

УДК 532.526.013.4

© 1997 г. В.В. БОГОЛЕПОВ, И.И. ЛИПАТОВ

ВЛИЯНИЕ СЖИМАЕМОСТИ НА РАЗВИТИЕ ВИХРЕЙ ТЕЙЛОРА – ГЕРТЛЕРА ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

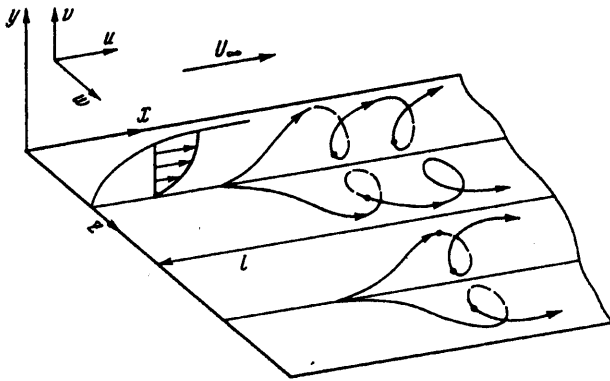
Исследованы процессы развития возмущений в сжимаемых течениях вязкого газа под влиянием поля центробежных сил. На основе асимптотического анализа уравнений Навье – Стокса для больших чисел Рейнольдса и Гертлера построены математические модели, описывающие развитие пространственно неустойчивых вихревых структур. Эти модели позволяют исследовать как линейную, так и нелинейную фазу развития вихрей Тэйлора – Гертлера и других пространственных возмущений. Приведены аналитические решения некоторых линейных краевых задач. Одним из видов неустойчивости течения в пограничном слое является неустойчивость, порождаемая полем центробежных сил. Такая неустойчивость проявляется при обтекании вогнутых поверхностей или вообще в течениях с положительной кривизной линии тока [1–2]. Возникающие в результате неустойчивости вихри Гертлера стали предметом многочисленных исследований, обзоры которых можно найти в [2–4].

Одно из направлений исследований связано с изучением развития линейных возмущений [5–8]. Эти исследования оказались необходимыми для определения положения точки ламинарно-турбулентного перехода, возникающего под влиянием центробежной неустойчивости. Роль вихрей Гертлера, приводящих на нелинейной стадии их развития к существенному преобразованию параметров пограничного слоя, оказалась также существенной для процессов перехода, обусловленных развитием волн Толлмина – Шлихтинга и вторичной неустойчивости.

Большие числа Рейнольдса, характерные для многих реальных течений, позволяют использовать для их исследования асимптотические методы [9].

Одно из первых исследований такого рода проведено в [6]. В последующем они продолжены в работах [7–10 и др.], где исследованы лишь отдельные режимы развития вихрей, соответствующие ограниченному диапазону длин волн пространственных возмущений. Исчерпывающая картина возмущенных режимов для несжимаемых течений (в том числе и для нелинейных) сформулирована в [11–12]. Результаты, полученные на основе асимптотических моделей, следует рассматривать как независимое и существенное дополнение к результатам, получаемым на основе физического и вычислительного эксперимента. Аналитические подходы дают возможность оценивать вклад физических процессов в формирование организованных вихревых течений, определять параметры подобия и т.д.

В настоящей работе сформулированы математические модели, описывающие нелинейную фазу развития возмущений в сжимаемом пограничном слое в поле центробежных сил при больших числах Рейнольдса и Гертлера. Эти модели предназначены как для описания развития вихрей Гертлера, так и возмущенных течений около локальных или периодических в трансверсальном направлении неровностей или других пространственных возмущенных течений. При малых амплитудах возмущений нелинейные краевые задачи сводятся к линейным задачам теории устойчивости, которая к настоящему времени разработана лишь фрагментарно. Так, в [13–15] на основе метода сращиваемых асимптотических разложений исследованы некоторые линейные



Фиг. 1. Картина течения

режимы развития возмущений. В частности, выявлена роль переходного температурного слоя в развитии возмущений в гиперзвуковых потоках. В то же время имеющиеся экспериментальные данные свидетельствуют о возникновении других возможных форм возмущенного вихревого движения газа, что требует проведения дальнейших исследований.

1. Рассмотрим обтекание вогнутой поверхности потоком сжимаемого вязкого газа. Задача содержит три размерных масштаба длины: длину образующей l , толщину пограничного слоя Δ и радиус кривизны r . Для дальнейшего анализа удобно использовать безразмерную толщину пограничного слоя $\delta = \Delta/l$ и безразмерную длину волны периодического вихревого движения $\lambda = \Lambda/l$. Предполагается, что в криволинейной ортогональной системе координата x/l отсчитывается вдоль поверхности, координата y/l – по нормали к поверхности, а координата z/l перпендикулярна плоскости xy (фиг. 1). Пусть для соответствующих компонентов вектора скорости, давления, плотности, полной энтальпии, динамического коэффициента вязкости приняты следующие обозначения:

$$u_\infty u, \quad u_\infty v, \quad \rho_\infty u_\infty^2 r, \quad \rho_\infty \rho, \quad u_\infty^2 H/2, \quad \mu_\infty / \mu$$

Задача восприимчивости в данной работе не рассматривается и изучены лишь возможные формы собственных вихревых движений в пограничном слое, начинающие развиваться в некоторой области, расположенной ниже по течению от передней кромки. Предполагается, что число Рейнольдса ($Re = \rho_\infty u_\infty l / \mu_\infty, \quad \epsilon = Re^{-1/2}$) велико, но не превосходит критического значения, т.е. течение в области развития пространственных возмущений или по крайней мере в некоторой части этой области остается ламинарным. Предполагается, что безразмерная кривизна вогнутой поверхности $q = l/r = Kk$, где r – радиус кривизны, $K = O(1)$, удовлетворяет соотношениям $\epsilon \leq k \leq O(1)$, т.е. рассматриваются течения, для которых число Гертлера ($Ge = 2Kk/\epsilon$) велико.

В выбранной системе координат система уравнений Навье – Стокса может быть записана в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-xy)} \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} - \frac{qv}{(1-xy)} &= 0 \\ \frac{\rho u}{(1-xy)} \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + \rho w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\rho q u v}{(1-xy)} + \frac{1}{(1-xy)} \frac{\partial p}{\partial x} &= \epsilon^2 \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \dots \right] \\ \frac{\rho u}{(1-xy)} \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} + \rho w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\rho q u^2}{(1-xy)} + \frac{\partial p}{\partial y} &= \epsilon^2 \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \dots \right] \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\frac{\rho u}{(1-qy)} \frac{\partial w}{\partial x} + \rho v \frac{\partial w}{\partial y} + \rho w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} = \varepsilon^2 \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \dots \right]$$

$$\frac{\rho u}{(1-qy)} \frac{\partial H}{\partial x} + \rho v \frac{\partial H}{\partial y} + \rho w \frac{\partial H}{\partial z} = \varepsilon^2 \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{Pr} \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{(Pr-1) u \partial u}{Pr \partial y} \right) + \dots \right]$$

Здесь приведены лишь существенные для дальнейшего анализа члены. При данных условиях асимптотический анализ приводит к классической схеме Прандтля, включающей в себя внешнее невязкое течение и двумерный пограничный слой, течение в котором описывается известными решениями теории пограничного слоя [9]. В простейшем случае, когда безразмерный радиус кривизны велик: $1 \ll r/l \ll Re^{1/2}$, течение в пограничном слое будет описываться решениями автомодельного уравнения Блазиуса

$$f'''(\eta) + f(\eta)f''(\eta) = 0$$

$$f(0) = f'(0) = 0, \quad f'(\infty) = 1 \quad (1.2)$$

$$g = g_w + f' \left(1 + \frac{2}{(\gamma-1)M_\infty^2} - g_w \right)$$

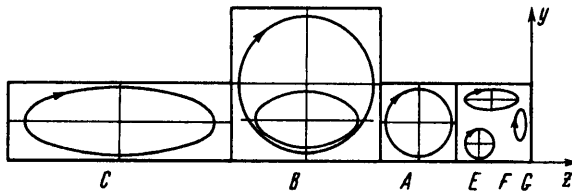
$$u = f' = \frac{df}{d\eta}, \quad g = H, \quad \eta = \frac{1}{\varepsilon(2\xi)^{1/2}} \int_0^y \rho dy, \quad \xi = \rho_w \mu_w x$$

при условии, что температура поверхности постоянна, коэффициент вязкости линейно зависит от температуры, а число Прандтля равно единице ($T_w = \text{const}$, $\mu = cT$, $Pr = 1$).

Структура возникающего пространственного вихревого течения будет зависеть от соотношения толщины пограничного слоя и длины волны пространственного периодического течения. Асимптотический анализ развития вихрей Гертлера в несжимаемых течениях показал [11–12], что в рассматриваемых условиях определяющим является минимальный характерный размер. При анализе развития вихрей в несжимаемых течениях выделено шесть характерных режимов, изображенных на фиг. 2. Можно предположить, что по крайней мере при небольшом влиянии сжимаемости (малых числах Маха) эта структура сохранится. Естественно предположить, что влияние сжимаемости будет проявляться в тех случаях, когда масштаб, на котором меняется плотность, сравним с масштабом возмущенной области течения.

В общем случае масштаб, на котором меняется плотность, совпадает с толщиной пограничного слоя $\delta \sim \varepsilon$. Характерные масштабы изменения плотности по координатам x и z равны по порядку величины $O(1)$, поэтому определяющим является масштаб по нормальной координате. Здесь не рассматривается особый случай нулевой температуры поверхности, при котором плотность меняется линейно по крайней мере вблизи поверхности. Другой особый случай реализуется в гиперзвуковых течениях и связан с образованием при $M_\infty \rightarrow \infty$ вблизи внешней границы пограничного слоя температурного переходного слоя. Гиперзвуковые течения с вихрями в переходном слое исследованы в работах [14–15]. В остальных случаях, там, где масштаб изменения плотности больше, чем размер возмущенной области, течение, как можно показать, описывается в главном приближении теми же уравнениями, что и для несжимаемой жидкости при фиксированной величине плотности и других термодинамических функций в главном приближении. Возможное влияние сжимаемости будет в общем случае ($M_\infty \sim O(1)$, $g_w \sim O(1)$) проявляться для режимов, обозначенных на фиг. 2 буквами *A*, *B*, *C*.

Так же как и при исследовании несжимаемых течений, ниже использован метод сращиваемых асимптотических разложений. В соответствии с общим подходом вначале определяются асимптотические оценки величин возмущенных функций и масштабы возмущенного течения, а затем формулируются асимптотические модели.



Фиг. 2. Характерные режимы течения

2. Рассмотрим вначале режим, соответствующий длинам волн λ , сравнимым с толщиной пограничного слоя δ (режим A). В этом случае характерные размеры возмущенной области течения совпадают по порядку величины, следовательно, одинаковые порядки будут иметь и возмущенные величины вертикальной и трансверсальной скоростей $v \sim w$, что следует из уравнения неразрывности и принципа минимального вырождения [9]. Если предположить, что вихри вызывают нелинейные изменения основного течения, тогда $u \sim \Delta u \sim O(1)$. Нелинейность, проявляющаяся в трансверсальном направлении, дает $w \sim \Delta w \sim (\Delta p)^{1/2}$. Следует напомнить, что исследуются нелинейные процессы, проявляющиеся в течении с характерным масштабом в направлении координаты z , равным λ , что определяет величину градиента давления в поперечном направлении $\partial p / \partial y \sim \rho u^2 k$, откуда $\Delta p \sim \epsilon k$. Далее, на основе приведенных оценок можно получить $v \sim w \sim \epsilon^{1/2} k^{1/2}$. Наконец, из уравнения неразрывности и полученных оценок можно найти продольный размер возмущенной области $x \sim \epsilon^{1/2} k^{-1/2}$.

Для дальнейшего анализа важно оценить порядок отношения диффузионного и инерционного членов в уравнении продольного импульса

$$\left(\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) / \left(\rho u \frac{\partial u}{\partial x} \right) \sim O(\epsilon^{1/2} k^{-1/2}) = o(1)$$

В таких условиях в основной области не выполнено условие прилипания и поэтому необходимо ввести на ее дне подслой толщиной $y \sim \epsilon^{5/4} k^{-1/4}$, течение в котором будет описываться системой уравнений трехмерного пограничного слоя. Решение этой системы уравнений необходимо для определения распределений поверхностного трения и теплового потока, а также критических амплитуд вихрей, которые могут привести к возникновению отрыва пространственного пограничного слоя.

В соответствии с введенными выше оценками функции течения и координаты можно представить в виде

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= (1 + \lambda \epsilon^{-1/2} k^{-1/2} x_A, \lambda y_A, \lambda z_A) \\ (u, v, w) &= (u_A, \lambda^{-1} \epsilon^{3/2} k^{1/2} v_A, \epsilon^{1/2} k^{1/2} w_A) + \dots \\ (p, \rho, H) &= \left(\frac{1}{\gamma M_\infty^2} + \epsilon k p_A, \rho_A, H_A \right) + \dots \end{aligned} \quad (2.1)$$

Подстановка этих разложений в систему уравнений Навье – Стокса (1.1) и предельный переход $Re \rightarrow \infty, Ge \rightarrow \infty$ приводят к модифицированной системе уравнений Эйлера для трехмерного возмущенного течения с соответствующими граничными условиями

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho_A u_A)}{\partial x_A} + \frac{\partial(\rho_A v_A)}{\partial y_A} + \frac{\partial(\rho_A w_A)}{\partial z_A} &= 0 \\ u_A \frac{\partial u_A}{\partial x_A} + v_A \frac{\partial u_A}{\partial y_A} + w_A \frac{\partial u_A}{\partial z_A} &= 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\beta \left(u_A \frac{\partial v_A}{\partial x_A} + v_A \frac{\partial v_A}{\partial y_A} + w_A \frac{\partial v_A}{\partial z_A} \right) + u_A^2 + \frac{1}{\rho_A} \frac{\partial p_A}{\partial y_A} = 0$$

$$u_A \frac{\partial H_A}{\partial x_A} + v_A \frac{\partial H_A}{\partial y_A} + w_A \frac{\partial H_A}{\partial z_A} = 0, \quad \beta = \frac{\varepsilon^2}{\lambda^2}$$

$$v_A = 0, \quad y_A = 0$$

$$u_A \rightarrow 1, \quad v_A \rightarrow 0, \quad w_A \rightarrow 0, \quad p_A \rightarrow 0, \quad H_A \rightarrow H_e, \quad y_A \rightarrow \infty$$

Отличие системы уравнений (2.2) от обычной системы уравнений Эйлера состоит в наличии члена в уравнении для поперечного импульса, учитывающего влияние центробежных сил. Этот член появляется вследствие перехода к криволинейной системе координат, связанной с поверхностью тела. Вторая особенность связана с отсутствием в первом приближении градиента давления в уравнении продольного импульса. Из второго уравнения (2.2) следует тогда сохранение продольной составляющей вектора скорости вдоль линии тока. Аналогичным первым интегралом обладает и уравнение для полной энтальпии.

Для возмущений малой амплитуды решение задачи (2.2) можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} (u_A, v_A, H_A, p_A, p_A) = & (u_0(y_A), 0, H_0(y_A), r_0(y_A), p_0(y_A)) + \\ & + \sigma \sin z_A \exp(\alpha x_A) (U_A(y_A), V_A(y_A), G_A(y_A), R_A(y_A)), P_A(y_A) + \dots \\ w_A = & \sigma \exp(\alpha x_A) \cos(z_A) W_A(y_A) \end{aligned} \quad (2.3)$$

где σ – амплитуда возмущений, $\sigma \ll 1$.

Ограничиваясь нулевым и первым приближениями, из (2.2)–(2.3) получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений и граничных условий

$$\begin{aligned} \alpha \rho_0 U_A + \alpha u_0 R_A + \rho_0 V_A' + \rho_0' V_A - \rho_0 W_A = 0 \\ \alpha u_0 U_A + V_A u_0' = 0 \\ \beta \alpha u_0 V_A + 2u_0 U_A + \frac{P_A'}{\rho_0} - \frac{\rho_0' R_A}{\rho_0^2} = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\rho_0'}{\rho_0} = -u_0^2, \quad \alpha u_0 W_A + \frac{P_A}{\rho_0} = 0, \quad \alpha u_0 G_A + V_A H_0' = 0, \quad ()' = \frac{\partial}{\partial y_A} \\ H_0 = \frac{(\gamma - 1)}{\rho_0 M_\infty^2} + \frac{u_0^2}{2}, \quad G_A = -\frac{R_A}{(\gamma - 1)\rho_0 M_\infty^2} + u_0 U_A, \quad P_A = \frac{\rho_0' V_A}{\alpha u_0} \end{aligned}$$

$$V_A(0) = 0$$

$$U_A(\infty) \rightarrow 0, \quad V_A(\infty) \rightarrow 0, \quad W_A(\infty) \rightarrow 0, \quad P_A(\infty) \rightarrow 0, \quad G_A(\infty) \rightarrow 0$$

Введением новой переменной $s = U_A / u_0'$ сведем систему уравнений (2.3) к одному уравнению с граничными условиями

$$s'' + 2s' \frac{M_0'}{M_0} + s \left(-\beta + 2 \frac{M_0'}{M_0 \alpha^2} \right) = 0 \quad (2.5)$$

$$s(0) < \infty, \quad s(\infty) = 0 \quad (2.6)$$

Первое из граничных условий (2.6) является следствием условия непротекания $V_A(0) = 0$.

Напомним, что для несжимаемого течения соответствующее уравнение совпадает с (2.5) при замене профиля числа Маха $M_0(y_A)$ на профиль скорости в пограничном слое

$u_0(y_A)$. Это обстоятельство позволяет использовать результаты, полученные для несжимаемых течений. В частности, решение для нулевой гармоники имеет вид [13]

$$s_0 = \exp(-\beta^{1/2} y_A), \quad \alpha_0 = \beta^{-1/4}$$

Для профиля числа Маха вида $M_0(y_A) = M_\infty[1 - \exp(-\Gamma y_A)]$, где $\Gamma = \text{const}$, решение выражается через функции Якоби и для собственных значений можно получить следующие выражения [13]:

$$\alpha_n^{-2} = \frac{n(n+1)\Gamma}{2} (1+n)\beta^{1/2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

откуда для нулевой моды следует $\alpha_0 \rightarrow \infty, \lambda/\epsilon \rightarrow \infty$.

В связи с разным асимптотическим поведением собственных чисел α_n , соответствующих нулевой и последующим модам, можно предположить, что при длинах волн λ , превосходящих по порядку величины толщину пограничного слоя ϵ ($\lambda/\epsilon \rightarrow \infty$), возможны две структуры возмущенного вихревого движения, характеризующиеся разными масштабами изменений по продольной координате x (и, возможно, по координате y). Этот вывод, как показано ниже, относится не только к данному профилю числа Маха, но и к любому другому профилю.

Так, для решений задачи (1.2) профиль числа Маха имеет вид

$$M_0^2 = \frac{2f'^2}{(\gamma-1)(g-f'^2)} \quad (2.7)$$

С учетом (2.7) уравнение (2.5) принимает вид

$$s'' + A_1 s' + A_2 = 0 \quad (2.8)$$

$$A_1 = 2 \left(f f'' - g' + \frac{g f''}{f'} \right) (g - f'^2)^{-1}, \quad A_2 = \left[-\beta_1^2 + \frac{1}{\alpha_c^2} \left(-g' + 2 \frac{g f''}{f'} \right) \right]$$

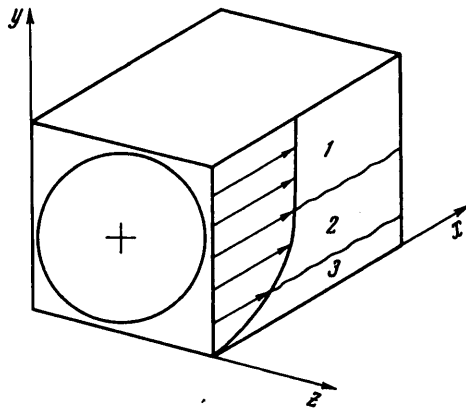
$$\alpha_c^2 = \frac{2\alpha^2}{(\gamma-1)M_\infty^2}, \quad \beta_1 = \frac{2^{1/2}\epsilon}{\lambda}$$

3. Рассмотрим теперь возмущенные течения при длинах волн, превосходящих по порядку величины толщину пограничного слоя (режим *B*). Следуя анализу несжимаемых течений [11–12], можно предположить, что один из возможных вариантов – сохранение поперечного размера возмущенной зоны, тогда из уравнений неразрывности следует $v \sim w\epsilon\lambda^{-1}, x \sim \lambda w^{-1}$. Из анализа уравнения для трансверсального импульса следует оценка для соответствующего компонента скорости $w \sim (\Delta p)^{1/2}$. Анализ уравнения для поперечного импульса приводит к соотношению $\Delta p \sim \epsilon k$. Приведенные выше оценки позволяют получить

$$w \sim \epsilon^{1/2} k^{1/2}, \quad x \sim \lambda \epsilon^{-1/2} k^{-1/2}, \quad v \sim \lambda^{-1} \epsilon^{3/2} k^{1/2} \quad (3.1)$$

Можно показать, что соответствующая этому режиму краевая задача может быть получена из краевой задачи (2.5) при стремлении параметра ϵ/λ к нулю.

Перейдем к рассмотрению других режимов, для которых поперечный размер области возмущенного течения превосходит толщину пограничного слоя. В соответствии с результатами, полученными при исследовании несжимаемых течений [13], предположим, что нелинейные процессы характерны для пристеночной области, где профиль невозмущенной продольной скорости линеен в первом приближении: $u \sim y/\epsilon$. Тогда условие одинаковости порядков величин конвективных членов и градиента давления в уравнении трансверсального импульса приводит к $w \sim (\Delta p)^{1/2}$. Невырожденность уравнения неразрывности дает $u\lambda \sim wx, vx \sim uy$. Учет влияния сил вязкости,



Фиг. 3. Структура течения для случая $\lambda \sim \varepsilon^{3/4} k^{1/4}$
1-3 – характерные области

проявляющихся в общем случае в области нелинейных изменений и имеющих тот же порядок величины, что и силы инерции, приводит к условию $u/x \sim \varepsilon^2/y^2$.

Для получения замкнутой системы оценок необходимо записать условия одинаковости порядков величин возмущения давления за счет центробежных сил и возмущения давления, индуцированного во внешнем потоке из-за изменения толщины вытеснения пограничного слоя. Оценка возмущения давления в пограничном слое, возникающего из-за кривизны линий тока, определяется из уравнения для поперечного импульса $\Delta p \sim \varepsilon k u$.

Для определения индуцированного возмущения давления можно использовать уравнение поперечного импульса, записанное в области невязкого внешнего течения, масштабы которой в направлениях y и z одинаковы и равны по порядку величины λ – длине волны периодических возмущений $\Delta p/\lambda \sim V_e/x$, $V_e \sim y/x$, где вертикальная скорость на внешней границе пограничного слоя V_e определена из условия одинаковости величин наклона линий тока в области нелинейно возмущенного течения и вблизи внешней границы пограничного слоя. Использование приведенных выше оценок позволяет окончательно найти масштабы нелинейной возмущенной области течения и величины изменений функций в этой области

$$x \sim \varepsilon^{3/4} k^{-3/4}, \quad y \sim \varepsilon^{3/4} k^{-1/4}, \quad z \sim \lambda \sim \varepsilon^{3/4} k^{1/4} \quad (3.2)$$

$$u \sim \varepsilon^{1/4} k^{-1/4}, \quad v \sim \varepsilon^{3/4} k^{1/4}, \quad w \sim \varepsilon^{1/4} k^{3/4}, \quad \Delta p \sim \varepsilon^{3/4} k^{5/4}$$

Оценки (3.2) показывают, что при $\lambda/\varepsilon \gg 1$ возможно возникновение области возмущенного движения, имеющей поперечный размер, одинаковый по порядку величины с трансверсальным размером. Следует отметить, что нелинейные процессы в таком движении развиваются в пристеночном слое, имеющем асимптотически малую толщину по сравнению с толщиной пограничного слоя. Структура возмущенного движения для этого режима изображена на фиг. 3, где представлены характерные области 1, 2, и 3.

Функции течения в области 3 можно представить в следующем виде:

$$(x, y, z) = (1 + \varepsilon^{3/4} k^{-3/4} x_B, \quad \varepsilon^{3/4} k^{-1/4} y_{3B}, \quad \varepsilon^{3/4} k^{1/4} z_B) \quad (3.3)$$

$$(u, v, w, p, \rho, \mu) \approx (\varepsilon^{1/4} k^{-1/4} u_{3B}, \quad \varepsilon^{3/4} k^{1/4} v_{3B}, \quad \varepsilon^{1/4} k^{3/4} w_{3B}, \quad \frac{1}{\gamma M_\infty^2} + \varepsilon p_{3B}, \quad \rho_w, \quad \mu_w) + \dots$$

Подстановка разложений (3.3) в систему уравнений (1.1) дает после предельного

перехода $Re \rightarrow \infty$, $Ge \rightarrow \infty$ следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \rho_w u_{3B} \frac{\partial u_{3B}}{\partial x_B} + \rho_w v_{3B} \frac{\partial u_{3B}}{\partial y_{3B}} + \rho_w w_{3B} \frac{\partial u_{3B}}{\partial z_B} &= \mu_w \frac{\partial^2 u_{3B}}{\partial y_{3B}^2} \\ \rho_w u_{3B} \frac{\partial w_{3B}}{\partial x_B} + \rho_w v_{3B} \frac{\partial w_{3B}}{\partial y_{3B}} + \rho_w w_{3B} \frac{\partial w_{3B}}{\partial z_B} + \frac{\partial p_{3B}}{\partial z_B} &= \mu_w \frac{\partial^2 w_{3B}}{\partial y_{3B}^2} \\ \frac{\partial u_{3B}}{\partial x_B} + \frac{\partial v_{3B}}{\partial y_{3B}} + \frac{\partial w_{3B}}{\partial z_B} &= 0, \quad \frac{\partial p_{3B}}{\partial y_{3B}} = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

В области 2, включающей в себя основную часть пограничного слоя, справедливы следующие разложения:

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= (1 + \varepsilon^{3/4} k^{-3/4} x_B, \varepsilon y_{2B}, \varepsilon^{5/4} k^{1/4} z_B) \\ (u, v, w) &= (u_0 + \varepsilon^{1/4} k^{-1/4} u_{2B}, \varepsilon^{5/4} k^{3/4} v_{2B}, \varepsilon^{5/4} k^{3/4} w_{2B}) + \dots \\ (p, \rho) &= \left(\frac{1}{\gamma M_\infty^2} + \varepsilon^{8/4} k^{2/4} p_{2B}, \rho_0 + \varepsilon^{1/4} k^{-1/4} \rho_{2B} \right) + \dots \end{aligned} \quad (3.5)$$

которым соответствует следующая линейная система уравнений:

$$\begin{aligned} u_0 \frac{\partial u_{2B}}{\partial x_B} + v_{2B} \frac{\partial u_0}{\partial y_{2B}} &= 0, \quad u_0 \frac{\partial p_{2B}}{\partial x_B} + v_{2B} \frac{\partial p_0}{\partial y_{2B}} = 0 \\ \rho_0 \frac{\partial u_{2B}}{\partial x_B} + u_0 \frac{\partial p_{2B}}{\partial x_B} + v_{2B} \frac{\partial p_0}{\partial y_{2B}} + \rho_0 \frac{\partial v_{2B}}{\partial y_{2B}} &= 0 \\ \frac{\partial p_{2B}}{\partial y_{2B}} + 2\rho_0 u_0 u_{2B} + \rho_{2B} u_0^2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Решение системы уравнений (3.6), удовлетворяющее условиям сращивания с решением системы уравнений (3.4), имеет вид

$$\begin{aligned} u_{2B} &= -A_0(x_B, z_B) \frac{du_0}{dy_{2B}}, \quad v_{2B} = u_0 \frac{\partial A_0}{\partial x_B} \\ \rho_{2B} &= -A_0 \frac{d\rho_0}{dy_{2B}}, \quad p_{2B} = A_0 + p_{3B} \end{aligned}$$

Для области 1 справедливы следующие представления функций течения и координат:

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= (1 + \varepsilon^{3/4} k^{-3/4} x_B, \varepsilon^{5/4} k^{1/4} y_{1B}, \varepsilon^{5/4} k^{1/4} z_B) \\ (u, v, w) &= (1 + \varepsilon^{3/4} k^{5/4} u_{1B}, \varepsilon^{3/4} k^{3/4} v_{1B}, \varepsilon^{5/4} k^{3/4} w_{1B}) + \dots \\ (p, \rho) &= \left(\frac{1}{\gamma M_\infty^2} + \varepsilon^{8/4} k^{6/4} p_{1B}, 1 + \varepsilon^{8/4} k^{6/4} \rho_{1B} \right) + \dots \end{aligned} \quad (3.7)$$

Система уравнений для главных членов разложений в области 1 имеет вид

$$\frac{\partial u_{1B}}{\partial x_B} + \frac{\partial p_{1B}}{\partial x_B}, \quad \frac{\partial v_{1B}}{\partial x_B} + \frac{\partial p_{1B}}{\partial y_{1B}} = 0, \quad p_{1B} M_\infty^2 = \rho_{1B} \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial w_{1B}}{\partial x_B} + \frac{\partial p_{1B}}{\partial z_B}, \quad \varepsilon^{3/4} k^{3/4} \frac{\partial p_{1B}}{\partial x_B} + \frac{\partial v_{1B}}{\partial y_B} + \frac{\partial w_{1B}}{\partial z_B} = 0$$

которая может быть сведена к волновому уравнению

$$B_0^2 \frac{\partial^2 p_{1B}}{\partial x_B^2} - \frac{\partial^2 p_{1B}}{\partial y_{1B}^2} - \frac{\partial^2 p_{1B}}{\partial z_B^2}, \quad B_0 = M_\infty^2 \varepsilon^{3/4} k^{3/4} \quad (3.9)$$

Таким образом, существует критическая величина числа Маха $M_c = O(\varepsilon^{-3/4} k^{-3/4})$, от которой зависит режим взаимодействия вязкого и невязкого течений. Оказывается, что при $M_\infty \ll M_c$ существенны процессы взаимодействия в плоскостях yz , соответственно при $M_\infty \gg M_c$ существенны процессы взаимодействия в плоскостях xu . Кроме того, при больших числах Маха могут быть существенны процессы взаимодействия течения в исходном пограничном слое с внешним невязким течением. Проявление эффектов такого рода зависит от параметра гиперзвукового взаимодействия $\chi = M_\infty \delta$, где δ – безразмерная толщина пограничного слоя [16]. В данной работе предполагается, что $\chi \ll 1$, т.е. реализуется режим слабого взаимодействия.

Предполагая, что амплитуда возмущений мала ($\sigma \ll 1$), решение можно искать в виде

$$p_{1B} = \sigma \exp(\alpha x_B + \beta_0 y_{1B}) \sin(\omega z_B), \quad \beta_0 = (B_0^2 \alpha^2 + \omega^2)^{1/2} \quad (3.10)$$

$$v_{1B}(x_B, 0, z_B) = -\sigma \beta_0 \alpha^{-1} \exp(\alpha x_B) \sin(\omega z_B), \quad v_{2B}(x_B, \infty, z_B) = \frac{dA_0}{dx_B}$$

Решения для возмущений толщины вытеснения и давления можно получить, используя (3.10) и условия сращивания

$$A_0 = -\sigma \beta_0 \alpha^{-2} \exp(\alpha x_B) \sin(\omega z_B) \quad (3.11)$$

$$p_{3B} = \sigma \exp(\alpha x_B) (1 + \beta_0 \alpha^{-2}) \sin(\omega z_B)$$

Функции течения в области 3 при малых амплитудах возмущений представимы в виде

$$u_{3B} = a y_{3B} + U_B \exp(\alpha x_B) \sin(\omega z_B), \quad v_{3B} = V_B \exp(\alpha x_B) \sin(\omega z_B) \quad (3.12)$$

$$w_{3B} = W_B \exp(\alpha x_B) \sin(\omega z_B), \quad a = \frac{du_0}{dy_{2B}}$$

которым соответствует следующая система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$a y_{3B} \alpha U_B + a V_B = \frac{\mu_w}{\rho_w} \frac{d^2 U_B}{dy_{3B}^2}, \quad a y_{3B} \alpha W_B + \omega P_B = \frac{\mu_w}{\rho_w} \frac{d^2 W_B}{dy_{3B}^2} \quad (3.13)$$

$$\alpha U_B + \frac{dV_B}{dy_{3B}} - \omega W_B = 0$$

Процедура сращивания решений в областях 1, 2, и 3 приводит к задаче

$$\alpha U_B - \omega W_B = F_B, \quad a \alpha y_{3B} F_B + \alpha a V_B - \omega^2 P_B = \frac{\mu_w}{\rho_w} \frac{d^2 F_B}{dy_{3B}^2} \quad (3.14)$$

$$F_B + \frac{dV_B}{dy_{3B}} = 0, \quad F_B(\infty) = -\alpha A_0$$

Решение краевой задачи (3.14) выражается через функцию Эйри и приводит к следующему дисперсионному соотношению:

$$1 + \frac{\alpha^2}{(M_\infty^2 \varepsilon^{3/4} k^{3/4} \alpha^2 + \omega^2)^{1/2}} = - \frac{3a^{3/3} \mu_w^{1/3} \text{Ai}'(0)(M_\infty^2 \varepsilon^{3/4} k^{3/4} \alpha^2 + \omega^2)^{1/2}}{\omega^2 \rho_w^{1/3} \alpha^{1/3}}$$

4. Дальнейший рост длины волны может привести к проявлению сил вязкости в области, занимаемой пограничным слоем (режим С). Для получения системы оценок используем уравнение поперечного импульса, откуда следует $\Delta p \sim \varepsilon k$. Равенство порядков величин диффузионных и инерционных членов в уравнении продольного импульса в предположении о нелинейных изменениях продольной скорости дает $\varepsilon^2/y^2 \sim 1/x$. Из уравнения неразрывности можно получить $1/x \sim w/z$. Наконец, использование уравнения трансверсального импульса дает $z \sim \varepsilon^{1/2} x$.

Приведенные выше соотношения приводят к следующей системе оценок:

$$x \sim 1, y \sim \varepsilon, z \sim \varepsilon^{1/2} k^{1/2}, u \sim 1, v \sim \varepsilon, w \sim \varepsilon^{1/2} k^{1/2}, \Delta p \sim \varepsilon k \quad (4.1)$$

Функции течения в возмущенной области с учетом (4.1) запишем в виде

$$(x, y, z) = (x_C, \varepsilon y_C, \varepsilon^{1/2} k^{1/2} z_C) \quad (4.2)$$

$$(u, v, w, p, \rho) = \left(u_C, \varepsilon v_C, \varepsilon^{1/2} k^{1/2} w_C, \frac{1}{\gamma M_\infty^2} + \varepsilon k p_C, \rho_C \right) + \dots$$

Подстановка (4.2) в систему уравнений Навье – Стокса (1.1) и предельный переход $Re \rightarrow \infty, Ge \rightarrow \infty$ дают

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho_C u_C)}{\partial x_C} + \frac{\partial(\rho_C v_C)}{\partial y_C} + \frac{\partial(\rho_C w_C)}{\partial z_C} &= 0 \\ \rho_C u_C \frac{\partial u_C}{\partial x_C} + \rho_C v_C \frac{\partial u_C}{\partial y_C} + \rho_C w_C \frac{\partial u_C}{\partial z_C} &= \frac{\partial}{\partial y_C} \left(\mu \frac{\partial u_C}{\partial y_C} \right) \\ K \rho_C u_C^2 + \frac{\partial p_C}{\partial y_C} &= 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \rho_C u_C \frac{\partial w_C}{\partial x_C} + \rho_C v_C \frac{\partial w_C}{\partial y_C} + \rho_C w_C \frac{\partial w_C}{\partial z_C} + \frac{\partial p_C}{\partial z_C} &= \frac{\partial}{\partial y_C} \left(\mu \frac{\partial w_C}{\partial y_C} \right) \\ \rho_C u_C \frac{\partial H_C}{\partial x_C} + \rho_C v_C \frac{\partial H_C}{\partial y_C} + \rho_C w_C \frac{\partial H_C}{\partial z_C} &= \frac{\partial}{\partial y_C} \left(\mu \frac{\partial H_C}{\partial y_C} \right), \quad Pr = 1 \end{aligned}$$

Система уравнений (4.3) аналогична системе уравнений тонкого вязкого ударного слоя [17]. Найденные численные решения системы уравнений тонкого ударного слоя [17] позволяют предположить существование решений системы уравнений (4.3).

Для дальнейшего анализа используем переменные Дородницына – Лиза

$$\zeta = \rho_w \mu_w x_C, \quad \eta = (2\zeta)^{1/2} \int_0^{\zeta} \rho_C dy_C \quad (4.4)$$

$$u_C = \frac{\partial f}{\partial \eta}, \quad w_C = \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}, \quad H_C = g$$

в которых краевая задача (4.3) (в предположении о линейной зависимости динами-

ческого коэффициента вязкости от температуры) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} &= 2\zeta \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial \zeta} - \frac{\partial f}{\partial \zeta} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) - f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \frac{2\zeta}{\dot{\zeta}} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial z_c} - \frac{\partial \varphi}{\partial z_c} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) \\ \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \eta^3} &= 2\zeta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta \partial \zeta} - \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} \right) - f \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + \frac{2\zeta}{\dot{\zeta}} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta \partial z_c} - \frac{\partial \varphi}{\partial z_c} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} \right) - \frac{2\zeta}{\dot{\zeta} \rho_c} \frac{\partial p_c}{\partial z_c} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial \eta^2} &= 2\zeta \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial g}{\partial \zeta} - \frac{\partial f}{\partial \zeta} \frac{\partial g}{\partial \eta} \right) - f \frac{\partial g}{\partial \eta} + \frac{2\zeta}{\dot{\zeta}} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \frac{\partial g}{\partial z_c} - \frac{\partial \varphi}{\partial z_c} \frac{\partial g}{\partial \eta} \right) \\ (2\zeta)^{1/2} K \rho_c \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{\partial p_c}{\partial \eta} &= 0, \quad \dot{\zeta} = \frac{\partial \zeta}{\partial x_c} \end{aligned} \quad (4.5)$$

В случае возмущений малой амплитуды краевая задача (4.5) может быть линеаризована

$$\begin{aligned} (f, \varphi, p_c, \rho_c, g) &= (f_0, 0, P_0, R_0, g_0) + \sigma(F_c, \Phi_c, P_c, R_c, G_c) \sin(\omega z_c) + \dots \\ F_c'' + F_c f_0'' + F_c' f_0' &= 2\zeta(f_0' F_c' - F_c' f_0') + \frac{2\zeta \omega}{\dot{\zeta}} \Phi_c f_0'' \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\Phi_c'' + f_0 \Phi_c' = 2\zeta f_0' \Phi_c' + \frac{2\zeta \omega P_c}{\dot{\zeta} R_0}$$

$$G_c'' + f_0 G_c' + F_c g_0' = 2\zeta(f_0' G_c' - F_c g_0') + \frac{2\zeta \omega g_0' \Phi_c}{\dot{\zeta}}$$

$$P_c' = -(2\zeta)^{1/2} K (R_c f_0'^2 + 2R_0 f_0' F_c'), \quad (') = \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad (\dot{\ }) = \frac{\partial}{\partial \zeta}$$

Система уравнений (4.6) описывает развитие возмущений на расстояниях, сравнимых с характерной длиной, на которой развивается двумерный пограничный слой. Зависимость решения для нулевого приближения от продольной координаты не позволяет использовать нормально-модовое представление возмущенного решения. В этом случае решение системы уравнений в частных производных (4.6), дополненной соответствующими граничными условиями, может быть получено с помощью численных методов.

Для исследованных выше режимов течения (*A* и *B*) характерная протяженность возмущенной области течения оказывается меньшей по порядку величины, чем длина, на которой происходит изменение параметров пограничного слоя. В этом случае взаимодействие внешнего невязкого течения с течением в пограничном слое (сильное или слабое), которое может проявиться при больших сверхзвуковых скоростях набегающего потока [16], будет сказываться лишь на параметрах пограничного слоя перед областью возмущенного пространственного течения. Следовательно, результаты исследования режимов *A* и *B* могут быть использованы и для описания режима сильного взаимодействия.

Другая ситуация характерна для режима *C*. В этом случае возмущения развиваются на длинах порядка $O(1)$. Таким образом, влияние параметра взаимодействия на развитие длинноволновых возмущений будет определяющим, что приведет к изменению вида асимптотических оценок и масштабов (4.1), а также краевых задач (4.3), (4.5).

Заключение. На основе оценок характерных режимов может быть проанализирована структура возмущенных течений при конечных числах Гертлера или при асимптотически малой кривизне ($k \sim \epsilon$). Можно показать, основываясь на (2.1), (3.2) и (4.1), что при конечных числах Гертлера существует единственный режим развития возмущений, для которого характерны длины волн, сравнимые с толщиной погра-

ничного слоя. Следует напомнить, что речь идет об описании возмущений, растущих вниз по потоку. Тогда развитие всех неустойчивых возмущений на длинах порядка $O(1)$ описывается параболизированной системой уравнений Навье – Стокса. Хотя существование таких режимов для конечных радиусов кривизны обтекаемой поверхности остается под вопросом, имеются ситуации, характерные для отрывных областей течения, для которых радиус кривизны линий тока не связан с кривизной поверхности, а определяется из условий стационарности областей отрывного течения.

Таким образом, в настоящей работе на основе асимптотического анализа системы уравнений Навье – Стокса в предположении о больших величинах чисел Рейнольдса и Гертлера сформулированы математические проблемы, описывающие нелинейное развитие пространственно неустойчивых вихревых структур в сжимаемых течениях. Найденны три характерных режима развития возмущений, различающихся величинами длин волн и различным вкладом физических процессов, связанных с центробежной неустойчивостью. Сформулированы линейные задачи, описывающие начальную стадию развития возмущений и для некоторых режимов получены аналитические решения.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 95-01-01382).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Taylor G.I.* Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders // *Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A.* 1923. V. 223. P. 289–343.
2. *Görtler H.* Über eine dreidimensionale Instabilität laminarer Grenzschichten an konkaven Wänden // *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen. Fachg. 1.* 1940. Bd. 1. № 1. P. 1–26.
3. *Peerhossaini H.* On the subject of Görtler vortex // *Lectre Notes in Physics / Ed. S. Zaleski, J.E. Wesfreid.* Berlin: Springer, 1984. V. 210. P. 376–384.
4. *Saric W.S.* Görtler vortices // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 1994. V. 26. P. 379–409.
5. *Smith A.M.O.* On the growth of Taylor – Görtler vortices along highly concave walls // *Quart. Appl. Math.* 1955. V. 13. № 3. P. 233–262.
6. *Hämmerling G.* Über das Eigenwertproblem der dreidimensionalen Instabilität laminarer Grenzschichten // *J. Rat. Mech. and Analysis.* 1955. № 2. P. 279–321.
7. *Hall P.* Taylor – Görtler vortices in fully developed or boundary-layer flows: linear theory // *J. Fluid Mech.* 1982. V. 124. P. 475–494.
8. *Жигулев В.Н., Тумин А.М.* Возникновение турбулентности. Динамическая теория возбуждения и развития неустойчивости в пограничных слоях. Новосибирск: Наука, 1987. 282 с.
9. *Ван-Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 310 с.
10. *Гуревич Ю.Г.* Развитие локального возмущения в пограничном слое на искривленной поверхности // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1990. № 1. С. 23–31.
11. *Боголепов В.В., Дегтярев Л.М., Дроздова О.М., Липатов И.И.* Асимптотическая структура вихрей Тэйлора – Гертлера в пограничном слое. Препринт № 156. М.: ИПМ АН СССР им. М.В. Келдыша, 1988. 26 с.
12. *Боголепов В.В., Липатов И.И.* К асимптотической теории вихрей Гертлера в пограничном слое жидкости // *ПМТФ.* 1992. 3. С. 58–68.
13. *Тимошин С.Н.* Асимптотический анализ пространственно-неустойчивого спектра вихрей Гертлера // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1990. № 1. С. 32–41.
14. *Hall P., Fu Y.* On the Görtler vortex instability mechanism at hypersonic speeds // *Theor. and Comput. Fluid Dynam.* 1989. V. 1. № 3. P. 125–134.
15. *Dando A.H.* The inviscid compressible Görtler problem in the three-dimensional boundary layers // *Theor. Comput. Fluid. Dynam.* 1992. V. 3. № 5. P. 253–265.
16. *Хейз У.Д., Пробстин Р.Ф.* Теория гиперзвуковых течений. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 607 с.
17. *Анкудинов А.Л.* О новой математической модели трехмерного тонкого вязкого ударного слоя // *Уч. зап. ЦАГИ.* 1989. Т. 20. № 5. С. 12–20.

Москва

Поступила в редакцию
11.IV.1995