

УДК 532.546

© 1997 г. А.А. БАРМИН, Д.И. ГАРАГАШ

О ФИЛЬТРАЦИИ ЭМУЛЬСИИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ С УЧЕТОМ МЕЖФАЗНОГО МАССООБМЕНА КОМПОНЕНТАМИ

Предложена новая модель фильтрации двух смешивающихся, взаимонерастворимых жидкостей с образованием эмульсии и адсорбцией жидких компонентов на скелет. Модель учитывает влияние межфазного массообмена на динамику эмульсии и активную пористость. Построено общее непрерывное решение одномерной модели и задачи о распаде разрыва. Рассмотрены режимы течения, образующиеся в задачах о вытеснении, зависящие от вида изотерм адсорбции и плотностей жидких компонент. Построены зависимости дебита от времени для режимов фронтального вытеснения и вытеснения с образованием зоны смеси (волны Римана) первоначальной пластовой жидкости и нагнетаемой жидкости. Эти зависимости, по крайней мере качественно, совпадают с экспериментальными данными [1] о первоначальном возрастании дебита даже на фоне снижения пластового давления, переходе через максимум и дальнейшем падении.

При разработке углеводородных пластов (нефтяных, газоконденсатных) и нагнетании в них воды на границе углеводородная жидкость – вода сильны дисперсионные эффекты [1–4], которые приводят к отрыву и перемешиванию капель обеих жидкостей и образованию эмульсии (однофазной жидкости, содержащей углеводородную жидкость и воду в качестве компонент). В [1] представлены различные экспериментальные данные о газоконденсатных месторождениях. Из которых следует, что даже при снижении пластового давления во время эксплуатации пласта выход конденсата либо остается на одном уровне, либо возрастает. Это объясняется эффектом вымыва конденсата из порового пространства коллектора внедряющейся водой с образованием водогазоконденсатной эмульсии перед фронтом вытесняющего вала. При этом существование водогазоконденсатной или водонефтяной эмульсии сопровождается массообменом составляющих эмульсии с твердым скелетом, в частности адсорбцией жидких компонент на скелет. В [4] было предпринято математическое исследование вытеснения нефти водой с образованием эмульсии с учетом адсорбции жидких компонент на скелет и диффузией компонент. В постановке, принятой в [4], было традиционно пренебрежено влиянием адсорбции компонент на скорость продвижения эмульсии и изменение пористости.

В настоящей работе создана модель фильтрации двух жидкостей с образованием эмульсии, учитывающая влияние межфазного массообмена жидких компонент (адсорбции) на динамику эмульсии и активную пористость.

Построено общее непрерывное решение одномерной модели и задачи о распаде разрыва. Показано, что эволюционность разрывов определяется только значениями водонасыщенности на разрыве. Рассмотрены различные режимы течения, имеющие место при вытеснении и зависящие от вида изотерм адсорбции и плотностей жидких компонент. Для линейных изотерм возможны решения либо типа фронтального вытеснения, либо с образованием расширяющейся зоны смеси первоначальной пластовой жидкости и вытесняющей воды. Для нелинейных изотерм Ленгмюра возможно вытеснение типа классического решения Баклея–Левретта [5] в виде фронта и присоединенной к нему зоны смеси и другие типы вытеснения. Рассмотрена

краевая задача при заданном давлении на скважине и на контуре пласта. Ее общее непрерывное решение приведено в [6] применительно к задаче о фильтрации раствора в пористой среде.

1. Постановка задачи. Фильтрация двух смешивающихся взаимонерастворимых жидкостей (например, нефть и вода) с образованием эмульсии и адсорбцией жидких компонентов на скелет описывается в крупномасштабном приближении, когда дисперсионными и диффузионными эффектами можно пренебречь по сравнению с конвективными, при условии несжимаемости и локального термодинамического равновесия эмульсии со скелетом. Уравнения баланса массы воды и нефти (как компонентов одной фазы – эмульсии), уравнение баланса массы скелета, изотермы адсорбции (которая полагается термодинамически равновесной) и закон движения Дарси для эмульсии имеют вид

$$\frac{\partial(m\rho_i s_i)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i s_i \mathbf{u}) = -\frac{\partial a_i}{\partial t} \quad (i = 1, 2) \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial((1-m)\rho_s)}{\partial t} = \frac{\partial a_1}{\partial t} + \frac{\partial a_2}{\partial t}, \quad s_1 = s, \quad s_2 = 1 - s, \quad a_i = m\rho_i f_i(s) \quad (1.2)$$

$$\mathbf{u} = -K\nabla p, \quad K = \frac{k}{\mu} \quad (1.3)$$

Здесь m – пористость, индекс 1 – вода, индекс 2 – нефть, ρ_s – плотность скелета, ρ_i – плотность i -го компонента, s – водонасыщенность, a_i – концентрация соответствующего компонента на скелете, которая связана с объемной долей этого же компонента в эмульсии изотермой адсорбции, \mathbf{u} – скорость Дарси; проницаемость k и вязкость μ эмульсии считаются постоянными.

Система (1.1)–(1.3) отличается от многочисленных традиционных рассмотрений задач с межфазным массообменом [4, 7–9] учетом влияния массообмена между фазами на динамику жидкости и активную пористость, которая после интегрирования уравнения баланса массы скелета (3) оказывается зависимой от концентрации компонентов в эмульсии. Такая постановка была применена к задаче фильтрации раствора примеси в пористой среде в [6].

2. Интегрирование системы уравнений в одномерной постановке и анализ поведения решения в зависимости от вида изотерм адсорбции. Проинтегрировав уравнение баланса скелета (1.2), получим

$$m = m_0(1 + r_1 f_1(s) + r_2 f_2(s))^{-1}, \quad r_i = \rho_i / \rho_s \quad (2.1)$$

где m_0 – активная пористость в отсутствие эмульсии. Уравнение (2.1) выражает зависимость активной пористости от концентраций компонентов в эмульсии, обусловленную адсорбцией этих компонентов на скелет.

Переходя к безразмерным переменным

$$x \rightarrow lx, \quad t \rightarrow Tt, \quad p \rightarrow Pp, \quad \mathbf{u} \rightarrow m_0 \frac{l}{T} \mathbf{u}, \quad m \rightarrow m_0 m, \quad K \rightarrow \frac{PT}{l^2 m_0} K$$

где l , T и P – характерные линейный размер, время и давление, система (1.1), (1.2), (2.1), (1.4) может быть приведена к виду

$$\operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{u}}{U(s)}\right) = 0, \quad \frac{\partial s}{\partial t} + L(s)\left(\frac{\mathbf{u}}{U(s)}, \nabla s\right) = 0 \quad (2.2)$$

$$m = (1 + r_1 f_1(s) + r_2 f_2(s))^{-1}, \quad \mathbf{u} = -K\nabla p \quad (2.3)$$

$$L(s) = \frac{U(s)}{B'(s) - sA'(s)}, \quad U(s) = \exp\left[\int^s \frac{ds}{B'(s) - sA'(s)}\right] \quad (2.4)$$

$$A(s) = m(1 + f_1(s) + f_2(s)), \quad B(s) = m(s + f_1(s))$$

Здесь штрих обозначает производную по s . При естественных ограничениях на вид функций $f_i(s)$: $0 \leq f_i(s) < 1$, $\text{sign}(f_i'(s)) = (-1)^{i-1}$, характеристическая скорость $L(s)$ положительна, а $U(s)$ может быть либо возрастающей, либо убывающей функцией в зависимости от $\text{sign}(A'(s)B'(s))$.

Уравнения (2.2) и (2.3) в одномерном случае в декартовых ($n = 1$), цилиндрических ($n = 2$) и сферических ($n = 3$) координатах приводятся к следующим:

$$\frac{\partial s}{\partial \tau} + L(s) \frac{\partial s}{\partial \xi} = 0, \quad ux^{n-1} dt = U(s) d\tau, \quad u = -K \frac{\partial p}{\partial x}, \quad d\xi = x^{n-1} dx \quad (2.5)$$

Решение первого из уравнений (2.5) $s = \Phi(\xi - L(s)\tau(t))$, Φ – произвольная функция и второе выражение в (2.5) представляют общее решение системы (1.1)–(1.3) относительно s и u в одномерном случае. Это решение описывает волны s , распространяющиеся во "времени" τ и пространстве ξ с характеристической скоростью $L(s)$, возмущающие скорость движения Дарси эмульсии u . Те волны, которые не приводят к опрокидыванию профиля водонасыщенности s (размазывающиеся), будем далее называть волнами Римана. Из (2.5) следует, что $\tau = \tau(t)$ – монотонная функция для течений со знакопостоянной скоростью. Заметим, что время $\tau(t)$ является, как и параметры s , u , неизвестным.

Произвольный начальный профиль концентрации в соответствии с (2.5) деформируется по-разному в зависимости от знака $L'(s)$. При $L'(s) > 0$ опрокидываются волны обводнения (в которых возрастает s), а при $L'(s) < 0$ – волны, в которых s убывает, при знакопеременной функции $L'(s)$ начальный профиль водонасыщенности s распадается на некоторую конфигурацию опрокидывающихся и размазывающихся волн. Рассмотрим характер поведения волн для различных изотерм, задающих адсорбцию воды и нефти из эмульсии на скелет.

Согласно (2.4), имеем

$$L'(s) = \alpha L^*(s), \quad \alpha = \frac{m^3(s) L^2(s)}{U(s)} > 0$$

$$L^*(s) = \frac{(h_1 f_2'' - h_2 f_1'')}{m} + 2 \left(\frac{f_2'(r_1 f_1 + 1) - f_1'(r_2 f_2 - 1)}{m} + \right. \\ \left. + r_1 h_2 (f_1')^2 - r_2 h_1 (f_2')^2 - (r_1 h_1 - r_2 h_2) f_1' f_2' \right) \quad (2.6)$$

$$h_1 = W f_1 + s, \quad h_2 = W f_2 + 1 - s, \quad W = W(s) = \Delta r s + r_2, \quad \Delta r = r_1 - r_2$$

причем $\text{sign}(L) = \text{sign}(L^*)$. В дальнейшем анализе этого раздела будут рассмотрены изотермы адсорбции, имеющие возрастающую зависимость от насыщенности соответствующих им компонент в эмульсии $df_i(s)/ds_i \geq 0$, $s_1 = s$, $s_2 = 1 - s$, т.е. $f_1' \geq 0$ и $f_2' \leq 0$.

В случае, когда одна из компонент не адсорбируется

$$L^*(s) = s f_2'' / m + 2 f_2' (-r_2 s f_2' + 1 / m), \quad f_1(s) = 0$$

$$L^*(s) = -(1-s) f_1'' / m + 2 f_1' (r_1 (1-s) f_1' + 1 / m), \quad f_2(s) = 0$$

Если отличная от нуля изотерма выпукла, $f_i'' < 0$, то в случае неадсорбируемости воды из эмульсии ($f_1 = 0$) и адсорбируемости нефти ($f_2' \leq 0$) имеем $L^*(s) < 0$, т.е. при вытеснении нефти или однородной водонефтяной эмульсии водой образуется расширяющаяся зона смеси (волна Римана). В случае неадсорбируемости нефти ($f_2 = 0$) и адсорбируемости воды ($f_1' \geq 0$) $L^*(s) > 0$ и возможно только фронтальное вытеснение.

Для вогнутой изотермы (например, Фрейндлиха, см. ниже) в рассматриваемом случае неадсорбируемости одной из компонентов эмульсии возможно законепостоянство $L^*(s)$ и, следовательно, решения в виде фронта и присоединенной волны Римана.

Для линейных изотерм адсорбции $f_1(s) = \Gamma_1 s, f_2(s) = \Gamma_2(1 - s)$ из (2.6) следует, что $\text{sign}(L') = \Gamma_1 - \Gamma_2$. Следовательно, при $\Gamma_1 > \Gamma_2$ волны обводнения опрокидываются и (в частности, в задаче о вытеснении нефти водяным валом) образуется фронт продвижения воды по пласту, а волны уменьшения s размазываются. При $\Gamma_1 < \Gamma_2$ волны обводнения размазываются (т.е. в задаче о вытеснении образуется расширяющаяся зона смеси воды и первоначальной эмульсии, содержащейся в пласте), а волны уменьшения s , наоборот, опрокидываются. При $\Gamma_1 = \Gamma_2$ волны s распространяются поступательно по потоку, не размазываясь и не опрокидываясь.

Для изотерм Ленгмюра

$$f_1(s) = N_1 \frac{\Gamma_1 s}{1 + \Gamma_1 s}, \quad f_2(s) = N_2 \frac{\Gamma_2(1 - s)}{1 + \Gamma_2(1 - s)}$$

выражение для $\text{sign}(L')$ существенно более сложное, поэтому оно исследовано при конкретных значениях параметров изотерм N_i, Γ_i . Так, при $r_1 = r_2 = 0,2, N_1 = N_2 = \Gamma_2 = 0,5, \Gamma_1 \in [0, \Gamma^*), \Gamma^* \cong 0,19$ $L' < 0$ при всех s , т.е. волны обводнения размазываются; а при $\Gamma_1 \geq \Gamma^*$ $L' > 0$ при $s \in [0, s^*)$ и $L' \leq 0$ при $s \in [s^*, 1]$, т.е. $L'(s)$ законепостоянна и первоначальная волна распадается на конфигурацию опрокидывающихся и размазывающихся волн.

В задачах двухфазной фильтрации двух несмешивающихся жидкостей насыщенность одной из фаз s определяется из уравнения вида (2.5), где вместо $L(s)$ фигурирует производная от функции Баклея–Леверетта $F(s)$ [5], $F'(s)$, характерный вид которой хорошо известен [9]. Характерный вид $F''(s)$ качественно идентичен виду $L'(s)$ при $\Gamma_1 \geq \Gamma^*$ (график убывающей от положительных до отрицательных значений зависимости, пересекающей ось, где $L' = 0$). Поэтому в рассматриваемой задаче фильтрации двух смешивающихся жидкостей с образованием эмульсии, в частности при вытеснении нефти или водонефтяной эмульсии водяным валом, при соответствующей начальной водонасыщенности s_0 реализуется решение типа классического решения Баклея–Леверетта в виде идущего впереди фронта, разделяющего воду и эмульсию, и присоединенной за ним волной Римана, которая является расширяющейся зоной смеси первоначальной эмульсии и нагнетаемой воды.

Для изотерм Фрейндлиха $f_1(s) = \Gamma_1 s^{n_1}, f_2(s) = \Gamma_2(1 - s)^{n_2}$ при $n_1 = n_2 = 2, \Gamma_2 = 0,5$ $L'(s)$ законепостоянна при всех значениях $\Gamma_1 \geq 0$ и в задаче о вытеснении возможны решения, противоположные решению Баклея–Леверетта: идущей впереди волны Римана и присоединенного к ней скачка водонасыщенности s .

3. Соотношения на разрыве, эволюционность и задача о распаде разрыва. Используя обычную процедуру, следующую из интегрального представления системы (1.1)–(1.2), выпишем соотношения на разрыве:

$$V_s[m(s + f_1(s))] = [su], \quad V_s[m(1 + f_1(s) + f_2(s))] = [u], \quad V_s = \frac{dx_s}{dt} \quad (3.1)$$

Здесь $[A]$ – скачок величины A , x_s – координата скачка. В системе координат, связанной с разрывом, уравнения (3.1) могут быть преобразованы к виду

$$q_{\pm} = (1 - s_{\mp}) \frac{[mf_1]}{[s]} - s_{\mp} \frac{[mf_2]}{[s]}, \quad q = \frac{u}{V_s} - m \quad (3.2)$$

где q – относительная скорость потока жидкой фазы через разрыв. При заданном состоянии перед разрывом (s_-, u_-) и водонасыщенности s_+ условия (3.2) определяют скорости u_+ и V_s , (значения пористости на разрыве m_{\pm} определяются по (2.1)).

Используя общий интеграл (2.5), соотношения (3.1) могут быть приведены к равенствам

$$d\xi_s = D_+ d\tau_+ = D_- d\tau_-, \quad D_{\pm} = \frac{U(s_{\pm})}{(m+q)_{\pm}}, \quad \xi_s = \frac{1}{n} x_s^n \quad (3.3)$$

Здесь $D_{\pm}(s_+, s_-)$ есть обобщенная скорость распространения разрыва относительно "времени переноса" τ_+ и τ_- в области за и перед разрывом. Из (2.3), (2.4) и (3.3) следует, что D_{\pm} – разностный аналог характеристической скорости $L(s)$ на разрыве, так как $D_{\pm} \rightarrow L(s_-)$ при $s_+ \rightarrow s_-$.

Рассмотрим условия эволюционности разрыва. Число соотношений на разрыве равно двум, а система (2.7), (2.8) располагает двумя семействами характеристик: $d\xi/d\tau = L(s)$, $dt = 0$. Характеристики второго семейства всегда уходящие в области перед и приходящие за разрывом, следовательно, для эволюционности характеристики первого семейства должны быть приходящими

$$\lambda_+ \geq V_s \geq \lambda_-, \quad \lambda_{\pm} = L(s_{\pm}) \frac{d\tau_{\pm}(t)}{dt} x_s^{1-n} = L(s_{\pm}) \frac{u}{U(s)} \quad (3.4)$$

Преобразовав (3.4) с помощью (2.4) и (3.2), получим

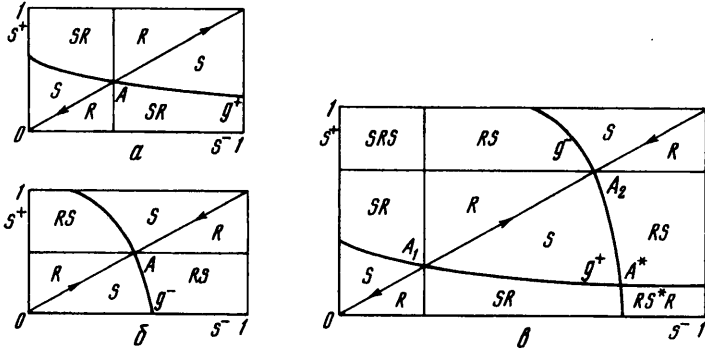
$$q_+ \geq Q(s_+), \quad q_- \leq Q(s_-), \quad Q(s) = m^2((1-s)f_1' - sf_2' + W(s)(f_1'f_2 - f_1f_2')) \quad (3.5)$$

где $W(s)$ определена в (2.6), q_{\pm} выражаются через s_+ , s_- в (3.2).

Рассмотрим кривые g^+ : $q_+(s_+, s_-) = Q(s_+)$, и g^- : $q_-(s_+, s_-) = Q(s_-)$, на плоскости s_+ , s_- , которые симметричны относительно прямой $s_+ = s_-$ (на которой в плоскости s_+ , s_- , очевидно, лежат интегральные кривые всех непрерывных решений – волн Римана). Прямая $s_+ = s_-$ является ветвью обеих кривых g^{\pm} , так как $q_{\pm} \rightarrow Q(s_-)$ при $s_+ \rightarrow s_-$. Из условий эволюционности (3.4) и (3.5) следует, что $V_s = \lambda_+$ вдоль g^+ и $V_s = \lambda_-$ вдоль g^- , т.е. эти кривые состоят из точек Жуге, в которых скорость разрыва совпадает с характеристической скоростью по одну из сторон разрыва. В связи с этим их свойством назовем g^{\pm} кривыми Жуге. Условия эволюционности в виде (3.5) задают области эволюционных разрывов на плоскости s_+ , s_- , разграниченные с областями неэволюционности кривыми Жуге g^{\pm} . В силу изложенного выше решение задачи о распаде разрыва может быть получено в терминах s_{\pm} независимо от значений скорости на разрыве u_{\pm} и представляется последовательностью точек на плоскости s_+ , s_- . Скорости u_{\pm} и V_s определяются затем из условий на разрыве при задании одной из них (например, u_+).

Для линейных изотерм адсорбции характеристическая скорость не имеет экстремумов и обе кривые Жуге состоят из одной ветви $s_+ = s_-$, поэтому, из теоремы Лакса о эволюционности в малом следует, что область эволюционности лежит либо выше этой прямой, либо – ниже. В этом случае условия эволюционности преобразуются к виду $(\Gamma_1 - \Gamma_2)[s] \geq 0$, где Γ_1 , Γ_2 – сорбционные коэффициенты воды и нефти и эволюционны скачки с изменением s только в одну сторону.

Для нелинейных изотерм (например, Ленгмюра) кривые Жуге состоят из нескольких ветвей и область эволюционности на плоскости s_+ , s_- состоит из нескольких разделенных подобластей. Это приводит к существованию решений с присоединенными волнами Римана и эволюционными скачков из начального состояния s_- (или конечного s_+) в противоположные стороны $[s] > 0$ и $[s] < 0$. При анализе эволюционности для нелинейных изотерм полезно следующее утверждение: если $L'(s) \in C[0, 1]$ и кривые Жуге g^{\pm} не являются линиями экстремума поверхностей S^{\pm} : $\zeta = q_{\pm}(s_+, s_-) - Q(s_{\pm})$, линиями уровня которых они являются ($\zeta = 0$), то ветви кривых Жуге, отличные от прямой $s_+ = s_-$, пересекают или касаются этой прямой только в точках экстремума характеристической скорости: $L'(s) = 0$.



Фиг. 1. Диаграммы решения задачи о распаде начального разрыва: характеристическая скорость имеет один максимум (а), один минимум (б), максимум и минимум (в)

На фиг. 1, а, б на примере изотерм Ленгмюра представлены диаграммы решений задачи о распаде разрыва на плоскости s_+ , s_- , справедливые для произвольных изотерм, при которых характеристическая скорость имеет один экстремум: либо минимум, либо максимум. Каждая из кривых q^\pm состоит из двух ветвей, одна из которых прямая $s_+ = s_-$, а вторая, согласно лемме, пересекает эту прямую в точке А экстремума характеристической скорости L . На фиг. 1, а этот экстремум является максимумом, а на фиг. 1, б – минимумом. На прямой $s_+ = s_-$ (интегральная кривая волны Римана) стрелками указано направление изменения s в волне: фиг. 1, а – от экстремума, фиг. 1, б – к экстремуму.

На диаграммах фиг. 1 на плоскости s_+ , s_- расположены области различных решений задачи о распаде разрыва s_1, s_0 . Здесь S – области эволюционных разрывов; R – области волн Римана и области жуге-решений: SR – скачок и присоединенная сзади волна Римана (фиг. 1, а) и RS – волна Римана и присоединенный сзади скачок (фиг. 1, б). В случае максимума характеристической скорости в т. А условия эволюционности (3.5) сводятся к первому неравенству и поэтому области эволюционности ограничиваются только ветвями кривой Жуге g^+ (фиг. 1, а), а в случае минимума – условия (3.5) сводятся ко второму неравенству и области эволюционности ограничиваются только ветвями кривой Жуге g^- (фиг. 1, б).

Рассмотрим случай, когда характеристическая скорость $L(s)$ имеет два экстремума, на примере изотермы Ленгмюра для водной компоненты эмульсии $f_1(s)$ и изотермы $f_2(s)$, имеющей точку перегиба для нефтяной компоненты

$$f_1(s) = \frac{N_1 \Gamma_1 s}{1 + \Gamma_1 s}, \quad f_2(s) = \frac{N_2 \Gamma_2 (1-s)^2}{1 + \Gamma_2 (1-s)^2}, \quad N_1 = 0,5, \quad N_2 = 1,5, \quad \Gamma_1 = 2, \quad \Gamma_2 = 1.$$

Характеристическая скорость $L(s)$ имеет два экстремума: максимум и минимум. В этом случае каждая из кривых Жуге g^+ и g^- состоит из трех ветвей, одна из которых g_0^+ – прямая $s_+ = s_-$, две других $g_{1,2}^\pm$ проходят через точки экстремума A_1 (максимум) и A_2 (минимум) на прямой $s_+ = s_-$ соответственно. Локально в окрестности точек экстремума A_1 и A_2 распределение областей решений должно быть идентично фиг. 1, а и б соответственно. На фиг. 1, в изображена диаграмма решений задачи о распаде разрыва на плоскости s_+ , s_- при $r_1 = 0,2, r_2 = 0,1$. На прямой $s_+ = s_-$ изображены направления изменения s в волнах Римана. В этом случае кроме областей с решениями S, R, SR, RS существуют области с решением SRS (скачок Жуге по

состоянию за разрывом, присоединенная волна Римана, скачок Жуге по состоянию перед разрывом) и область с решением RS^*R (S^* – скачок Жуге по состоянию как за, так и перед разрывом, соответствующий точке пересечения A^* ветвей кривых Жуге g_1^+ и g_2^-).

Таким образом, согласно (3.5), эволюционность разрыва s_{\pm} , u_{\pm} , V_s определяется только значениями водонасыщенности s_+ , s_- на разрыве и эволюционный разрыв задается точкой в эволюционной области на плоскости s_+ , s_- . Волны Римана лежат на прямой $s_+ = s_-$ в этой плоскости. Кривые Жуге ограничивают области эволюционности и разграничивают области различных типов решений задачи о распаде разрыва на плоскости s_+ , s_- .

4. Краевые задачи. Подобно рассмотрению в [6] для системы (1.1)–(1.3) можно поставить две краевые задачи в полосе (x_0, x_1)

$$s(x, 0) = s^0(x), \quad s(x_0, t) = s_0(t), \quad u(x_0 t) = u_0 t, \quad p(x_0 t) = p_0(t) \quad (4.1)$$

$$s(x, 0) = s^0(x), \quad s(x_0, t) = s_0(t), \quad p(x_0 t) = p_0 t, \quad p(x_1 t) = p_1(t) \quad (4.2)$$

В (4.1) задается начальное и граничное условие на s и граничное условие на скорость фильтрации u , а в (4.2) вместо условия на u задается давление на границах полосы (x_0, x_1) . Общее непрерывное решение задач (4.1) и (4.2) в декартовых ($n = 1$), цилиндрических ($n = 2$) и сферических ($n = 3$) координатах приведено в [6]. Решение этих задач в рассматриваемом случае будет отличаться выражением для определения времени переноса $\tau(t)$. Применительно к задачам добычи пластовой жидкости через скважину естественно рассматривать вторую краевую задачу, где задано $p(x_0, t) = p_0(t)$ – давление на контуре пласта или на нагнетательной скважине и $p(x_1, t) = p_1(t)$ – давление на добывающей скважине. В этом случае $\tau(t)$ определяется из нелинейного интегродифференциального уравнения, которое получается при интегрировании (2.5) по x

$$-K\delta p = \int_{x_0}^{x_1} \frac{d\tau(t)}{dt} U(s) \frac{dx}{x^{n-1}}, \quad \delta p = p_1(t) - p_0(t) \quad (4.3)$$

5. Задачи о вытеснении. Задача о вытеснении однородной водонефтяной эмульсии водяным валом в общем виде формулируется следующим образом:

$$s(x, 0) = s_0, \quad s(x_1, t) = s_1(t), \quad p(x_0, t) = p_0(t), \quad p(x_1, t) = p_1(t)$$

где s_1, s_0 – постоянные, $s_1 > s_0$ и $p_1 > p_0$, направление движения – от контура пласта или нагнетательной скважины x_1 к добывающей скважине x_0 . В разд. 3 было показано, что решение этой задачи в общем случае состоит из одной или нескольких следующих компонент: области постоянства $s = \text{const}$, волны Римана $s = L^{-1}((\xi - \xi_*)/\tau(t))$ и скачка $[s]$ (L^{-1} – обратная функция к L). Области постоянства s и волны Римана разграничены характеристиками $\xi - L(s)\tau(t) = \text{const}$.

При изучении возможных режимов в задаче о вытеснении будем интересоваться дебитом скважины, который в зависимости от рассматриваемого случая с плоской ($n = 1$) и осесимметричной ($n = 2$) симметриями имеет в соответствии с (2.5) вид

$$Q = (2\pi x)^{n-1} (1-s)u = (2\pi)^{n-1} (1-s)U(s) \frac{d\tau}{dt} \quad (5.1)$$

Фронтальное вытеснение. Если точка (s_1, s_0) попадает в область эволюционных разрывов на плоскости s_+ , s_- (см. разд. 3), то решение будет состоять из скачка $s_+ = s_1, s_- = s_0$, распространяющегося по однородному начальному состоянию s_0 . В

этом случае уравнения на скачке в виде (3.3) интегрируются

$$\xi_s = \xi_1 + D_- \tau_-, \quad D_- \tau_- = D_+ \tau_+, \quad \xi = \frac{1}{n} x^n \quad (5.2)$$

Из интегродифференциального краевого условия (4.3), интегрируя, получаем

$$[\alpha] \Lambda(\xi) + k \xi \Big|_{\xi_1}^{\xi_s} = \Delta(t), \quad \Delta(t) = K \int_0^t \delta p(\varphi) d\varphi \quad (5.3)$$

$$\Lambda(\xi) = \frac{1}{2} \xi^2 \quad (n=1); \quad \frac{1}{2} \xi (\ln \xi - 1) \quad (n=2)$$

$$\alpha_{\pm} = (m+q)_{\pm}, \quad [\alpha] = \alpha_+ - \alpha_-, \quad k = \alpha_- \Lambda'(\xi_0) - \alpha_+ \Lambda'(\xi_1)$$

где $q_{\pm} = q_{\pm}(s_+, s_-)$ определено (3.2).

Алгебраическое уравнение (5.3) служит для определения траектории разрыва $\xi_s(t)$, а уравнения (5.2) линейно связывают $\xi_s(t)$ и времена переноса за и перед разрывом $\tau_{\pm}(t)$ и служат для нахождения последних. Выражая $d\tau_-/dt$ через $\xi_s(t)$ с помощью (5.2) и (5.3), для дебита скважины Q до момента прорыва водяного вала к скважине (т.е. до прихода фронта) из (5.1) получим

$$Q = (2\pi)^{n-1} (1-s_-) U(s_-) \frac{d\tau_-}{dt} = \frac{(2\pi)^{n-1} K \delta p (1-s_-) \alpha_-}{[\alpha] \Lambda'(\xi_s) + k} \quad (5.4)$$

В случае плоской симметрии ($n=1$) уравнение (5.3) является квадратным относительно ξ_s . Положив $x_0=0, x_1=1$, из (5.3) получим траекторию разрыва и из (5.4) – выражение для дебита скважины

$$x_s = \frac{1}{[\alpha]} \left(\alpha_+ - \left(\alpha_-^2 + 2[\alpha] \Delta(t) \right)^{1/2} \right), \quad Q = K \delta p (1-s_-) \left(1 + 2 \frac{[\alpha]}{\alpha_-^2} \Delta(t) \right)^{-1/2} \quad (5.5)$$

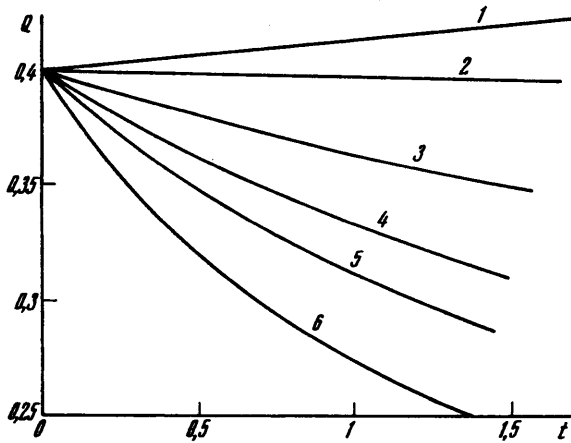
Когда перепад давления между контуром или нагнетательной скважиной и добывающей скважиной поддерживается постоянным, $\delta p = p_1 - p_0 = \text{const}$, $\Delta(t) = (\delta p)t$ и дебит Q убывает со временем, если $[\alpha] > 0$, и возрастает при $[\alpha] < 0$, согласно (5.5). Для линейных изотерм справедливо

$$[\alpha] = m_+ m_- [s] \left((1-r_1) \Gamma_1 - (1-r_2) \Gamma_2 + (r_2 - r_1) \Gamma_1 \Gamma_2 \right)$$

И в случае равенства плотностей воды и нефти ($r_1 = r_2$) $[\alpha] = (1-r_1) m_+ m_- [s] (\Gamma_1 - \Gamma_2)$. Из условия эволюционности для линейных изотерм $[s] (\Gamma_1 - \Gamma_2) \geq 0$ (см. разд. 3) и выражения для $[\alpha]$ следует, что $[\alpha] \geq 0$ и дебит Q убывает со временем в случае $r_1 = r_2$. Для случая $r_1 \neq r_2$, если сорбционные константы близки и более тяжелая жидкая компонента в эмульсии обладает большей сорбционной константой (например, $r_1 > r_2$, $\Gamma_1 > \Gamma_2$, $\Gamma_1 - \Gamma_2 \approx 0$), $[\alpha] < 0$ и Q возрастает со временем. Характерные примеры зависимости дебита от времени приведены на фиг. 2 при значениях параметров $\Gamma_1 = 2$, $\Gamma_2 = 1$, $s_0 = 0,6$, $s_1 = 1$, $r_1 = 0,2$ и различных r_2 .

При первых двух значениях плотности нефти (меньших плотности воды) дебит возрастает со временем, а для остальных – убывает. Все кривые дебита на фиг. 2 заканчиваются в момент прихода фронта к скважине ($x_s = 0$), разный для разных кривых, когда дебит скачком падает до нуля.

Вытеснение с образованием волны Римана. Если $L(s)$ – убывающая функция на промежутке от s_0 до s_1 , то первоначальный разрыв превратится в волну Римана, расширяющуюся по мере продвижения по пласту зону смеси нагнетаемой воды и первоначальной нефти или эмульсии. Для линейных изотерм условие убывания $L(s)$ заключается в неравенстве $(s_1 - s_0)(\Gamma_1 - \Gamma_2) < 0$, которое, учитывая, что в задаче о



Фиг. 2. Зависимость дебита нефти от времени при фронтальных вытеснениях $\delta p = \text{const}$ для линейных изотерм $\Gamma_1 = 2, \Gamma_2 = 1, s_0 = 0,6; s_1 = 1$. Кривые 1-6 соответствуют значениям $r_1 = 0,01; 0,2; 0,6; 1; 1,3; 1,9$

вытеснении $s_1 = 1 > s_0$, сводится к $\Gamma_1 < \Gamma_2$. В случае, когда изотерма нефти – выпуклая функция, а вода не адсорбируется при вытеснении нефти (или эмульсии) водой, всегда образуется только волна Римана (см. разд. 2).

Обозначим $s_- = s_0, s_+ = s_1$ – состояния перед и за волной Римана, решение задачи для s имеет вид

$$s = s_-, \quad \xi \geq \xi_-(t), \quad s = s_+, \quad \xi \leq \xi_+(t)$$

$$s = L^{-1}((\xi - \xi_1) / \tau(t)), \quad \xi_-(t) \leq \xi \leq \xi_+(t), \quad \xi_{\pm}(t) = \xi_1 + L_{\pm} \tau(t)$$

где L^{-1} – обратная функция к $L(c)$ и $\xi_{\pm}(t)$ – границы волны Римана. Пусть t_* – момент времени, когда передний фронт волны $x_-(t)$ достигает скважины $x_0, \tau_* = \tau_0(t_*) = -1/L_-$.

Условие (4.3) для нахождения τ имеет вид

$$-K\delta p = \frac{d\tau}{dt} (U_- I_0(x_0, x_-) + I_1(x_-, x_+) + U_+ I_0(x_+, x_1)) \quad (t \leq t_*) \quad (5.6)$$

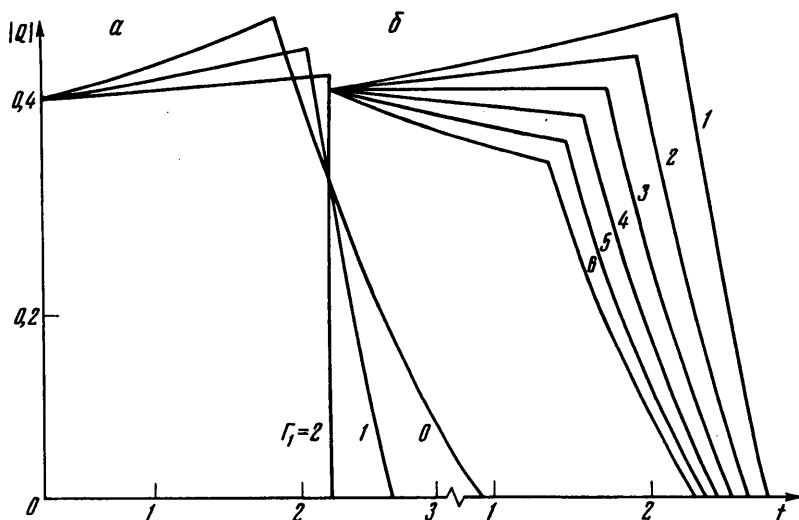
$$-K\delta p = \frac{d\tau}{dt} (I_1(x_0, x_+) + U_+ I_0(x_+, x_1)) \quad (t > t_*) \quad (5.7)$$

$$I_0(a, b) = \int_a^b \frac{dx}{x^{n-1}}, \quad I_1(a, b) = \int_a^b U \left(L^{-1} \left(\frac{\xi - \xi_1}{\tau} \right) \right) \frac{dx}{x^{n-1}} = \tau^{1+\omega} n^{\omega} \int_{L_a}^{L_b} U(L^{-1}(y)) \left(\frac{\xi_1}{\tau} + y \right)^{\omega} dy, \quad L_a = \frac{\xi_a - \xi_1}{\tau}, \quad \xi_a = \frac{1}{n} a^n, \quad \omega = 2 \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \quad (5.8)$$

Для линейных изотерм в случаях с плоской ($n = 1$) и осевой ($n = 2$) симметриями интеграл $I_1(a, b)$ может быть проинтегрирован

$$I_1(a, b) = \frac{\tau}{\beta_2} \left[y + \frac{2}{3} \beta_1 y^{3/2} \right]_{L_a}^{L_b} \quad (n = 1) \quad (5.9)$$

$$I_1(a, b) = \frac{1}{\beta_2} \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{\xi_1}{\tau} + y \right) + \beta_1 \left(y^{1/2} - \left(-\frac{\xi_1}{\tau} \right)^{1/2} \operatorname{arcth} \left(-\frac{\tau y}{\xi_1} \right)^{1/2} \right) \right]_{L_a}^{L_b} \quad (n = 2) \quad (5.10)$$



Фиг. 3. Зависимость дебита нефти от времени для вытеснения с образованием волны Римана в случае линейных изотерм: $r_1 = 0,2$; $s_0 = 0,6$; $s_1 = 1$; $\Gamma_2 = 2$; $a - r_2 = 0,1$; $\Gamma_1 = 0, 1, 2$; $\delta - \Gamma_1 = 1, r_2 = 0,001; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1$ (кривые 1-6)

Для случая плоской симметрии и линейных изотерм адсорбции, интегрируя (5.6) и (5.7) с помощью (5.9), получим дифференциальные уравнения на τ при $t \leq t_*$ и $t > t_*$ соответственно. После их интегрирования получим выражение для времени переноса

$$\tau(t) = \frac{U_-}{[\zeta]} \left(1 - \left(1 + 2 \frac{[\zeta]}{U_-^2} \Delta(t) \right)^{1/2} \right) \quad (t \leq t_*), \quad \zeta_{\pm} = \frac{\beta_1}{3\beta_2} L_{\pm}^{3/2} \quad (5.11)$$

$$\zeta_+ \frac{\tau^2}{2} - \frac{\tau}{\beta_2} \left(1 + \frac{4}{3} \beta_1 (-\tau)^{-1/2} \right) = \Delta(t) + \text{const}(\tau_*) \quad (t > t_*) \quad (5.12)$$

Учитывая, что значение водонасыщенности на скважине $s = s_-$ при $t \leq t_*$ и $s = L^{-1}(-1/\tau(t))$ при $t > t_*$, соответствующие выражения для дебита, согласно (5.1), (5.11) и (5.12), могут быть приведены к виду

$$Q = -K\delta p(1 - s_-) \left(1 + 2 \frac{[\zeta]}{U_-} \Delta(t) \right)^{-1/2} \quad (t \leq t_*) \quad (5.13)$$

$$Q = K\delta p \frac{(1 - \gamma) \left(1 + \beta_1 (-\tau)^{-1/2} \right) + \beta_2 \text{sign}(\gamma)}{\beta_2 \zeta_+ \tau - 1 - \frac{2}{3} \beta_1 (-\tau)^{-1/2}} \quad (t > t_*) \quad (5.14)$$

Здесь β_1 , β_2 и γ – постоянные, зависящие от s_{\pm} , а $\tau(t)$ в (5.14) определяется в неявном виде из (5.12).

Характерные зависимости дебита от времени при вытеснении с зоной смеси приведены на фиг. 3, а при значениях параметров $r_1 = 0,2$; $r_2 = 0,1$; $s_0 = 0,6$; $s_1 = 1$, $\Gamma_2 = 2$ и варьировании Γ_1 . До момента времени t_* дебит растет со временем. Излом на графике соответствует приходу передней границы волны Римана (зоны смеси) на скважину в момент времени t_* . С момента времени t_* дебит начинает убывать и обращается в нуль в момент прихода задней границы волны Римана, за которой нефть отсутствует. Видно, что для кривой с $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 2$ дебит мгновенно падает до нуля

момент t_* , что соответствует предельному случаю волны Римана, у которой передняя и задняя границы совпадают (в этом случае характеристическая скорость L – постоянная). На фиг. 3, б приведены зависимости дебита добывающей скважины от времени при варьировании плотности нефти r_2 и при постоянных остальных параметрах. При $r_2 < 0,4$ дебит возрастает до прихода передней границы зоны смеси (волны Римана), при $r_2 = 0,4$ остается постоянным в этом промежутке времени и убывает при $r_2 > 0,4$. В этом случае чем тяжелее нефть, тем меньше дебит скважины и $r_2 = 0,4$ является точкой смены режима скважины на интервале $0 \leq t \leq t_*$ от возрастающего дебита к убывающему.

Заключение. Учтено влияние межфазового массообмена компонент (адсорбции) на динамику эмульсии и активную пористость. Показано, что для разных изотерм адсорбции реализуются различные режимы вытеснения. Для линейных изотерм – это либо фронт, либо волна Римана, для нелинейных изотерм (Ленгмюра, Фрейндлиха) при соответствующих значениях параметров – решения в виде фронта и присоединенной к нему волны Римана. Построено решение задачи о распаде начального разрыва. Тип решения существенно зависит от вида изотермы адсорбции, возможны комбинированные решения, например, скачок-волна Римана-скачок. Рассмотрена одномерная краевая задача при заданном давлении на скважине и контуре пласта. Для вытеснения однородной водонефтяной эмульсии водяным валом построено решение для линейных изотерм.

В зависимости от плотностей отдельных компонент эмульсии и изотерм адсорбции в случае фронтального вытеснения и вытеснения с образованием расширяющейся зоны смеси первоначальной пластовой эмульсии и нагнетаемой воды дебит может иметь убывающую, возрастающую и немонотонную (возрастающую до прихода передней границы волны Римана, а потом убывающую) зависимость от времени. Такое поведение не свойственно классическим задачам двухфазной фильтрации несмешивающихся несжимаемых жидкостей [5, 9], где дебит определяется только значением s на скважине (так как скорость притока постоянна) и поэтому сохраняется постоянным до прихода фронта или передней границы волны Римана. В рассматриваемой задаче о фильтрации эмульсии скорость притока на скважине и в пласте непостоянна и зависит от s и условий вытеснения внутри пласта через интегральную характеристику течения в пласте $\tau(t)$.

Эти особенности полученных решений возникли из рассмотрения корректных уравнений сохранения массы (1.1), (1.2), в которых учитывается влияние межфазного массообмена на скорость Дарси эмульсии и активную пористость.

Д.И. Гарагаш благодарит В.Н. Николаевского за полезное обсуждение.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-00991).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Петренко В.И.* Геолого-физические и геохимические процессы, связанные с природными газами (на примере газоконденсатных месторождений). Дис. ... д. техн. наук. М.: ВНИИГаз, 1990. 491 с.
2. *Поздняшев Г.Н.* Стабилизация и разрушение нефтяных эмульсий. М.: Недра, 1992. 223 с.
3. *Кондрат Р.М., Билецкий М.М.* Исследование вытеснения выпавшего в пористой среде конденсата водой // Экспресс-информ. ВНИИЭгазпрома: геология, бурение и разработка газовых месторождений. 1976. № 5. С. 29–31.
4. *Веригин Н.Н.* О фильтрации эмульсий в пористой среде // Докл. РАН. 1993. Т. 333. № 1. С. 28–31.
5. *Buckley S.E., Leverett M.C.* Mechanism of fluid displacement in sands // Techn. Pap. Amer. Inst. Min. and Met. Engrs. 1941. № 1337. 10 p.

6. *Бармин А.А., Гарагаш Д.И.* О фильтрации раствора в пористой среде с учетом адсорбции примеси на скелет // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 4. С. 97–110.
7. *Венецианов Е.В., Рубинштейн Р.Н.* Динамика сорбции из жидких сред. М.: Наука, 1983. 237 с.
8. *Бондарев Э.А., Николаевский В.Н.* Конвективная диффузия в пористых средах с учетом явления адсорбции // ПМТФ. 1962. № 5. С. 128–134.
9. *Николаевский В.Н.* Механика пористых и трещиноватых сред. М.: Недра, 1984. 232 с.

Москва

Поступила в редакцию
26.III.1996