения R_1 и R_2 , а положение точки R_1 , R_2 и S относительно критической поверхности позволяет ответить на вопрос об устойчивости системы.

Общий вид критической поверхности может быть получен из качественных соображений. Выберем в качестве переменных $R'_1 = R_1 - R_c$; $R'_2 = R_2 - R_c$ и S . Классической задаче Бенара в этих переменных соответствует отрезок прямой $R'_1 = R'_2 = 0$, $0 < S < 1$, который будет лежать на критической поверхности (фиг. 1). Вид критической поверхности вблизи $S = 1$ определяется из следующих соображений. При

$S \rightarrow 1$ влияние нижнего слоя уменьшается и в пределе $S = 1$ критическое значение $R'_1 = 0$ получается независимо от величины R'_2 (прямая $R'_1 = 0, S = 0$). Аналогичная картина наблюдается и при $S \rightarrow 0$. В этом случае устойчивость определяется поведением нижнего слоя, поэтому при $S = 0$ критическое значение $R'_2 = 0$ достигается при произвольных величинах R'_1 (прямая $R'_2 = 0, S = 0$). Примерный вид поверхности можно получить, если при движении от точки $S = 0$ к точке $S = 1$ прямую $R'_2 = 0, S = 0$ разворачивать на 90° против часовой стрелки (см. фиг. 1).

Эти качественные выводы подтверждаются численными расчетами, позволяющими оценить влияние нижней части на возникновение конвекции. Особый интерес представляет сечение критической поверхности при $S = 0,5$. В этом случае можно сравнить полученные результаты с результатами по исследованию конвективной устойчивости при постоянной мощности объемного энерговыделения [3], поставив в соответствие полученному в [3] параболическому профилю температуры профиль, состоящий из двух отрезков прямых, если считать, что температуры на границах совпадают и равны суммарные мощности энерговыделения.

На фиг. 2 представлены результаты численного расчета сечения критической поверхности при $S = 0,5$ (штриховая кривая 1), которая проходит несколько ниже критической зависимости, полученной в [3] (кривая 2). Эту разницу легко объяснить. В модели равномерного объемного энерговыделения часть энергии выделяется вблизи стенок, что увеличивает градиент температуры только вблизи стенок и уменьшает среднюю величину градиента по объему по сравнению с рассмотренной моделью, где все тепло при $S = 0,5$ выделяется в центре слоя. В симметричном случае, когда температуры стенок совпадают, $R'_1 = -R'_2 - 2R_c$ (прямая 3 на фиг. 2) и неустойчивость наступает при $R_1 = -R_2 \approx 7200$ (в [3] $R_q = R_1 - R_2 \approx 18700$).

Таким образом, возникновение неустойчивости возможно как за счет увеличения разности температур на твердых поверхностях, так и за счет увеличения энерговыделения в центре, но последний способ требует создания существенно большей разности температур, поскольку критическое число Рэлея в несколько раз больше, чем $R_c \approx 1708$.

В окрестности $R_{1,2} \sim R_c$ критическая кривая 1 может быть аппроксимирована прямой линией, проходящей под углом -45° . С уменьшением R_1 величина R_2 увеличивается ровно настолько, насколько R_1 отклоняется от R_c , и начало конвекции при $R_{1,2} \sim R_c$ определяется условием равенства среднего градиента температуры по двойному слою критическому градиенту температуры в отсутствие тепловыделяющей поверхности: $0,5(R_1 + R_2) = R_c$.

Рассмотренная модель позволяет проанализировать также влияние смещения источника тепловыделения (случай $S \neq 0,5$) на возникновение неустойчивости.

На фиг. 3 представлено сечение критической поверхности при $S = 0,8$ (сплошная линия). Из сравнения фиг. 2 и 3 видно, что влияние R_2 на устойчивость гораздо слабее. Рассмотрим случай равных температур на стенках $T_1 = T_2$. Тогда

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{S-1}{S} \quad (2.6)$$

Для $S = 0,8$ получим $R_1 = -0,25R_2$ и $R'_1 = -0,25R'_2 - 1,25R_c$ (штриховая прямая). Из фиг. 3 видно, что неустойчивый режим возникает в этом случае при $R'_1 \approx 600$ ($R_1 \approx 2300$), т.е. в этом случае влияние нижней части не очень велико. Сравним стабилизирующее влияние нижнего слоя жидкости с влиянием слоя тяжелой жидкости или твердой стенки. Для этого нужно рассчитать стандартное число Рэлея

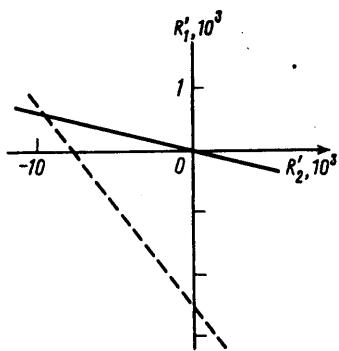


Рис. 3

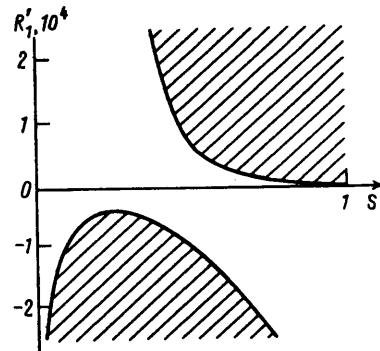


Рис. 4

Фиг. 3. Зависимость R'_1 от R'_2 в критическом режиме. Энерговыделяющая поверхность смещена из центра ($S = 0,8$); штриховая прямая соответствует равным температурам на стенах

Рис. 4. Зависимость R'_1 от S в критическом режиме при равных температурах на стенах

верхнего слоя

$$R'_1 = -\frac{g \alpha h_1^4}{\chi v} \frac{dT}{dz} = R_1 S^4 \quad (2.7)$$

Эта величина ≈ 940 в рассматриваемом примере, а для твердой стенки $R'_1 = R_c = 1708$. Таким образом, наличие области с обратным градиентом температуры стабилизирует систему, но не так сильно, как уменьшение ширины слоя.

Поскольку случай $T_1 = T_2$ представляет наибольший практический интерес, рассмотрим его подробнее. На фиг. 4 заштрихованные области соответствуют неустойчивым режимам при $T_1 = T_2$. Из анализа фиг. 4 можно сделать два вывода. Во-первых, одному и тому же значению S соответствуют две области неустойчивых режимов.

В области $R'_1 < 0$ неустойчивость возникает за счет R_2 , которое связано с R_1 равенством (2.6). Во-вторых, смещение тепловыделяющей поверхности существенно влияет на конвективную устойчивость. При $S = 0,5$ $R_{1c} \sim 7000$, но уже при $S = 0,6$ $R_{1c} \sim 3000$. С другой стороны, смещение сетки в противоположную сторону ($S = 0,4$) увеличивает R_{1c} до 21000. Таким образом, опять можно указать два способа создания неустойчивости – смещение сетки и увеличение энерговыделения, причем второй способ требует существенно большей разности температур.

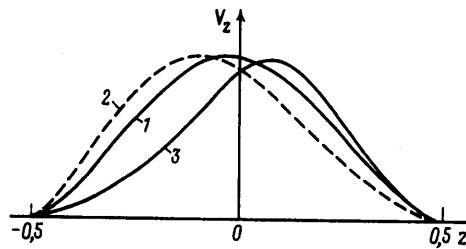
Приближенно критическую поверхность для не очень больших значений чисел Рэлея ($\sim R_c$) можно аппроксимировать функцией

$$\frac{R'_1}{R'_2} = \left(\frac{S-1}{S} \right)^3 \quad (2.8)$$

В этом случае возникновение неустойчивости системы при любом S можно связать с определенным значением эффективного числа Релея: $R'_e = R'_2 (1-S)^3 + R'_1 S^3$.

Значение $R'_e = 0$ соответствует критическому режиму, при $R'_e > 0$ система будет неустойчивой, при $R'_e < 0$ – устойчивой.

Возникновение неустойчивости сопровождается появлением поля скоростей. Анализ распределения $v'_z(z)/v'_{zmax}$ позволяет лучше понять механизм развития неустойчи-



Фиг. 5. Профили скорости: 1 – $S = 0,5; R_1 = 3200; R_2 = 50$; 2 – $S = 0,2; R_1 = 65000; R_2 = -1600$ (энерговыделяющая поверхность расположена в точке $z = 0,3$); 3 – $S = 0,5; R_1 = 7200; R_2 = -7200$

ности. При $R_1 = R_2$ можно отдельно рассматривать симметричное и антисимметричное решения уравнений (2.3), однако при $R_1 \neq R_2$ одновременно должны присутствовать как симметричная, так и антисимметричная компоненты скорости. На фиг. 5 изображены зависимости $V_z = v'_z(z)/v'_{z\max}$. Профиль скорости несимметричен относительно энерговыделяющей поверхности и нижняя стабилизирующая часть слоя существенно затрагивается возмущениями, что понижает порог устойчивости. Например, для кривой 3 величина $R_1^r \approx 450$. Если заменить нижний стабилизирующий слой твердой стенкой (или тяжелой жидкостью), где возмущения скорости отсутствуют, неустойчивость возникла бы при большей разности температур (для твердой стенки $R_1^r = 1708$).

Заключение. Проявление неустойчивости можно инициировать тремя способами: 1) изменением разности температур на границах, 2) смещением нагревающей поверхности вниз, 3) увеличением мощности на энерговыделяющей поверхности. Реализация каждого из этих способов снижает порог устойчивости, однако первые два требуют создания гораздо меньших градиентов температуры по сравнению с третьим.

Если нагревающая поверхность расположена в центре, то неустойчивые режимы возникают примерно в тех же условиях, что и при объемном энерговыделении, т.е. при тех же разностях температур на стенках и при том же суммарном энерговыделении. Однако критический уровень мощности энерговыделения для режимов, в которых основную роль играет энерговыделение внутри объема, несколько ниже в рассматриваемом случае из-за того, что средние градиенты температуры больше.

Наличие нижнего слоя с обратным градиентом температуры стабилизирует систему, однако эффект стабилизации меньше, чем при замене нижнего слоя твердой поверхностью.

При малых критических числах Рэлея ($R_{1,2} \sim 1700$) получены простые аналитические критерии появления неустойчивых режимов.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского Фонда фундаментальных исследований (95-01-00354а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Chandrasekhar S. Hydrodynamic and hydromagnetic stability. Oxford: Clarendon Press, 1961. 652 p.
2. Гершунин Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
3. Sparrow E.M., Goldstein R.J., Jonsson V.K. Thermal instability in a horizontal fluid layer: effect of boundary conditions and non-linear temperature profile // J. Fluid. Mech. 1964. V. 18. Pt 4. P. 513–528.

4. Гершунин Г.З., Жуховицкий Е.М., Непомнящий А.А. Устойчивость конвективных течений. М.: Наука, 1989. 319 с.
5. Jones D.R. The dynamic stability of confined, exothermically reacting fluids // Intern. J. Heat and Mass Transfer. 1973. V. 16. № 1. P. 157–167.
6. Уваров А.В., Осипов А.И., Пилипюк С.А., Соколов А.И. Конвективная неустойчивость неравновесного газа // Химическая физика. 1994. т. 13. № 8–9. С. 217–224.
7. Ullenbusch J. High pressure continuous optical discharges // Invited Papers 16th Intern. Conf. Phernom. Ionized Gases. Dusseldorf. Sept. Inst. Theoret Phys., 1983. P. 119–130.
8. Гершунин Г.З., Жуховицкий Е.М. О неустойчивости равновесия системы горизонтальных слоев несмешивающихся жидкостей при нагреве сверху // Изв. АН СССР. МЖГ. 1980. № 6. С. 28–34.
9. Гершунин Г.З., Жуховицкий Е.М. О монотонной и колебательной неустойчивости двухслойной системы несмешивающихся жидкостей, подогретой снизу // Докл. АН СССР. 1982. Т. 265. № 2. С. 302–305.
10. Непомнящий А.А., Симановский И.Б. Возникновение конвекции при нагреве сверху и тепловыделении на границе раздела // Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. № 3. С. 16–20.
11. Pellew A., Southwell R.V. On maintained convective motion in a fluid heated from below // Proc. Roy. Soc. London. ser. A. 1940. V. 176. № 966. P. 312–343.
12. Сорокин В.С. Вариационный метод в теории конвекции // ПММ. 1953. Т. 17. Вып. 1. С. 39–48.

Москва

Поступила в редакцию
14.XI.1994