

УДК 532.54

© 1997 г. А.В. КУЗНЕЦОВ, С.А. КУЗНЕЦОВ

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДВУХ ПОТОКОВ НЕВЯЗКИХ ЖИДКОСТЕЙ, РАЗДЕЛЕННЫХ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ДЕФОРМИРУЕМОЙ ПЛАСТИНОЙ, В КАНАЛЕ С ПЛОСКИМИ СТЕНКАМИ

В линейном приближении решена задача о нестационарном взаимодействии двух потоков невязких невесомых жидкостей, заключенных в канале с неподвижными твердыми стенками и разделенных полубесконечной деформирующейся пластиной.

Рассмотрены общий случай деформации и гармонические колебания пластины (машущий движитель). Определены нестационарные гидродинамические реакции, положение границы раздела, динамические характеристики движителя.

Работа обобщает исследование [1] на случай канала постоянной ширины. Задача решена в приближении теории малых возмущений. Рассмотрены случай произвольных деформаций и угловых гармонических колебаний кормовой части пластины (машущий движитель). Приведены результаты расчетов нестационарных сил давления, динамических характеристик движителя, формы границы раздела потоков.

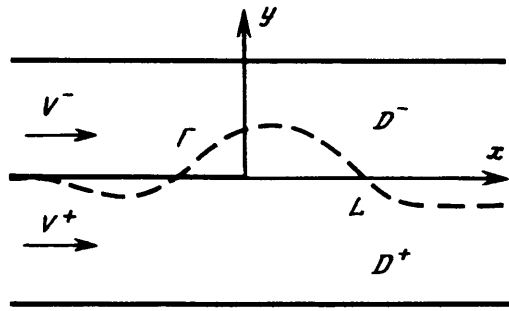
Известны решения линейных задач нестационарного взаимодействия потоков с равными поступательными скоростями основного течения [2, 3]. В этом случае потенциалы скоростей возмущений на свободных границах L раздела потоков представляют собой бегущие волны, сохраняющие свою форму.

Более трудными оказываются задачи нестационарных течений, в которых граница раздела потоков частично прикрыта непроницаемой стенкой, а поступательные скорости стационарных потоков различные. Задача о взаимодействии полубезграничных потоков с такими условиями на границе раздела рассмотрена в [1]. Определение комплексных потенциалов течений сведено к решению начально-краевой задачи теории аналитических функций по известным граничным значениям ее мнимой части на пластине и условиям сопряжения на границе L , являющимися следствием динамического и кинематического условий взаимодействия потоков на свободной границе раздела.

Для устранения неопределенности в общем решении использовалось условие ограниченности перепада давления на пластине на бесконечности вверх по потоку, что фактически привело к условию равенства нулю этой величины в любой момент времени.

Из построенного решения следовало, что при произвольных деформациях пластины линия раздела L сходит с нее не по касательной, как это имеет место в случаях однородного течения и двухслойного течения с одинаковыми поступательными скоростями, а составляет с пластиной переменный угол, закон изменения которого определяется заданными возмущениями.

Для любого момента времени t с начала неустановившегося течения свободная граница L отклоняется от начального положения асимптотически по закону параболы $y \sim x^{1/2}$.



Фиг. 1. Схема двухслойного течения жидкости в канале

Эти эффекты находят подтверждение при рассмотрении задачи в постановке, представленной в настоящей работе, из которой решение задачи [1] и отмеченные особенности получаются в результате предельного перехода при увеличении ширины канала до бесконечности.

Рассмотренная постановка задачи моделирует закрытые течения в элементах технических устройств, в которых взаимодействуют потоки с разными полными давлениями.

1. Схема течения изображена на фиг. 1. Используются следующие обозначения: $2H$ – ширина канала, ρ^\pm, V^\pm – плотности и поступательные скорости соответственно нижнего и верхнего потоков D^\pm , $\gamma = \rho^-/\rho^+$, $(\lambda^+, \lambda^-) = (\beta = V^+/V^-, 1)$, $\tau = V^-t/l$, t – время, l – характерная длина.

Полубесконечная пластина расположена посередине канала вдоль отрицательной полуоси $x \leq 0$. Деформация пластины задана уравнением $y = f(x, t)$. Стенки канала неподвижны. В начальный момент времени $t = 0$ потоки невозмущены.

Жидкости считаются невесомыми. Поверхностное натяжение не учитывается.

Неустановившиеся течения в соответствующих областях описываются потенциалами $W^\pm(z, t) = V^\pm z + w^\pm(z, t)$, $z = x + iy$.

В приближении линейной теории малых возмущений задача состоит в определении в областях D_0^+, D_0^- : $-H \leq y < 0, 0 < y \leq H, -\infty < x < \infty$ двух аналитических функций $w^\pm = \phi^\pm + i\psi^\pm$ по известным из уравнений

$$\frac{\partial \psi^\pm}{\partial x} = -V^\pm \left(\frac{\partial f}{\partial \tau} + \lambda^\pm \frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

значениям ψ^\pm на берегах разреза Γ_0^\pm ($x \leq 0, y = \mp 0$), значениям $\psi^\pm = 0$ на границах $y = \mp H$ и условиям сопряжения на линии L_0 ($x > 0, y = 0$), вытекающим из динамического и кинематического условий взаимодействия потоков вдоль L

$$p^+ = p^-, \quad \frac{\partial \eta^\pm}{\partial t} = \frac{\partial \phi^\pm}{\partial n^\pm}, \quad \eta^+ = -\eta^-$$

Здесь p – давление. $\eta^\pm = (\mathbf{r}, \mathbf{n}^\pm)$, \mathbf{r} – вектор смещения точек, L, \mathbf{n}^\pm – внешние нормали к границе областей D^\pm .

Условия сопряжения приводятся к системе уравнений

$$\frac{\partial \phi^+}{\partial \tau} - \gamma \frac{\partial \phi^-}{\partial \tau} + \beta \frac{\partial \phi^+}{\partial x} - \gamma \frac{\partial \phi^-}{\partial x} = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \psi^+}{\partial \tau} - \frac{\partial \psi^-}{\partial \tau} + \frac{\partial \psi^+}{\partial x} - \beta \frac{\partial \psi^-}{\partial x} = V^-(1 - \beta) \frac{\partial f(0, \tau)}{\partial \tau} \quad (1.2)$$

Граница раздела определяется уравнением

$$y = \eta(x, \tau) = \frac{1}{V^-(1-\beta)} [\Psi^+(x, \tau) - \Psi^-(x, \tau)] + f(0, \tau), \quad x > 0$$

Положим $w^\pm(z, \tau) = w_1(z, \tau) + w_2^\pm(z, \tau)$, где w_1 – функция, аналитическая в области $D: D^+ \cup D^-$, разрезанной по линии $\Gamma_0 (x \leq 0, y = 0)$, и имеющая значения $\text{Im} w_1 = \text{Im} w^\pm$ на границе области и берегах разреза.

Функция $w_1(z, \tau)$ находится с помощью конформного отображения области D на верхнюю полуплоскость параметрического переменного u и формулы Шварца

$$\frac{dw_1}{du} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Im} \frac{dw_1}{d\xi} \frac{d\xi}{\xi - u}, \quad \text{Im} \frac{dw_1}{du} = \pm \frac{\partial \phi^\pm}{\partial y} \left| \frac{dz}{du} \right|, \quad \xi \in (-\infty, 0), \quad \xi \in (0, \infty)$$

В результате для $z = x > 0$ получим

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial x} = \frac{e^{x_1}}{2\pi h} \int_{-\infty}^0 \left(\frac{\partial \phi^-}{\partial y} - \frac{\partial \phi^+}{\partial y} \right) \frac{d\xi}{e^{x_1} - e^{\xi_1}}$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial x} = \frac{e^{x_1}}{2\pi h g(x_1)} \int_{-\infty}^0 \left(\frac{\partial \phi^-}{\partial y} + \frac{\partial \phi^+}{\partial y} \right) \frac{g(\xi_1) d\xi}{e^{x_1} - e^{\xi_1}}$$

$$g(x) = \sqrt{h(e^x - 1)}, \quad x_1 = x/h, \quad h = H/\pi$$

Для случая, когда

$$f(x, \tau) = k(\tau)f(x)U(x+l) \tag{1.3}$$

где $U(x)$ – единичная функция

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial x} = -\frac{V^-}{2} \left[(1+\beta)k(\tau) \frac{dr_1}{dx} + 2 \frac{dk(\tau)}{d\tau} \frac{dr_2}{dx} \right]$$

$$\frac{dr_k}{dx} = \frac{e^{x_1}}{\pi \sqrt{h} g(x_1)} \int_0^l \frac{\sqrt{1 - e^{-\xi_1}}}{e^{x_1} - e^{-\xi_1}} \frac{df_k}{d\xi} d\xi, \quad k = 1, 2$$

$$f_1(\xi) = f(x = -\xi), \quad f_2(\xi) = -\int_0^\xi f_1(\xi) d\xi$$

Для определения функций $w_2^\pm(z, \tau)$ перейдем к их изображениям по Лапласу относительно переменной τ . Соответствующие трансформанты будем обозначать заглавными буквами: $L_s w_2^\pm(z, \tau) = W_2^\pm(z, s) = \Phi_2^\pm + i\Psi_2^\pm$.

Аналитические в D_0^\pm функции $W_2^\pm(z, s)$ определяются граничными значениями $\text{Im} W_2^\pm = 0$ на Γ_0^\pm и стенках канала и условиями сопряжения на L_0 , представленными уравнениями

$$\beta \frac{d\Phi_2^+}{dx} - \gamma \frac{\partial \Phi_2^-}{\partial x} + s(\Phi_2^+ - \gamma \Phi_2^-) = P_1(x, s) \tag{1.4}$$

$$P_1(x, s) = -(\beta - \gamma) \frac{d\Phi_1}{dx} - s(1 - \gamma)\Phi_1$$

$$\frac{d\Psi_2^+}{dx} - \beta \frac{\partial \Psi_2^-}{\partial x} + s(\Psi_2^+ - \Psi_2^-) = Q(s) \tag{1.5}$$

$$Q(s) = -(1 - \beta) \frac{d\Psi_1}{dx} + N(s), \quad N(s) = V^-(1 - \beta)f(0)K(s)$$

Используем решения смешанной краевой задачи для полосы [4, 5]

$$\begin{pmatrix} W_2^+(z, s) \\ W_2^-(z, s) \end{pmatrix} = \frac{g(z_1)}{\pi i} \left[\int_0^{\infty} \begin{pmatrix} \Psi_2^+ \\ \Psi_2^- \end{pmatrix} \frac{d\xi}{g_1(z_1, \xi_1)} + \int_0^{\infty} \begin{pmatrix} -\Phi_2^+ \\ \Phi_2 \end{pmatrix} \frac{d\xi}{g_1(z_1, \xi_1)} \right] + \quad (1.6)$$

$$+ 2i \begin{pmatrix} K^+(s) \\ K^-(s) \end{pmatrix} \frac{g(z_1)}{\operatorname{ch} z_1}, \quad z \in D^+, \quad z \in D^-$$

$$z_1 = z/h, \quad g(z) = \sqrt{h(e^z - 1)}, \quad g_1(z, \xi) = h(1 - e^{z-\xi})\sqrt{h|1 - e^{-\xi}|}$$

где $K^\pm(s)$ – произвольные функции.

Внеинтегральные слагаемые представляют собой решения однородных задач, ограниченные на бесконечности.

Из (1.6) получим для $z = x \mp i0$

$$\Psi_2^\pm(x, s) = \pm A \Phi_2^\pm + 2K^\pm(s) \frac{g(x_1)}{\operatorname{ch} x_1} \quad (1.7)$$

$$\frac{d\Psi_2^\pm}{dx} = \pm A \frac{d\Phi_2^\pm}{dx} + K^\pm(s) F(x_1) \pm \frac{M_2^\pm \pm K^\pm}{g(x_1)} \quad (1.8)$$

$$F = \frac{d}{dx} \frac{g(x_1)}{\operatorname{ch} x_1} - \frac{1}{g(x_1)}, \quad M_2^\pm = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\Phi_2^\pm}{dx} \frac{dx}{g(x_1)}$$

Здесь A – сингулярный оператор

$$Ar = \frac{g(x_1)}{\pi} \int_0^\infty \frac{r(\xi_1) d\xi_1}{g_1(x_1, \xi_1)}$$

Формулы (1.7), (1.8) и тождество $A \operatorname{In} g(x_1) = \pi$, которое легко установить прямым вычислением, позволяют записать (1.5) в виде сингулярного интегрального уравнения $AR = Q_1$ относительно функции

$$R = s(\Phi_2^+ + \Phi_2^-) + \beta \frac{d\Phi_2^+}{dx} + \beta \frac{d\Phi_2^-}{dx} + \frac{N(s)}{\pi} \operatorname{In} g(x_1)$$

с правой частью

$$Q_1 = -2sK_1(s) \frac{g(x_1)}{\operatorname{ch} x_1} - K_2(s)F(x_1) + \Psi_1(x_1, s) + \frac{E - M - K_2}{g(x_1)}$$

где $(K_1, K_2) = K^+ - (1 - \beta)K^-$, $M = M_2^+ + \beta M_2^-$

$$\begin{pmatrix} \Psi_1 \\ E \end{pmatrix} = -\frac{V^-(1-\beta)}{2} \left[(1+\beta) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ -I_1 \end{pmatrix} + 2s \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ -I_2 \end{pmatrix} \right] K(s)$$

$$\alpha_k = \frac{g(x_1)}{\pi} \int_0^1 \frac{df_k}{d\xi} \frac{d\xi}{g_2(x_1, \xi_1)}, \quad I_k = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{df_k}{d\xi} \frac{d\xi}{g_3(\xi_1)}, \quad k = 1, 2$$

$$g_2(x, \xi) = h e^\xi (e^x - e^{-\xi}) g_3(\xi), \quad g_3(\xi) = \sqrt{h(1 - e^{-\xi})}$$

Преобразуем интегральное уравнение, добавив к его правой части произвольную функцию $D_1(s)$, а к левой части – тождественную ей величину $(D_1/\pi)A \operatorname{In} g(x_1)$.

Функция $Q_1(x, s)$ непрерывна по x и ограничена всюду, за исключением точки $x = 0$, где она имеет особенность $O(x^{-1/2})$, обусловленную последним слагаемым.

Примем

$$K_2 = E - M \quad (1.9)$$

и продифференцируем преобразованное интегральное уравнение по x . Используя формулу перестановки порядков дифференцирования и интегрирования

$$\frac{d}{dx} Af = A \frac{df}{dx} + \frac{C}{g(x_1)}, \quad C = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{g(x_1)}$$

получим относительно производной функции $R_1 = R + (D_1/\pi)\ln(g(x_1))$ интегральное уравнение

$$A \frac{dR_1}{dx} = \frac{d\Psi_1}{dx} - 2sK_1 F(x_1) - 2K_2 \frac{dF}{dx} - \frac{m_1 + sK_1}{g(x_1)} \quad (1.10)$$

$$m_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{dR_1}{dx} \frac{dx}{g(x_1)}$$

Правая часть уравнения (1.10) удовлетворяет условию Липшица при всех x , за исключением $x = 0$, где она имеет особенность $O(x^{-1/2})$, и обращается в нуль $O(e^{-x})$ при $x \rightarrow \infty$.

Сингулярное интегральное уравнение $Ar = f$ с такой правой частью допускает обращение по формуле $r = Bf + a_0$, где a_0 – произвольная постоянная и

$$Bf = -\frac{e^{x_1}}{\pi} \int_0^\infty \frac{f(\xi_1) d\xi_1}{e^{\xi_1} - e^{x_1}}$$

Ее можно получить из известных формул обращения интеграла типа Коши.

Применяя эту формулу и учитывая, что $BF = C_1$, $BF'(x) = C_2$, где C_1, C_2 – постоянные, найдем

$$R_1(x) = \int_0^\infty B \left(\frac{d\Psi_1}{dx} \right) dx + b_1 x + b_2 \quad (1.11)$$

Здесь b_1, b_2 – произвольные функции от s . Так как для существования AR_1 необходима ограниченность функции R_1 , то следует положить $b_1 = 0$. Значение b_2 , очевидно, не существенно.

В результате вычисления правой части уравнения (1.11) и подстановки значения R_1 получим уравнение

$$s(\Phi_2^+ + \Phi_2^-) + \frac{d\Phi_2^+}{dx} + \beta \frac{d\Phi_2^-}{dx} = P_2(x, s)$$

$$P_2(x, s) = \frac{V^-(1-\beta)}{2\pi} \left[(1+\beta) \frac{dq_1}{dx} + 2s \frac{dq_2}{dx} \right] K(s) - \frac{D_1(s)}{\pi} \ln g(x_1)$$

$$q_k(x) = \int_0^1 \frac{df_k}{d\xi} \ln[h(1 - e^{-x_1 - \xi_1})] d\xi$$

которое совместно с (1.4) образует систему уравнений относительно функций $\Phi_2^\pm(x, s)$, отличающуюся от соответствующей системы уравнений [1] лишь конкретным видом функций $P_k(x, s)$. Используя полученное в [1] общее решение, найдем

$$\begin{pmatrix} \Phi_2^+(x, \tau) \\ \Phi_2^-(x, \tau) \end{pmatrix} = -\Phi_1(x, \tau) - \frac{V^-}{2\pi} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{\delta} \left(\frac{1+\beta\delta}{1+\delta} \right) d(\tau) * \ln[h(1 - e^{-x_1 - \tau})] \right\}$$

Здесь $\delta = -a + ic$, $(a, c) = (\gamma + \beta, (1 - \beta)\sqrt{\gamma})(\gamma + \beta^2)$, $i = \sqrt{-1}$, $T = \tau/\delta$, знак * означает свертку функций, $d(\tau)$ – произвольная функция.

Общее решение задачи содержит кроме $d(\tau)$ неизвестные функции $\kappa^\pm(\tau) = L_s^{-1}K^\pm(s)$. Обратимся к их определению.

Из условия ограниченности вертикальных компонент скоростей жидкости на пластине в точке схода потоков получим систему двух уравнений

$$E \mp (1 - \beta)(M_2^\pm \pm K^\pm) = 0 \quad (1.12)$$

Так как использованное ранее уравнение (1.9) является следствием этой системы, то недостающее уравнение получим, исследуя перепад давления $\Delta p = p^+ - p^-$ на пластине.

Формулу для вычисления перепада давления можно привести к виду

$$\frac{i\Delta p}{\rho^+ V^-} = \frac{g(x_1)}{\pi} \int_{-\infty}^0 \left(\frac{\partial F_1}{\partial \tau} + \frac{\partial F_2}{\partial \xi} \right) \frac{d\xi}{g_1(x_1, \xi_1)} - 2 \frac{d}{d\tau} (\kappa^+(\tau) + \gamma \kappa^-(\tau)) \frac{\sqrt{g(x_1)}}{\text{ch } x_1} + (\beta \kappa^+ + \gamma \kappa^-) \left(\frac{1}{g(x_1)} + \frac{2g(x_1)}{h \text{ch } x_1} \right) \text{th } x_1 \quad (1.13)$$

где $F_1 = \psi^+ + \gamma \psi^-$, $F_2 = \beta \psi^+ + \gamma \psi^-$.

Она получена на основе линеаризованного интеграла Коши–Лагранжа, формул (1.6), посредством которых определяются значения $\phi^\pm(x, 0, \tau)$ при $x < 0$, и условия непрерывности давления на L (формула (1.1)).

Легко видеть, что величина $\lim_{x \rightarrow -\infty} \Delta p$ ограничена и отлична от нуля при любых конечных значениях h и неограничена при $h \rightarrow \infty$. Поэтому для того, чтобы был возможен предельный переход к задаче взаимодействия полубезграничных потоков [1], следует принять $d(k^+ + \gamma k^-)/d\tau = 0$. При нулевых начальных значениях это даст искомое уравнение

$$\kappa^+ + \gamma \kappa^- = 0 \quad (1.14)$$

Из (1.12) и (1.14) найдем

$$\beta \kappa^+ + \gamma \kappa^- = -\frac{\gamma(1 - \beta)}{1 + \beta} k_1(\tau)$$

$$k_1(\tau) = -\frac{V^-(1 - \beta)}{\pi} \left[I_1 k(\tau) + \frac{1}{\pi} \text{Re} d(\tau) * \left(\frac{1}{g_3(T)} - \frac{1}{\sqrt{h}} \right) \right]$$

$$d(\tau) = L_s^{-1} D(s), \quad D(s) = -\frac{2\pi\sqrt{h}[(\gamma + \beta)I_1 + s(1 + \gamma)I_2]}{(1 - \beta)\sqrt{\gamma} \text{Im}[g_3^{-1}(T) - 1/\sqrt{h}]} K(s)$$

Компоненты результирующей силы давлений X, Y на деформированную часть пластины вычисляются по формулам

$$(X, Y) = \int_{-l}^0 \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, 1 \right) \Delta p dx$$

Уравнение относительно $\eta(x, \tau)$ записывается в виде

$$\eta(x, \tau) = -2k(\tau) \left[J_1(x_1) + I_1 \frac{g(x_1)}{\text{ch } x_1} \right] + \frac{d(\tau)}{\pi} * \text{Re} \left[\arctg \frac{g(x_1)}{g_3(T)} - \right]$$

$$-\operatorname{arctg} \frac{g(x_1)}{\sqrt{h}} - \left(\frac{1}{g_3(T)} - \frac{1}{\sqrt{h}} \right) \frac{g(x_1)}{\operatorname{ch} x_1} \Bigg]$$

$$J_1(x_1) = \frac{1}{\pi} \int_0^l \frac{df_1}{d\xi} \operatorname{arctg} \frac{g_3(\xi_1)}{g(x_1)} d\xi$$

Отсюда

$$\eta(0, \tau) = k(\tau) f(0), \quad \eta(x \rightarrow \infty, \tau) = 0$$

$$\frac{\partial \eta(0, \tau)}{\partial x} = k(\tau) \frac{df(0)}{dx} - \frac{1}{2} d(\tau) \operatorname{Re} \delta$$

Таким образом, отклонение линии L от ее стационарного положения на бесконечности вверх по потоку при любых конечных $h = H/\pi$ отсутствует. Касательная к линии L в точке схода с пластины образует с ней переменный угол, зависящий от $d(\tau)$. Сход по касательной будет лишь при $d(\tau) = 0$. Но если $d(\tau) = 0$ в любой момент времени, то течение теряет свойство последовательности, что невозможно из-за наличия жидкой границы раздела.

Если $\lim_{\tau \rightarrow \infty} k(\tau) = k_\infty$ существует, то нетрудно установить, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} d(\tau) = 0$, т.е. течение в пределе переходит в стационарное, а граница L становится касательной к пластине в точке схода.

Из формулы (1.13) следует, что

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{l \Delta p}{\rho^+ V^-} \right) = \frac{1}{\pi h} \int_{-\infty}^0 \left(\frac{\partial F_1}{\partial \tau} + \frac{\partial F_2}{\partial \xi} \right) \frac{d\xi}{\sqrt{h(1 - e^{-\xi_1})}} - \frac{\beta x^+ + \gamma x^-}{\sqrt{h}}$$

т.е. перепад давления при $x \rightarrow -\infty$ отличен от нуля при конечных h и обращается в нуль при $h \rightarrow \infty$. Это согласуется с известными результатами теории течений жидкости со свободными границами в закрытых потоках.

По полученным формулам выполнены расчеты для следующих значений входящих в формулу (1.3) величин: $k(\tau) = \alpha(1 - e^{-a\tau})$, $f(x) = l + x$, $l = 1$, $\alpha = 0,5$, $a = 2$, $H = \pi$. На фиг. 2 приведены графики коэффициентов $(C_x(\tau), C_y(\tau)) = 2(X, Y)/(\rho^+ V^{-2} l)$. Линии 1–5 соответствуют значениям $(\beta, \gamma) = (0, 0, 5), (0, 1), (0, 5, 0, 5), (0, 5, 1), (1, 1)$. Результаты справедливы для малых τ , так как при вычислении $d(\tau)$ по изображению $D(s)$ использовалось разложение $g_3^{-1}(T)$ в ряд по степеням T и удерживались члены $O(T)$. При $\tau \rightarrow \infty$ значения $C_{x\infty}$ соответственно равны 0,13, 0,33, 0,34, 0,58, 1, а $C_{y\infty} = -2C_{x\infty}$.

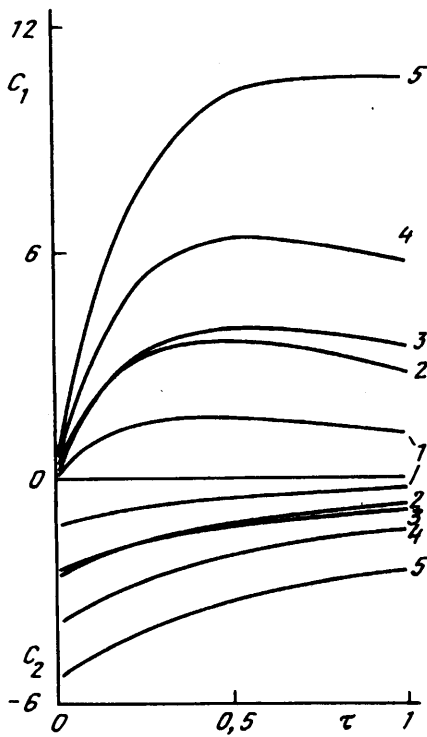
На фиг. 3 показана граница раздела потоков $\eta(x, \tau)$ в моменты $\tau = 0,001, 0,1, 0,5, \infty$ (кривые 1–4) при $\beta = 0, \gamma = 0,5$.

2. Решение задачи об установившихся гармонических колебаниях пластины $y = f(x) \exp(i\omega t)$, $x \leq 0$, $f(x)$ – произвольная функция, может быть получено из формул предыдущего пункта как частный случай.

При установившихся гармонических колебаниях все зависящие от времени функции будут изменяться со временем по тому же гармоническому закону. Поэтому, представляя потенциалы возмущенных течений в виде $w^\pm(z, \tau) = w^\pm(z) \exp(i\omega t)$, придем для определения $w^\pm(z)$ к краевым задачам, записываемым формулами предыдущего пункта для изображающих функций $W^\pm(z, s)$ с заменой в них s на $i\omega$.

Решение задачи во многом сходно со случаем взаимодействия полубезграницных потоков, подробно рассмотренным в [6]. Поэтому, опуская выкладки, приведем конечные результаты.

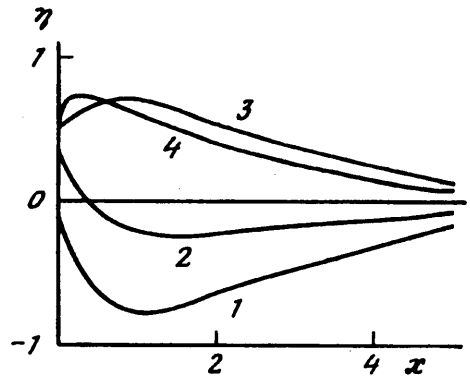
Вследствие установившегося процесса колебаний естественно искать решения в



Фиг. 2

Фиг. 2. Зависимости коэффициентов $C_1 = 10C_x$ и $C_2 = C_y$ от времени τ при деформации пластины по закону (1.3), когда $f(x) = 1 + x$, $k(\tau) = (1 - e^{-2\tau})/2$

Фиг. 3. Свободная граница раздела потоков в различные моменты времени τ при деформации пластины по закону (1.3), когда $f(x) = 1 + x$, $k(\tau) = (1 - e^{-2\tau})/2$



Фиг. 3

классе функций, обеспечивающих плавный сход потоков с пластины. Поэтому слабое вида $D \ln g(x_1)$ в представлении функций $\Phi^\pm(x)$, которое вводилось ранее при изучении развития течений с начальными условиями, здесь следует опустить.

Для функций $\Phi_2^\pm(x)$, $x > 0$, получим

$$\begin{pmatrix} \Phi_2^+(x) \\ \Phi_2^-(x) \end{pmatrix} = -\Phi_1(x) + \begin{pmatrix} -\sqrt{\gamma} \\ i \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\gamma} - i} \left(\frac{\pi}{\delta^*} \right)^{1/2} C e^{-\delta^* x}, \quad \delta^* = -i\omega\delta$$

Неизвестный параметр C и функции $\kappa^\pm(\tau) = \kappa^\pm \exp(i\omega\tau)$ определяются на основании тех же условий, что и в разд. 1.

$$C = \frac{iV^- (\gamma + \beta) I_1 + i\omega(1 + \gamma) I_2}{\sqrt{\pi\gamma\delta^*} I_3}, \quad I_3 = \frac{1}{\pi} \int_0^l \frac{e^{-\delta^* x}}{g(x_1)} dx$$

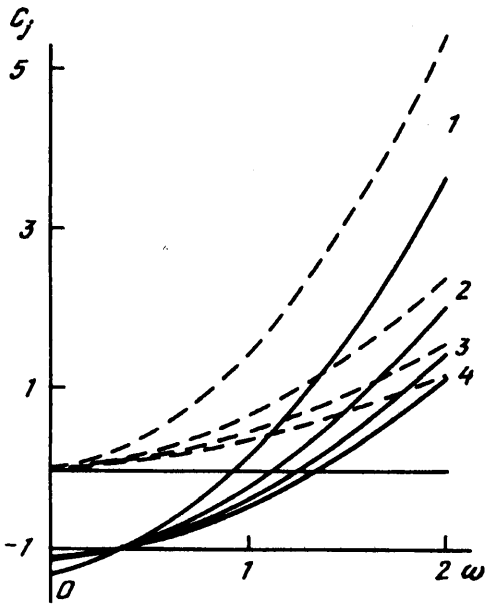
Линия раздела потоков определяется уравнением

$$\eta(x) = -2 \left[J_1(x) + I_1 \frac{g(x_1)}{\operatorname{ch} x_1} \right] - \frac{\sqrt{\pi} C}{V^- (1 - \beta) \sqrt{\delta^*}} \left[J_2(x) + 2\delta^* \frac{g(x_1)}{\operatorname{ch} x_1} \right],$$

$$J_2(x) = \frac{g(x_1)}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-\delta^* \xi}}{g_1(x_1, \xi_1)} d\xi$$

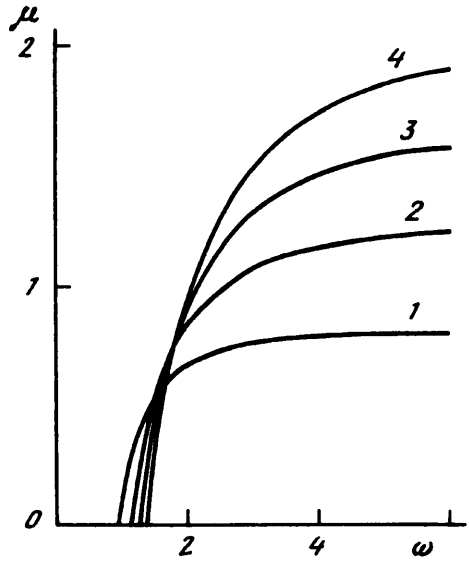
Гармонические угловые колебания кормовой части пластины около некоторой точки $x < 0$ представляют интерес для оценки эффективности машущего движителя. В связи с этим был рассмотрен случай, когда $f(x) = \alpha(x + l) U(x + l)$, $\alpha = \text{const}$, $x \leq 0$.

Получены формулы для средней за период силы тяги R_s , затраченной и полезной



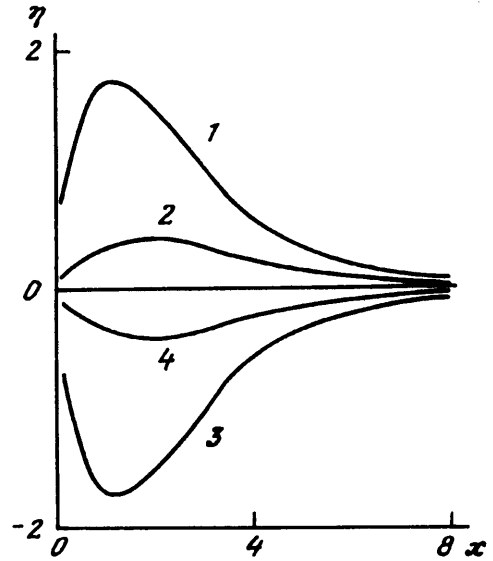
Фиг. 4

Фиг. 4. Зависимости коэффициентов средней тяги $C_1 = C_R$ и $C_2 = C_N$ от числа Струхала ω для пластины с вибрирующей кормовой частью



Фиг. 5

Фиг. 5. Зависимость коэффициента полезного действия машущего двигателя μ от числа Струхала ω



Фиг. 6

Фиг. 6. Свободная граница раздела потоков η в различные моменты времени при гармонических угловых колебаниях кормовой части пластины

работы. Однако, ввиду того что они не выражаются в конечном аналитическом виде, эти формулы здесь не приводятся. Отметим, что при $h \rightarrow \infty$ названные формулы переходят в аналитические зависимости, приведенные в [1, 6].

На фиг. 4 дан график коэффициента средней тяги $C_R = 2R_s/(\rho V^{-2}\alpha^2)$ в функции от безразмерной частоты колебаний ω при $H = \pi$, $\beta = 0,25$ и $\gamma = 0,5, 1, 1,5, 2$ (сплошные кривые 1-4) и коэффициента средней мощности, затрачиваемой на создание тяги, $C_N = 2N_s/(\rho V^{-3}\alpha^2)$ (штриховые кривые 1-4).

На фиг. 5 дан график коэффициента полезного действия двигателя $\mu = \mu(\omega, \beta, \gamma)$, определенный как отношение среднего значения полезной мощности $R_s V^{-1}$ к среднему значению затраченной (нумерация кривых соответствует фиг. 4). Как и в случае полу-

безграничных потоков, μ растет с ростом ω и может превысить единицу, что означает переход механической энергии от потока к пластине.

На фиг. 6 представлена граница раздела потоков $\eta(x, \tau)$ в моменты времени $\tau = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ (кривые 1–4) при $H = \pi, \alpha = 0,5, \omega = 1, \beta = 0,25$ и $\gamma = 0,5$.

Разделяющая потоки пластина на фиг. 3 и 6 не показана. Ее деформированная часть представляет собой отрезки прямых с координатами концов $(-1, 0), (0, k(\tau))$.

Заключение. Из решения задач о неустановившихся двухслойных потоках жидкости в канале, когда граница их раздела частично прикрыта непроницаемой произвольно деформируемой стенкой, следует, что различие их поступательных скоростей существенно влияет на развитие течения и его динамические характеристики. Решение допускает предельный переход к случаю бесконечно широкого канала, рассмотренному ранее.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кузнецов А.В., Кузнецов С.А. Нестационарное взаимодействие двух потоков жидкостей, разделенных полубесконечной деформируемой пластиной // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 1. С. 55–64.
2. Басин М.А., Шадрин В.П. Гидродинамика крыла вблизи границы раздела сред. Л.: Судостроение, 1980. 304 с.
3. Бабкин В.И., Белоцерковский С.М., Гуляев В.В., Дворак А.В. Струи и несущие поверхности. Моделирование на ЭВМ. М.: Наука, 1989. 208 с.
4. Седов Л.И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1966. 448 с.
5. Терентьев А.Г. К решению смешанной краевой задачи // Докл. АН СССР. 1971. Т. 196. № 1. С. 57–60.
6. Кузнецов А.В., Кузнецов С.А. Гармонические колебания пластины в двухслойном потоке несжимаемой жидкости // Проблемы гидродинамики больших скоростей. Чебоксары, 1993. С. 162–171.

Казань

Поступила в редакцию
1.VIII.1995