

УДК 533.72

© 1997 г. А.Б. ПОДДОСКИН, А.А. ЮШКАНОВ

ВРАЩЕНИЕ СФЕРЫ В НЕОГРАНИЧЕННОМ ГАЗЕ

Решена задача о медленном вращении сферы в неограниченном газе при произвольных числах Кнудсена. Кинетическое уравнение с интегралом столкновений в виде модели Бхатнагара – Гросса – Крука (БГК-модель), описывающее состояние окружающей среды, решено методом Лиза, причем в функции распределения учтены все моменты, обеспечивающие асимптотический переход последней в функцию распределения Чепмена – Энскога на больших расстояниях от сферы. В частном случае умеренно крупных сферических частиц получено значение коэффициента изотермического скольжения, близкое к точному.

Задача о поведении газа при произвольных числах Кнудсена по-прежнему остается одной из главных в кинетической теории разреженного газа [1–3]. Это связано как с большой практической важностью такого рода задач, так и с серьезными трудностями, возникающими при их теоретическом анализе. До сих пор основным методом аналитического решения подобных задач остается метод Лиза [4–9]. Этот метод доказал свою практическую важность. Однако при обычно используемом варианте этого метода возникает серьезная теоретическая трудность связанная с поведением функции распределения на больших расстояниях. Эта трудность связана с тем, что обычно рассматривается недостаточное число моментов, позволяющих проследить переход функции распределения в распределение Чепмена – Энскога. В то же время увеличение числа моментов приводит к существенным математическим проблемам при решении такого рода задач. В частности, при рассмотрении задачи о вращении сферы радиуса R при произвольных числах Кнудсена в работе [8] был оставлен только один момент (напомним, что учет конусов влияния приводит к удвоению эффективного числа моментов, так что фактически в работе [8] учитывалось два момента, см. ниже).

Здесь рассматривается задача о вращении сферы при произвольных числах Кнудсена с учетом вдвое большего числа моментов – c_ϕ и $c_\phi c_r$, что позволяет проследить переход данной функции распределения в функцию Чепмена – Энскога. Отметим, что даже в случае мелкой частицы (при больших числах Кнудсена) на больших расстояниях от нее функция распределения должна переходить в функцию Чепмена – Энскога, так как локальное число Кнудсена вдали от частицы становится малым [1].

1. Постановка задачи. Рассматривается случай медленно вращающейся сферы, т.е. предполагается, что ее линейная скорость вращения ωR много меньше скорости теплового движения молекул газа ($\omega R \ll \sqrt{2kT/m}$). В этом случае функцию распределения можно линеаризовать, т.е. представить в виде

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = f_0(1 + \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{v}))$$

$$f_0 = n(m/2\pi kT)^{3/2} \exp(-c^2), \quad c = \sqrt{m/2kT} \mathbf{v}$$

Здесь m , \mathbf{v} – масса и скорость молекул газа, n – концентрация молекул, T – температура газа, $r = |\mathbf{r}|/R$.

Для нахождения функции $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ воспользуемся кинетическим уравнением с интегралом столкновений в виде БГК-модели [1, 2]. В линеаризованном варианте и с учетом симметрии задачи это уравнение есть

$$c\nabla\Phi = \varepsilon(2c_\varphi G_\varphi - \Phi) \quad (1.1)$$

Скалярное произведение в гильбертовом пространстве в обозначениях [1] определяется формулой

$$(\Psi, \Phi) = \int \exp(-c^2) \Psi \Phi \frac{d^2c}{\pi^{3/2}}$$

и тогда проекция безразмерной макроскопической скорости газа в этих обозначениях примет вид $G_\varphi = (c_\varphi, \Phi)$.

Параметр ε выбирается из условия, чтобы функция распределения Чепмена – Энскога [1, 2] $f_{Ch} = f_0(1 + 2c_\varphi G_\varphi - b_1 c_\varphi c_r \Pi_{r\varphi})$ удовлетворяла уравнению (1.1). Компонента тензора скоростей деформации

$$\Pi_{r\varphi} = \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{G_\varphi}{r} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial G_r}{\partial \varphi} \right]$$

а коэффициент b_1 , например для молекул – твердых шаров, выражается через среднюю длину свободного пробега λ и равен [2] $5\sqrt{\pi} \lambda / 4$. Таким образом, $\varepsilon = 2R / b_1 = 8 / (5\sqrt{\pi} \text{Kn})$, $\text{Kn} = \lambda/R$ – число Кнудсена.

Решение уравнения (1.1) проводится методом Лиза [4, 5] в виде разрывной в пространстве скоростей функции

$$\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{c}) = \eta(+)\Phi^+ + \eta(-)\Phi^- \quad (1.2)$$

$$\eta(\pm) = 1 / 2(1 \pm \text{sign}(c_r - c_{r0})), \quad c_{r0} = c \cos \chi_p$$

$$\chi_p = \arcsin(r^{-1}), \quad \gamma = \cos \chi_p = \sqrt{1 - r^{-2}}$$

где $\text{sign}(c_r - c_{r0})$ – знаковая функция.

Связь между декартовыми и сферическими координатами имеет вид $c_r = c \cos \chi$, $c_\chi = c \sin \chi \cos \varphi$, $c_\varphi = c \sin \chi \sin \varphi$.

Внутри и вне конуса влияния угол удовлетворяет соотношениям $0 \leq \chi \leq \chi_p$, $\chi_p \leq \chi \leq \pi$.

Заметим, что в работе [8] Φ^\pm были выбраны так

$$\Phi^\pm = A^\pm(r, \theta) c_\varphi$$

Такая функция распределения не дает правильного чепменовского распределения молекул газа по скоростям на расстояниях, больших λ . Поэтому, чтобы устранить этот недостаток, выбирается Φ^\pm с большим числом моментов, а именно в виде

$$\Phi^\pm = c_\varphi A_1(r, \theta) + c_\varphi c_r B_1(r, \theta), \quad \Phi^- = c_\varphi A_2(r, \theta) + c_\varphi c_r B_2(r, \theta)$$

При $r \rightarrow \infty$ функции $A_2(r, \theta)$, $B_2(r, \theta)$ должны убывать, а на поверхности сферы (при $r = 1$) $f = f_0(1 + c_\varphi A_1(1, \theta) + c_\varphi c_r B_1(1, \theta))$.

Если считать, что отражение молекул происходит диффузно с максвелловским распределением $f_M = f_0(1 + 2c_\varphi \omega_0 \sin \theta)$, то граничные условия для функций $A_1(r, \theta)$, $B_1(r, \theta)$ есть

$$A_1(1, \theta) = 2c_\varphi \omega_0 \sin \theta, \quad B_1(1, \theta) = 0 \quad (1.3)$$

где $\omega_0 = \Omega R \sqrt{m / 2kT}$.

Учитывая симметрию задачи и граничные условия (1.3), становится ясно, что решение можно искать в виде

$$A_i(r, \theta) = a_i(r) \sin \theta, \quad B_i(r, \theta) = b_i(r) \sin \theta, \quad i = 1, 2$$

2. Моментные уравнения и их решение. Моментные уравнения для функций $a_i(r)$ и $b_i(r)$ получаются после умножения уравнения (1.1) последовательно на c_φ , $c_\varphi c_r$, $c_\varphi S_{3/2}^{(1)}(c^2)$, $c_\varphi c_r S_{3/2}^{(1)}(c^2)$ и последующего интегрирования по всему пространству скоростей ($S_{3/2}^{(1)}(c^2)$, $S_{3/2}^{(1)}(c^2)$ – полиномы Сонина [2]). Отметим, что указанные моменты взаимно ортогональны. В результате система моментных уравнений принимает вид

$$\frac{d}{dr}(r^3 \tau_{r\varphi}) = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{1}{r^3} \frac{d}{dr} \left\{ r^3 \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} (a_1 + a_2) - \frac{\sqrt{\pi}}{4} (5\gamma^3 - 3\gamma^5)(a_1 - a_2) + (1 - 3\gamma^4 + 2\gamma^6)(b_1 - b_2) \right] \right\} - \frac{1}{r} \left\{ 2\sqrt{\pi}(a_1 + a_2) - \frac{\sqrt{\pi}}{4} (15\gamma - 10\gamma^3 + 3\gamma^5)(a_1 - a_2) + \frac{2}{r^6} (b_1 - b_2) \right\} = -4\sqrt{\pi} \varepsilon \tau_{r\varphi} \quad (2.2)$$

$$\frac{1}{r^3} \frac{d}{dr} \left\{ r^3 \left[\frac{(a_1 - a_2)}{r^4} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} (5\gamma^3 - 3\gamma^5)(b_1 - b_2) + \sqrt{\pi}(b_1 + b_2) \right] \right\} = -\frac{\varepsilon(b_1 - b_2)}{r^4} \quad (2.3)$$

$$\frac{1}{r^3} \frac{d}{dr} \left\{ r^3 (1 - 3\gamma^4 + 2\gamma^6)(b_1 - b_2) \right\} - \frac{2}{r^7} (b_1 - b_2) = \frac{\varepsilon(a_1 - a_2)}{r^4} \quad (2.4)$$

$$\tau_{r\varphi} = (c_r c_\varphi, \Phi) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{(a_1 - a_2)}{r^4} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} (b_1 + b_2) - \frac{\sqrt{\pi}}{4} (5\gamma^3 - 3\gamma^5)(b_1 - b_2) \right\}$$

Из уравнения (2.1) следует, что

$$\tau_{r\varphi} = C_1 / (4\sqrt{\pi} r^3) \quad (2.5)$$

где $C_1 = \text{const}$.

Подстановка выражения (2.5) в уравнение (2.3) дает

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{a_1 - a_2}{r} \right] = \frac{\varepsilon(b_1 - \beta_2)}{r} \quad (2.6)$$

Из уравнений (2.4) и (2.6) после введения обозначения $u = (a_1 - a_2)/r$ получим дифференциальное уравнение второго порядка

$$(3 - 2/r^2)u'' + 2/r^3 u' - \varepsilon^2 u = 0 \quad (2.7)$$

В соответствии с граничными условиями задачи функция $u(r)$ должна убывать при $r \rightarrow \infty$, поэтому решение уравнения (2.7) будет иметь вид

$$u = C_2 \exp \left[-\frac{\varepsilon}{3} \sqrt{3r^2 - 2} \right] \quad (2.8)$$

где $C_2 = \text{const}$.

В результате решения системы уравнений (2.2), (2.3), (2.4) с учетом выражения (2.8)

и граничных условий (1.3) получим

$$A_1(r, \theta) = \Omega(\theta, \delta) \left\{ \frac{d\delta}{r^2} + r[0,5(2 + 5\gamma^3 - 3\gamma^5) \exp(-\delta s(r)) + \xi_0(\delta, r)] \right\} \quad (2.9)$$

$$A_2(r, \theta) = \Omega(\theta, \delta) \left\{ \frac{d\delta}{r^2} + r[0,5(-2 + 5\gamma^3 - 3\gamma^5) \exp(-\delta s(r)) + \xi_0(\delta, r)] \right\} \quad (2.10)$$

$$B_1(r, \theta) = \Omega(\theta, \delta) \left\{ \frac{d}{r^3} - \left[\frac{2}{\sqrt{\pi} r^3} + \frac{r^2(2 + 5\gamma^3 - 3\gamma^5)}{2\sqrt{3r^2 - 2}} \right] \exp(-\delta s(r)) \right\} \quad (2.11)$$

$$B_2(r, \theta) = \Omega(\theta, \delta) \left\{ \frac{d}{r^3} - \left[\frac{2}{\sqrt{\pi} r^3} + \frac{r^2(-2 + 5\gamma^3 - 3\gamma^5)}{2\sqrt{3r^2 - 2}} \right] \exp(-\delta s(r)) \right\} \quad (2.12)$$

$$d = 1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}}, \quad s(r) = \sqrt{3r^2 - 2} - 1, \quad \delta = \frac{\varepsilon}{3} = \frac{8}{15\sqrt{\pi} \text{Kn}}$$

$$Y_1(\delta, r) = \int_r^\infty \exp(-\delta s(r)) \sqrt{1 - \frac{1}{r^2}} \frac{dr}{r^5}, \quad Y_2(\delta, r) = \int_r^\infty \exp(-\delta s(r)) \frac{dr}{r^4}$$

$$\xi_0(\delta, r) = \frac{15}{2} Y_1(\delta, r) + \frac{6\delta}{\sqrt{\pi}} Y_2(\delta, r), \quad \xi_1(\delta, 1) = 1 + d\delta + \xi_0(\delta, 1)$$

$$\Omega(\theta, \delta) = 2\omega_0 \sin \theta / \xi_1(\delta, 1)$$

Заметим, что в случае $\text{Kn} \rightarrow \infty$ (свободномолекулярный режим), $\delta \rightarrow 0$, $Y_1(0, r) = (2 - 5\gamma^3 + 3\gamma^5)/15$, $Y_2(0, r) = (1 - \gamma^2)^{3/2} / 3$.

При этом условия функции $A_i(r, \theta)$, $B_i(r, \theta)$ будут иметь вид

$$A_{\infty 1}(r, \theta) = 2\omega_0 r \sin \theta, \quad A_{\infty 2}(r, \theta) = 0$$

$$B_{\infty 1}(r, \theta) = \omega_0 \sin \theta \left[\frac{1}{r^3} - \frac{r^2(2 + 5\gamma^3 - 3\gamma^5)}{2\sqrt{3r^2 - 2}} \right]$$

$$B_{\infty 2}(r, \theta) = \omega_0 \sin \theta \left[\frac{1}{r^3} - \frac{r^2(-2 + 5\gamma^3 - 3\gamma^5)}{2\sqrt{3r^2 - 2}} \right]$$

В обратном предельном случае $\text{Kn} \rightarrow 0$ (континуальный режим), $\delta \rightarrow \infty$, $Y_1(\delta, r) \rightarrow 0$, $Y_2(\delta, r) \rightarrow 0$, $B_i(r, \theta) \rightarrow 0$, а функции $A_i(r, \theta)$ ($i = 1, 2$) равны

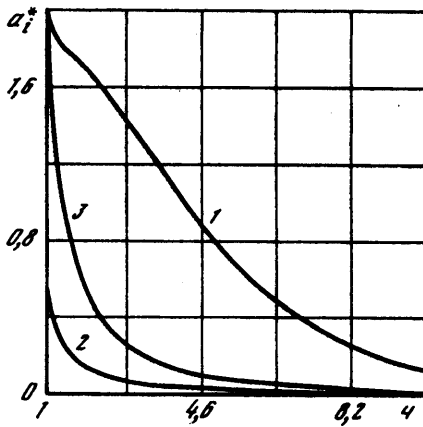
$$A_{01}(r, \theta) = A_{02}(r, \theta) = 2\omega_0 \sin \theta / r^2$$

На фиг. 1, 2 представлены графики зависимости приведенных функций $a_i^* = A_i(r, \theta) / (\omega_0 \sin \theta)$, $b_i^* = B_i(r, \theta) / (\omega_0 \sin \theta)$ от r при $\text{Kn} = 1$, которые получены в результате численного интегрирования.

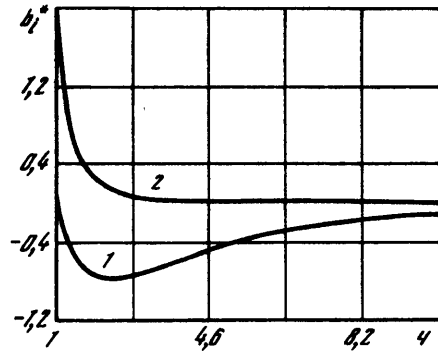
При $\text{Kn} < 0,01$ значения функций a_1^* и a_2^* отличаются от a_{01}^* не более чем на 5%.

При $\text{Kn} > 100$ функции a_1^* и a_2^* практически совпадают с $a_{\infty 1}^*$ и $a_{\infty 2}^*$.

Полученное решение дает правильный предельный переход для функции распределения при $r \rightarrow \infty$ для любых чисел Кнудсена. Действительно, в этом случае $\eta(+)\rightarrow 0$, $\eta(-)\rightarrow 1$, $f \rightarrow f_0(1 + \Phi^-)$; $A_1(r, \theta) = A_2(r, \theta) = \Omega(\theta, \delta) d\delta / r^2 + O(r^{-3})$, $B_1(r, \theta) = B_2(r, \theta) = \Omega(\theta, \delta) d / r^3 + O(r^{-4})$, т.е. получается функция распределения Чепмена – Энскога. В то же время $A^+(r, \theta) \sim r \sin \theta$, $A^-(r, \theta) \sim r^{-2} \sin \theta$, т.е. функция распределения



Фиг. 1. Зависимость приведенных функций от r при $\text{Kn} = 1$: 1 - a_1^* , 2 - a_2^* , 3 - a_{02}^*



Фиг. 2. Зависимость приведенных функций от r при $\text{Kn} = 1$: 1 - b_1^* , 2 - b_2^*

[8] становится все более анизотропной по мере удаления от частицы и в сужающемся конусе влияния на любом, сколь угодно большом расстоянии от частицы сосредоточен почти весь момент импульса. Эта нефизическая особенность возникла из-за того, что в этой работе использовалось недостаточное число моментов функции распределения.

3. О макропараметрах газа. Выражение для макроскопической скорости газа G_φ , полученное с помощью функции распределения (1.2), имеет вид

$$G_\varphi = \frac{1}{4} \left[A_1 + A_2 - \gamma(3 - \gamma^2) \frac{A_1 - A_2}{2} + \frac{B_1 - B_2}{\sqrt{\pi r^4}} \right]$$

Учитывая выражения (2.9) – (2.12) получим скорость газа в явном виде

$$G_\varphi = 0,5\Omega(\theta, \delta) \left\{ \frac{d\delta}{r^2} + r\xi_0(\delta, r) - \left[\frac{3\gamma}{2r^3} + \frac{1}{\sqrt{\pi r^2} \sqrt{3r^2 - 2}} \right] \exp(-\delta s(r)) \right\} \quad (3.1)$$

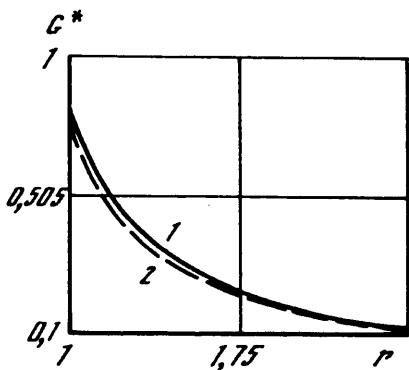
Как следует из (3.1) в гидродинамическом пределе ($\text{Kn} \rightarrow 0$) или, что равносильно рассмотрению крупных частиц, скорость $G_\varphi = \sin \theta \omega_0 / r^2$, последнее однозначно согласуется с классическим результатом [10].

В свободномолекулярном пределе ($\text{Kn} \rightarrow 0$) или, что равносильно рассмотрению мелких частиц (так как в этом случае $R \ll \lambda$), из формулы (3.1) находим

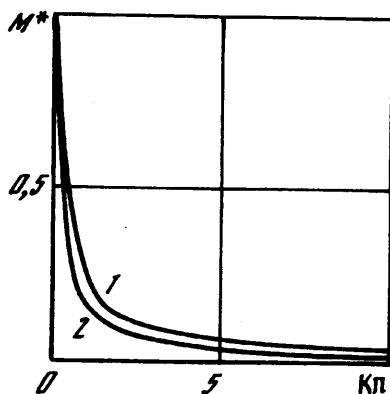
$$G_\varphi = \omega_0 \sin \theta / 2 \left\{ r \left[1 - \frac{\gamma}{2} (3 - \gamma^2) \right] - \frac{1}{\sqrt{\pi r^2} \sqrt{3r^2 - 2}} \right\} \quad (3.2)$$

Как следует из (3.2), скорость газа на поверхности мелких частиц равна $G_\varphi = 0,218$, что существенно отличается от аналогичного результата [8]. Такое различие результатов связано с учетом в данной работе дополнительных моментов в функции распределения.

На фиг. 3 представлены графики зависимости скорости газа $G^* = G_\varphi / (\omega_0 \sin \theta)$ от r при $\text{Kn} = 0,13$. Результаты представленной теории сопоставляются с данными [11], где решена задача о вращении сферы, путем численного интегрирования кинетического уравнения Больцмана. Как видно из графиков, небольшое расхождение имеет место в области вблизи поверхности частицы.



Фиг. 3. Зависимость скорости газа G^* от r при $Kn = 0,13$; 1 – представленная теория, 2 – [11]



Фиг. 4. Зависимость момента сил трения M^* от Kn/l – представленная теория, 2 – данные [11]

Полный момент силы трения, действующий на поверхность сферической частицы, рассчитывается по формуле

$$M = 2\pi R^3 \int_0^\pi \sigma_{r\varphi} \sin^2 \theta d\theta$$

Компонента тензора напряжений $\sigma_{r\varphi}$ выражается через функцию распределения и равна

$$\sigma_{r\varphi} = -2P_0 \int \exp(-c^2) c_r c_\varphi \Phi \frac{d^3 c}{\pi^{3/2}} = -2P_0 \tau_{r\varphi} \quad (3.3)$$

Здесь $P_0 = 4\mu\bar{v} / (5\lambda)$ – давление газа, $\bar{v} = \sqrt{8kT / \pi m}$ – средняя арифметическая скорость молекул газа, μ – динамическая вязкость.

Учитывая соотношения (2.5), (2.9)–(2.12), (3.3), получим выражение для момента сил трения

$$M = -8\pi R^3 \mu \omega \{1 + [1 + \xi_1(\delta, 1)] / (d\delta)\}^{-1} \quad (3.4)$$

В континуальном режиме, как следует из (3.4), момент сил трения $M_0 = -8\pi R^3 \mu \omega$, что находится в соответствии с классическим результатом [10].

В свободномолекулярном режиме $M_\infty = -8\pi R^3 \mu \omega 4d / (15Kn)$.

На фиг. 4 изображены графики зависимости момента сил трения $M^* = M/M_0$ от числа Кнудсена. Результат представленной теории сравнивается с данными [11]. Основное отличие имеет место в области больших чисел Кнудсена.

В случае умеренно крупных частиц ($0,1 < Kn < 0,3$ или в так называемом режиме со скольжением) полученное нами решение дает возможность вычислить коэффициент изотермического скольжения C_m .

Момент сил трения для умеренно крупных частиц определяется по формуле

$$M = -8\pi R^3 \mu \omega (1 + 3C_m Kn)^{-1} \quad (3.5)$$

Сравнивая выражение (3.4) и (3.5), находим

$$C_m = 5 / (8d) \lim_{\delta \rightarrow \infty} (1 + \xi_1(\delta, 1))$$

Анализируя интегралы $Y_1(\delta, 1)$ и $Y_2(\delta, 1)$, при $\delta \rightarrow \infty$ находим $Y_1(\delta, 1) \rightarrow 0$, $\delta Y_2(\delta, 1) \rightarrow 1/3$.

В результате получим значение коэффициента $C_m = 5\sqrt{\pi} / 8 \approx 1,108$, что примерно на 3% отличается от точного значения 1,1466 [1]. В то же время применение метода Лиза в обычном варианте [8] дает завышенное значение $C_m = 5\pi/8 \approx 1,963$.

Заключение. В результате решения моментным методом Лиза задачи о вращении сферы в неограниченном газе получена в аналитическом виде функция распределения молекул газа по скоростям, которая описывает поведение газа во всем пространстве при любых числах Кнудсена и дает правильную асимптотику на больших расстояниях от сферы. С использованием этой функции получены выражения для макропараметров течения газа G_ϕ и $\tau_{гф}$.

Графически проанализированы моменты функции распределения, скорость газа и момент сил трения. Проведено сравнение результатов теории с данными численного интегрирования.

Показано, что в режиме со скольжением представленная теория дает значение коэффициента изотермического скольжения, близкое к точному.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Черчиньяни К. Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1978. 495 с.
2. Коган М.Н. Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967. 440 с.
3. Кошмаров Ю.А., Рыжов Ю.А. Прикладная динамика разреженного газа. М.: Машиностроение, 1977. 184 с.
4. Lees L., Chung-Yen Lin. Kinetic-theory description of conductive heat transfer from a fine wire // Phys. Fluids. 1962. V. 5. № 10. P. 1137–1148.
5. Lees L. Kinetic theory description of rarefied gas flow // J. Soc. Indust. Appl. Math. 1965. V. 13. № 1. P. 278–311.
6. Яламов Ю.И., Ивченко И.Н., Мурадян С.М. Теория испарения сферических капель при произвольных числах Кнудсена // Докл. АН СССР. 1981. Т. 258. № 5. С. 1106–1108.
7. Ивченко И.Н. О теплопереносе при испарении или конденсационном росте сферических капель // Теплофизика высоких температур. 1985. Т. 23. № 4. С. 787–791.
8. Смирнов Л.П., Чекалов В.В. Медленное вращение сферы в ограниченном объеме разреженного газа // Изв. АН СССР. МЖГ. 1978. № 4. С. 117–124.
9. Ивченко И.Н., Лоялка С.К., Томпсон Р.В. Метод решения линеаризованных задач теории переноса для сферической геометрии при произвольных числах Кнудсена // Изв. РАН МЖГ. 1994. № 6. С. 181–186.
10. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
11. Loyalka S.K. Motion of a sphere in a gas: Numerical solution of the linearized Boltzmann equation // Phys. Fluids. A. 1992. V. 4. № 5. P. 1049–1056.

Москва

Поступила в редакцию
16.X.1995